# Cauchy の存在定理の証明

金子 晃

本文書は，拙著

『関数論講義』，サイエンス社，2021.（p.142)

への補遺として書かれたもので，一般の正規形 $n$ 階単独解析的常微分方程式の初期値問題の収束冪級数解の存在を示すのが目的です．興味を持った読者が専門書を参照される労を省くために用意しました．解説の主眼は，Cauchy が発明した優級数の方法と呼ばれるすばらしいアイデアの紹介にあります．このアイデアは微分方程式に限らず，いろんな場面で必要な正則関数の存在を示すのに使えます．

以下では上記の本文の記号を流用し，定理等も『本書の』として引用します．なお，姉妹書の

『微分方程式講義』，サイエンス社，2014.（p.139)

に対する補遺では，より一般な 1 階連立微分方程式の形で同様の内容を扱っています．

まず，簡単のため，線形に限り，本書中に掲げられた次の主張の証明をします．

**補題 6.5** 関数 $c_j(z)$, $j = 0, 1, \dots, m$, および $f(z)$ は円 $|z - \alpha| < R$ で正則で，かつここで $c_0(z)$ は零点を持たないとする．このとき **$m$ 階線形微分方程式**

$$c_0(z)w^{(m)} + c_1(z)w^{(m-1)} + \cdots + c_{m-1}(z)w' + c_m(z)w = f(z) \tag{C.1)=(6.16}$$

の**初期条件**

$$w(\alpha) = \beta_0,\ w'(\alpha) = \beta_1,\ \dots,\ w^{(m-1)}(\alpha) = \beta_{m-1} \tag{C.2)=(6.17}$$

を満たす正則関数解が $|z - \alpha| < R$ でただ一つ存在する．ここに $\beta_j$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ は任意に指定できる複素定数で，**初期値**と呼ばれる．

**証明** 途中まで本書に書かれているが，読者の便宜のため最初から繰り返しておく．

仮定により方程式 (C.1)=(6.16) の両辺を $c_0(z)$ で割り算して $c_0 = 1$ とできる．更に，方程式を $w^{(m)}$ について解いた形に変形し正規形にしたものを，同じ記号を再利用して

$$w^{(m)} = c_1(z)w^{(m-1)} + c_2(z)w^{(m-2)} + \cdots + c_m(z)w + f(z) \tag{C.3}$$

と記し，以下もっぱらこれを考察する．この解を

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (z - \alpha)^n \tag{C.4}$$

の形の級数で求める．係数 $w_0$, $w_1$, $\dots$, $w_{m-1}$ までは初期条件 (C.2)=(6.17) から $w_j = \frac{\beta_j}{j!}$ と一意に定まる．これ以後は (C.3) から順次求めるのだが，そのため係数 $c_j(z)$ や右辺の $f(z)$ も $z - \alpha$ の級数に展開しておく．煩わしいので以後複素平面の平行移動で $\alpha = 0$ とし，

$$c_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} z^k, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{C.5}$$

とする．これらと (C.4) で $\alpha = 0$ としたものを方程式 (C.3) に代入すれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{n!} w_{m+n} z^n = \sum_{j=1}^{m} \Big( \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} z^k \Big) \Big( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m-j+l)!}{l!} w_{m-j+l} z^l \Big) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

が得られる．両辺の $z^n$ の係数を比較すると，$l = n - k \le n$ として

$$\frac{(m+n)!}{n!} w_{m+n} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} c_{jk} \frac{(m-j+n-k)!}{(n-k)!} w_{m-j+n-k} + f_n \tag{C.6}$$

となる．式は複雑だが，各 $n$ について $w_{m+n}$ が $w_{m+n-1}$ 以下の既知の量を係数に持つ 1 次式の形をしていることは見て取れるだろう．よって求める解の展開係数は初期値 (C.2)=(6.17) から帰納的に一意に定まる．これから解の一意性が自明に従う．

