基礎と応用微分積分への補遺

この文書は，通常の訂正として教科書に追加するにはスペースの関係で長すぎるが，補っておきたい内容を，読者の参考のために提供するものです．今後も充実させてゆきたいと思いますので，ご期待ください．なお，この文書の著作権は，教科書の一部としての扱いとしてください．教科書をお持ちの方は印刷して教科書に挟んでご利用頂ければ幸いです．

【I,p.54 への補遺】　三角関数の定義を高校の教科書の通りにしたとき，同じく高校の教科書に示されている，$(\sin x)' = \cos x$ 等の証明に必要な公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ の図による説明は，誤魔化しでなく正当化できる，ということを，教科書で紹介した方針に従ってもう少し詳しく示します．ただし，そのためには，大学初年級での微積の講義の内容の通常の順序だと，かなりの先取りが必要になります．そこでのおしゃべりでも書いたように，著者は，東大の教養学部で初めて微積の講義をしたとき，この方法で全てを厳密に論じようとしたので，三角関数は半年以上経つまで使えませんでした．しかし微積でいろんな実例や反例を作るのに，周期関数は是非とも必要なので，仕方なく三角関数の代わりにガウス記号を用いて周期関数の例を作って使いました．(もちろん，演習の時間には，計算練習として三角関数の微積分はどんどんやりましたが．) この猛烈な講義に著者の最初の学生たちはよく付いてきてくれました．

(1) 平面曲線の弧長を積分論を用いて定義する．

これは本書では巻 II の第 9 章 §1 の内容になりますが，巻 I の第 4 章で論じられている 1 変数のリーマン積分論よりはむしろやさしいのです．曲線弧を

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad 0 \le t \le T$$

とパラメータ表示するとき，その弧長は，適当に取った分点に対応する弦の長さの総和

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{dis}(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i-1}), \tag{A.1}$$

$$\text{ここに，}\quad \mathrm{P}_i = (x_i, y_i),\ \ x_i = \varphi(t_i),\ \ y_i = \psi(t_i),\ \ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T$$

を近似長として，分点を増やしていったときの近似長の極限として定義します．一般の 1 変数のリーマン積分論のときは，振動することがあるので難しいのですが，この近似長は，分点を増やすと単調増加 (正確には非減少) なことが三角不等式から直ちに分かるので，有限な極限が存在するか，あるいは無限に大きくなるかのいずれかです．前者のとき，この曲線弧は長さを持つと呼ばれます．上の定義から明かに，曲線弧の弧長はパラメータ表示の選び方には依らない概念です．

(2) こうして定義された弧長は，曲線弧の連結に対して加法性を持つ．すなわち，C_1, C_2 を二つの曲線弧とし，C_1 の終点が C_2 の始点と一致しているとき，$C = C_1 \cup C_2$ で新しい曲線弧を作れるが，このとき，もし最初の二つが長さを持てば，C も長さを持ち，それはそれぞれの長さの和に等しい．

この主張は，第 4 章で用いられている積分論の常套論法で証明できます．

(3) 滑らかな曲線弧は長さを持つ．

ここで曲線が滑らかとは，接線を持ち，その傾きが連続的に変化することを言います．パラメータ付けられた曲線の接線の議論は，本書では巻 II の第 6 章 §4 で初めてなされますが，ここでは，単に $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ が連続関数となるようなパラメータ表示を持つ曲線のこととしておきます．(滑らかな曲線弧の定義には，更に接線ベクトル $(\varphi'(t), \psi'(t))$ が零ベクトルにならないという条件が必要ですが，ここでの議論にはそれは不要です．) この主張は，近似和 (A.1) がこのとき

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{dis}(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(\varphi'(\xi_i))^2 + (\psi'(\eta_i))^2}(t_i - t_{i-1}) \\ &\le \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}T < \infty\end{aligned}$$

となることから容易に確かめられます．ここで，ξ_i, η_i は平均値定理が与える区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 内の数で，M_1, M_2 は，それぞれ $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)|$ の $0 \le t \le T$ における最大値です．