後はこれが $|z| < R$ で収束することを言えばよい．

本書中で述べられたのはここまででした．しかし，漸化式 (C.6) で定まる係数 $c_n$ を持つ冪級数が正の収束半径を持つことを直接示すのは困難なので，優級数の概念を導入します．以下，形式的冪級数という言葉で，和の意味は考えない形式的な表現 $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ を取り扱います．これは，$\{c_n\}_{n=0}^\infty \in \prod_{n=0}^\infty \boldsymbol{C}$ と同一視できるので，別に奇妙なものではありません．二つの形式的冪級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ に対し和と積の演算を

$$\Big(\sum_{n=0}^\infty a_n z^n\Big) + \Big(\sum_{n=0}^\infty b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^\infty (a_n + b_n) z^n, \quad \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^\infty b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k\Big) z^n$$

で定義します．これらの演算はもちろん和が意味を持つような二つの級数の和と積の演算から引いてきたものですが，単に無限数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty \in \prod_{n=0}^\infty \boldsymbol{C}$ の間の演算として代数的に定義可能なものです.（ちなみに，和の方はベクトルの和に，積の方は離散畳み込み演算というものに相当します.）

**定義 C.1** 二つの形式的冪級数 $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$, $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ において，$c_n$ は複素数，$b_n$ は非負実数とする．このとき後者が前者の優級数であるとは，$|c_n| \le b_n$ がすべての $n$ について成り立つことを言う．これを記号で

$$\sum_{n=0}^\infty c_n z^n \ll \sum_{n=0}^\infty b_n z^n \tag{C.7}$$

と記す.

以下，$f = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ で右辺の形式的冪級数を略記します．収束する場合はその和で定義される正則関数も同じ記号で表すことにします．優級数の概念が大切なのは次のような事実によります：

**補題 C.2** $f \ll g$ で $g$ の収束半径が $R$ なら，$f$ の収束半径も $R$ 以上である.

これは Cauchy-Hadamard の公式から直ちに出てきます.

**補題 C.3** $f_j = \sum_{n=0}^\infty a_{jn} z^n$, $g_j = \sum_{n=0}^\infty b_{jn} z^n$, $j = 1, 2$ が形式的冪級数で，$f_j \ll g_j$, $j = 1, 2$ が成り立っているならば

$$f_1 + f_2 \ll g_1 + g_2, \qquad f_1 f_2 \ll g_1 g_2.$$

これは，冪級数の和や積がそれぞれの係数の正係数の多項式により計算されることから定義により明らかです：

$$|a_{1n} + a_{2n}| \le |a_{1n}| + |a_{2n}| \le b_{1n} + b_{2n}, \qquad \Big|\sum_{k=0}^n a_{1,n-k} a_{2k}\Big| \le \sum_{k=0}^n |a_{1,n-k}||a_{2k}| \le \sum_{k=0}^n b_{1,n-k} b_{2k}.$$

これを繰り返し用いると，次のことが分かります：

**系 C.4** $C_{jk}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ および $F_n$, $n = 0, 1, 2$ を非負実数の無限列とし，

$$\sum_{k=0}^\infty c_{jk} z^k \ll \sum_{k=0}^\infty C_{jk} z^k, j = 1, 2, \ldots, m, \qquad \sum_{n=0}^\infty f_n z^n \ll \sum_{n=0}^\infty F_n z^n$$

とする．このとき，$|w_k| \le W_k$ なる $W_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ と

$$\frac{(m+n)!}{n!} W_{m+n} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n C_{jk} \frac{(m-j+n-k)!}{(n-k)!} W_{m-j+n-k} + F_n$$

で定まる $\sum_{n=0}^{\infty} W_n z^n$ は，(C.6) で定まる冪級数の優級数となる．

これが成り立つ理由は，漸化式 (C.6)) が変数 $c_{jk}$, $w_n$ の正係数多項式で表されているからです．

以上により，問題は漸化式から得られる（形式的）冪級数に対して，収束半径が簡単に分かるような優級数をいかに求めるかということに帰着されました．その基本的道具が次の補題です：

**補題 C.5** 関数 $f(z)$ は $|z| < R$ で正則とする．このとき $0 < \forall r < R$ について $M > 0$ を適当に選べば $f(z)$（の Taylor 展開）は $\frac{M}{1-\frac{z}{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r^n} z^n$ を優級数として持つ．

実際，これは Taylor 展開の収束半径が $R$ 以上であることから，Cauchy-Hadamard の公式によっても導けますし，Taylor 展開の係数 $\frac{f^n(0)}{n!}$ が系 4.4 により

$$\left|\frac{f^n(0)}{n!}\right| \le \frac{1}{r^n} \max_{|\zeta| \le r} |f(\zeta)|$$

と抑えられることから，$M = \max_{|\zeta| \le r} |f(\zeta)|$ と取ればよいことからも分かります．いずれの証明でも $r$ を $R$ より少しは縮めないといけないことに注意しましょう．

この補題を使うと，系 C.4 は具体的に，

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} z^k \ll \frac{M}{1-\frac{z}{r}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \ll \frac{M}{1-\frac{z}{r}}$$

とできます．優級数の方は

$$W^{(m)} = \frac{M}{1-\frac{z}{r}} \{W^{(m-1)} + W^{(m-2)} + \cdots + W' + W + 1\} \tag{C.8}$$

という方程式の解なので，この $W_j = |w_j|, j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ を初期値とする解が $|z| < r$ で正則となることを言えば，補題 C.2 と系 C.4 を合わせて，元の方程式の初期値問題の解も $|z| < r$ で正則なことが分かります．$r < R$ はいくらでも $R$ に近く取れるので，結局解 $w$ は $|z| < R$ で正則となります．

しかし (C.8) は求積法で具体的に解くのは無理そうですね．別にこの方程式にこだわることはなく，(C.8) の右辺を更にその優級数で置き換えてしまっても問題無いので，代わりに

$$W^{(m)} = \frac{M}{1-\frac{z}{r}} \{W^{(m-1)} + W^{(m-2)} + \cdots + W'\} + \Big(\frac{M}{1-\frac{z}{r}} + 1\Big)(W + 1)$$

の解が $|z| < r$ で正則となることを言えばよろしい．こちらは両辺に

$$W^{(m-1)} + W^{(m-2)} + \cdots + W'$$

を加えると，

$$\begin{aligned}
&\{W^{(m-1)} + W^{(m-2)} + \cdots + W' + W\}' \\
&= \Big(\frac{M}{1-\frac{z}{r}} + 1\Big)\{W^{(m-1)} + W^{(m-2)} + \cdots + W'\} + \Big(\frac{M}{1-\frac{z}{r}} + 1\Big)(W + 1) \\
&= \Big(\frac{M}{1-\frac{z}{r}} + 1\Big)(W^{(m-1)} + W^{(m-2)} + \cdots + W' + W + 1)
\end{aligned}$$

となるので，$Y = W^{(m-1)} + W^{(m-2)} + \cdots + W' + W$ の 1 階方程式

$$Y' = \Big(\frac{M}{1-\frac{z}{r}} + 1\Big)(Y + 1)$$

に帰着し，変数分離法で

$$\frac{dY}{Y+1} = \Big(\frac{M}{1-\frac{z}{r}} + 1\Big) dz, \quad \log(Y + 1) = -rM \log\Big(1 - \frac{z}{r}\Big) + z + C,$$

$$\therefore \quad Y = -1 + C' e^z \Big(1 - \frac{z}{r}\Big)^{-rM} \qquad (\text{ここに } C' = e^C)$$

と具体的に解け，確かにこれは $|z| < r$ で正則です．ここで初期条件から

$$\begin{aligned} C' &= Y(0) + 1 = W^{(m-1)}(0) + \cdots + W(0) + 1 = (m-1)!W_{m-1} + \cdots + W_0 + 1 \\ &= (m-1)!|w_{m-1}| + \cdots + |w_0| + 1. \end{aligned}$$