(4) 滑らかな曲線弧においては，その上に二点 P, Q をとれば，Q を P に近づけたとき，弧 $\widehat{\mathrm{PQ}}$ の長さの弦 $\overline{\mathrm{PQ}}$ の長さに対する比は 1 に近づく：

$$\lim_{\mathrm{Q} \to \mathrm{P}} \frac{\widehat{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}} = 1. \tag{A.2}$$

実際，$\mathrm{P} = (\varphi(t), \psi(t))$, $\mathrm{Q} = (\varphi(t + \mathit{\Delta} t), \psi(t + \mathit{\Delta} t))$ とすれば，(3) の論法から，

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\mathit{\Delta} t \le \widehat{\mathrm{PQ}} \le \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\mathit{\Delta} t$$

が分かります，ここで M_1, M_2 はそれぞれ $|\varphi'(t)|$, $|\psi'(t)|$ の区間 $[t, t + \mathit{\Delta} t]$ における最大値，m_1, m_2 はこれらの最小値です．後の不等式は上で導いたものですが，前の不等式も全く同様に出せます．こ

こで，$\mathrm{Q} \to \mathrm{P}$, すなわち $\Delta t \to 0$ とすると，$M_1, m_1 \to |\varphi'(t)|$, $M_2, m_2 \to |\psi'(t)|$ となります．すなわち，

$$\frac{\widehat{\mathrm{PQ}}}{\Delta t} \to \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}.$$

他方，

$$\mathrm{dis}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sqrt{(\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t))^2 + (\psi(t+\Delta t) - \psi(t))^2} = \sqrt{\varphi'(t+\theta_1 \Delta t)^2 + \psi'(t+\theta_2 \Delta t)^2}\,\Delta t$$

ここに，$0 \le \theta_1, \theta_2 \le 1$ なので，この係数も $\Delta t \to 0$ のとき $\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$ に近づきます．以上で (A.2) が示されました．この論法と 1 変数の積分論を組み合わせると，弧長の公式

$$L = \int_0^T \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt \tag{A.3}$$

も出てきます．

(5) 単位円の定義は

$$\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

で与えるとき，これは滑らかな曲線弧より成る．

パラメータ表示に $(\sin\theta, \cos\theta)$ を使ってしまっては元も子もありませんが，単位円のパラメータ表示として

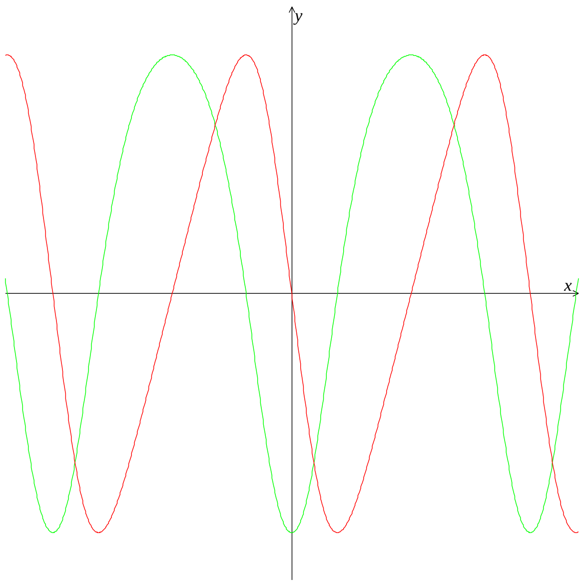
$$\mathrm{P}(t) = (x(t), y(t)), \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad (-\infty < t < \infty)$$

というのが受験数学でもよく知られています．このパラメータ表示は $t = \infty$ に相当する点 $(-1, 0)$ だけは表せませんが，x の符号を逆にすれば，その点の近くでのパラメータ表示となるので，全体として滑らかな曲線弧から成っています．