すると，$W$ の方程式として $m-1$ 階の

$$W^{(m-1)} + W^{(m-2)} + \cdots + W' + W = Y$$

という方程式が残りますが，これは非斉次の定数係数線形微分方程式なので，次のような良く知られた解法があります：**特性方程式** $\lambda^{m-1} + \cdots + \lambda + 1 = 0$ の根は $\lambda^m - 1 = 0$ の根の $\lambda = 1$ 以外のもの，すなわち 1 の $m$ 乗根 $\lambda_j := e^{2\pi ij/m}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ を用いると，右辺を 0 とした斉次方程式は $e^{\lambda_j z}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ を 1 次独立な解として持ち，従って一般解はそれらの 1 次結合

$$W = c_1 e^{\lambda_1 z} + \cdots + c_{m-1} e^{\lambda_{m-1} z} \tag{C.9.0}$$

で表されます．右辺を $Y$ にした元の非斉次方程式の解は，ここで定数 $c_j$ を $z$ の関数と思って辻褄を合わせる，いわゆる**定数変化法**を用いて求めます．すなわち，上の $W$ を逐次微分し，その都度出てくる $c_j'$ の項を集めて 0 と置き，最後に $Y$ と置きます：

$$W' = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 z} + \cdots + \lambda_{m-1} c_{m-1} e^{\lambda_{m-1} z} \underbrace{\boxed{+c_1' e^{\lambda_1 z} + \cdots + c_{m-1}' e^{\lambda_{m-1} z}}}_{=0}, \tag{C.9.1}$$

$$W'' = \lambda_1^2 c_1 e^{\lambda_1 z} + \cdots + \lambda_{m-1}^2 c_{m-1} e^{\lambda_{m-1} z} \underbrace{\boxed{+\lambda_1 c_1' e^{\lambda_1 z} + \cdots + \lambda_{m-1} c_{m-1}' e^{\lambda_{m-1} z}}}_{=0}, \tag{C.9.2}$$

$$\ldots,$$

$$W^{(m-2)} = \lambda_1^{m-2} c_1 e^{\lambda_1 z} + \cdots + \lambda_{m-1}^{m-2} c_{m-1} e^{\lambda_{m-1} z} \underbrace{\boxed{+\lambda_1^{m-3} c_1' e^{\lambda_1 z} + \cdots + \lambda_{m-1}^{m-3} c_{m-1}' e^{\lambda_{m-1} z}}}_{=0}, \tag{C.9.m-2}$$

$$W^{(m-1)} = \lambda_1^{m-1} c_1 e^{\lambda_1 z} + \cdots + \lambda_{m-1}^{m-1} c_{m-1} e^{\lambda_{m-1} z} \underbrace{\boxed{+\lambda_1^{m-2} c_1' e^{\lambda_1 z} + \cdots + \lambda_{m-1}^{m-2} c_{m-1}' e^{\lambda_{m-1} z}}}_{=Y}. \tag{C.9.m-1}$$

(C.9.0) ～ (C.9.m-1) を総和すると，これらの右辺の第 1 群は特性方程式のお陰で零になるので，あとは枠囲いの部分で課した条件がすべて満たされるように $c_j'$ を求めればよろしい．これは $c_j'$ の連立 1 次方程式なので，Cramér（クラメル）の公式で求めることができます．今，一般に $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の Vandermonde（ヴァンデルモンド）行列式を記号

$$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \ldots & \lambda_n^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

で表すと，この連立 1 次方程式の係数行列式は

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 z} & e^{\lambda_2 z} & \ldots & e^{\lambda_{m-1} z} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & \ldots & \lambda_{m-1} e^{\lambda_{m-} z} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_1^{m-3} e^{\lambda_1 z} & \lambda_2^{m-3} e^{\lambda_2 z} & \ldots & \lambda_{m-1}^{m-3} e^{\lambda_{m-1} z} \\ \lambda_1^{m-2} e^{\lambda_1 z} & \lambda_2^{m-2} e^{\lambda_2 z} & \ldots & \lambda_{m-1}^{m-2} e^{\lambda_{m-1} z} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 z} e^{\lambda_2 z} \cdots e^{\lambda_{m-1} z} \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})$$