実は，ガウス記号を使うと角度の代わりとなる変数によるパラメータ表示が可能です．上のパラメータ表示と，区間 $(-1, 1)$ を $(-\infty, \infty)$ に写す関数 $t = \dfrac{u}{1-u^2}$ を合成させると，

$$x = \frac{1 - 3u^2 + u^4}{1 - u^2 + u^4}, \quad y = \frac{2u(1-u^2)}{1 - u^2 + u^4}$$

というパラメータ表示が得られます．これに $u = 2(v - [v]) - 1$ を代入すると，ガウス記号なので，最後の変換は v が整数値のところで不連続ですが，上に代入した結果は，$u = \pm 1$ で x, y が同じ値を取っているため，連続になります． しかもグラフから想像されるように，これは滑らか (導関数も連続) に繋がっています．ちょっと横にシフトしていますが，これはまさに三角関数もどきです．



以上により，円弧の弧長が定義できます．従って，点 $(1,0)$ から出発して，反時計回りに弧長が s になるまで行ったときの円上の点 (x,y) は一意に定まります．このとき，$x=\cos s$, $y=\sin s$ と定義するのです．角度に当たるものが出てきませんでしたが，角度は s で代用するのです．これがラジアンです．

(6) 二つのパラメータ表示をつないで，単位円の全長が確定する．

実は，これは

$$L=\lim_{R\to\infty}\mathrm{P}(\widehat{-R)\mathrm{P}}(R)=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\sqrt{\left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)^2+\left(\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\right)^2}dt$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{2}{1+t^2}dt$$

となることが (A.3) から容易に確かめられますが，この広義積分が有限な値となることは置換積分で高校生でも実質的には知っているものです．しかし，今は三角関数は使えないので，この値を 2π と置いて π の定義とします．単位円の直径は明かに 2 なので，これは古典的な円周率 π の定義と整合的です．以上により，周期 2π の周期関数 $\sin s$, $\cos s$ が得られました．ただし，$s<0$ に対しては，時計回

りに弧長 $-s$ だけ進んだ点の x, y 座標を表すものと規約します．従って，x 軸に関する対称性により

$$\sin(-s) = -\sin s, \quad \cos(-s) = \cos s$$

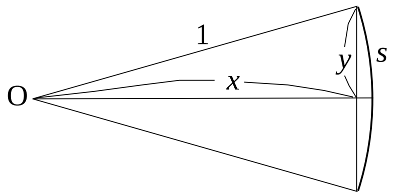
となります．対称性とはいかがわしいと言われたら，この二つの式をそのまま定義とすればよいのです．もちろん，これらの式は s が負のときも成り立つことは (定義から!) 明かです．

(7) $\lim_{s\to 0} \frac{\sin s}{s} = 1$.

実際，高校の教科書に載っている図をそのまま流用すると，$2y$ が弧長 $2s$ に対する弦の長さになるので，(4) で述べたことから

$$\lim_{s\to 0} \frac{2y}{2s} = 1, \quad \text{すなわち，} \quad \lim_{s\to 0} \frac{y}{s} = 1.$$

ここは円を描くと滑らかに見えるので，高校の教科書では，普通，図から明かに成り立つでしょ，とやるところですが，我々は円の定義と弧長の定義を解析的に与えたので，一般論からの帰結となったのです．



以上で所期の目的は達成したのですが，せっかくなのでこの方針で三角関数の基礎付けを幾何学的直観に頼らずにもう少し続けてみましょう．ここから先は，実質的には高校の教科書に書かれていることと同じです．

(8) $\cos^2 s + \sin^2 s = 1$ **である．**

これは，$x = \cos s$, $y = \sin s$ だったので，単位円の定義 $x^2 + y^2 = 1$ から明かです．

(9) 線形写像

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos t - y\sin t \\ x\sin t + y\cos t \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

は，長さを変えない全単射な写像となる．

線分の場合，これは，実際に長さを計算してみれば，(8) の関係式から容易に確かめられます．一般の曲線弧の場合は，それを近似する折れ線の長さが変わらないので，極限に行っても値は変わりません．この写像はもちろん，いわゆる角度 t の回転です．

(10) 加法定理

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t, \quad \sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$$

これは，現在高校の教科書で採用されているように，回転を用いて証明できます：上の写像で，点 $(1,0)$ は点 $(\cos t, \sin t)$ に写るので，単位円上の点 $(x,y) = (\cos s, \sin s)$ は，そこから単位円に沿って弧長 t だけ進んだ点 (x', y') に写されます．なぜなら，(9) で示したところにより，点 $(1,0)$ から点 $(\cos s, \sin s)$ までの弧長 s は，回転で写った先の 2 点 $(\cos t, \sin t)$ と (x', y') の間の弧長に等しいのですが，(2) で示した弧長の加法性により，この点は $(1,0)$ からの弧長が $s+t$ の点，すなわち $(\cos(s+t), \sin(s+t))$ となっているはずです．他方，ベクトル ${}^t(\cos s, \sin s)$ の変換 (9) による行き先を計算すれば ${}^t(\cos s \cos t - \sin t \sin t, \sin s \cos t + \cos s \sin t)$ となるので，両者の成分を等しいと置けば，加法定理が得られます．以上では s, t が正のように議論しましたが，これらが負の値を取るときも適当に解釈すれば成り立つことが分かります．

(11) 三角関数の導関数

$$(\sin s)' = \cos s, \quad (\cos s)' = -\sin s.$$

実際，微分の定義と加法定理により

$$(\sin s)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(s+h) - \sin s}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin s(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos s \sin h}{h}$$

(7) により，この最後の辺の第 2 項の極限値は $\cos s$ となる．また第 1 項は $h \to 0$ のとき

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} = \frac{\sin h}{h}\frac{\sin h}{1+\cos h} \to 1 \times \frac{0}{2} = 0$$

であることから，零に近づく．

(12) 諸公式

$$\sin\pi = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$
$$\sin(\pi+s) = -\sin s, \quad \cos(\pi+s) = -\cos s, \quad \cos(\frac{\pi}{2}+s) = -\sin s, \quad \sin(\frac{\pi}{2}+s) = \cos s,$$

これらは，普通は対称性を用いて示すのですが，1 行目と加法公式を用いて導くのが厳密でしょう．1 行目は，π が半円周，$\dfrac{\pi}{2}$ が四半円周に対応することから，それぞれ単位円上の点 $(-1,0)$, $(0,1)$ に相当することは用いなければなりません．これらはそれぞれ，折り返し $y \mapsto -y$, および $x \mapsto -x$ による合同変換を用いて示せばよいでしょう．

【II,p.67 への補遺】 追加された章末問題 13 の解答を載せておきます．なおこの問題は，現在執筆中の『関数論講義』で引用しようとしたら書いてなかった主張を補うために追加されました (^^;
(1) ヒントに書かれているように，p.6, 例 6.2 の関数 (6.3) を次のように修正する：

$$f(x,y) = \begin{cases} \left\{1 - 4\left|\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{3}{2}\right|^2\right\}^2, & x^2 < y < 2x^2 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases} \tag{6.3bis}$$

すると，これは尾根の尖りがなくなり，かつ 2 本の放物線 $y = x^2$, $y = 2x^2$ において，地面に接するように落ちるので，原点以外では C^1 級となる．原点では $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ となるのみならず，あらゆる方向からの方向微分も 0 となる．しかし，尾根に沿って常に値 1 を取っているので，原点では相変わらず不連続である．

(2) 簡単のため原点で考察する．偏微分はできるので，

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\} + \{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\}$$

において右辺の { } 内にそれぞれ，x, y に関する 1 変数の平均値定理を適用すると，$0 < \exists\theta_1 < 1$, $0 < \exists\theta_2 < 1$ が存在し，上は

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

となる．ここで $\Delta x, \Delta y \to 0$ のときを考えると，$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が原点で連続なら，上は

$$= \{f_x(x,y) + o(1)\}\Delta x + \{f_y(x,y) + o(1)\}\Delta y$$

となるから，結局

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

が得られ，$f(x,y)$ が原点で全微分可能なことが分かった．