となるので，例えば $c_1'$ は

$$c_1' = \frac{e^{-\lambda_1 z}e^{-\lambda_2 z}\cdots e^{-\lambda_{m-1}z}}{\Delta(\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1})}\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 z} & \dots & e^{\lambda_{m-1}z} \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & \dots & \lambda_{m-1}e^{\lambda_{m-1}z} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{m-3}e^{\lambda_2 z} & \dots & \lambda_{m-1}^{m-3}e^{\lambda_{m-1}z} \\ Y & \lambda_2^{m-2}e^{\lambda_2 z} & \dots & \lambda_{m-1}^{m-2}e^{\lambda_{m-1}z} \end{vmatrix} = (-1)^{m-2}\frac{\Delta(\lambda_2,\dots,\lambda_{m-1})}{\Delta(\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1})}e^{-\lambda_1 z}Y$$

と求まります．$\lambda_1,\dots\lambda_{m-1}$ は互いに異なるので，これらの Vandermonde 行列式は零でない定数ですから，$c_1'$ は $e^{-\lambda_1 z}Y$ と同じ $|z|<r$ で正則な関数となります．よってその原始関数である $c_1$ は本書の系 3.8 によりやはり $|z|<r$ で正則です．同じことはすべての $c_j$ についても言えます．積分定数の任意性がまだ残っていますが，$Y$ の原始関数を $z=0$ からの不定積分とすれば，これは $c_j(0)$ の値を決めるのと同等です．斉次微分方程式の方を用いると，初期値 $W^{(k)}(0)=k!W_k=k!|w_k|=|w^{(k)}(0)|$, $k=0,1,\dots,m-2$ から同じく $m-1$ 元連立 1 次方程式

$$W^{(k)}(0)=\lambda_1^k c_1(0)+\cdots+\lambda_{m-1}^k c_{m-1}(0),\quad k=0,1,\dots,m-2$$

を Cramér の公式で解けば求まります．（今は求まることさえ分かれば良く，解く必要はありません．）以上で補題 6.5 が示されました．

これで一応本書の補遺としてのこの文書の責務は果たしたのですが，せっかくなので最後に一般の非線型な正規形の常微分方程式

$$w^{(m)}=f(z,w,w',\dots,w^{(m-1)}) \tag{C.9}$$

に対しても正則解の局所存在を示しておきましょう．一般には $z=\alpha$ の近傍で初期条件

$$w(\alpha)=\beta_0, w'(\alpha)=\beta_1,\dots,w^{(m-1)}(\alpha)=\beta_{m-1}$$

を満たす解 $w(z)$ を探すのですが，以下では簡単のため $\alpha=\beta_0=\cdots=\beta_{m-1}=0$ とします．これは元の方程式で言うと $z-\alpha$ を $z$, $w-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\beta_k}{k!}(z-\alpha)^k$ を $w$ と思うということになるので，

$$w^{(m)}=f\bigl(z+\alpha, w+\textstyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\beta_k}{k!}(z-\alpha)^k, w'+\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\beta_{k+1}}{k!}(z-\alpha)^k,\dots,w^{(m-1)}+\beta_{m-1}\bigr)$$

という方程式を考え，この右辺を改めて $f(z,w,w',\dots,w_{m-1})$ と記していることになるので，線形方程式の場合と異なり，右辺の関数がもともとは別のものとなります．このように書き直した後の $f(z_0,z_1,\dots,z_m)$ は $\boldsymbol{C}^{m+1}$ の原点の近傍で定義された $m+1$ 変数の正則関数とします．この定義は本書ではやりませんでしたが，ここでは

$$f(z_0,z_1,\dots,z_m)=\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}c_{k_0k_1\dots k_m}z_0^{k_0}z_1^{k_1}\cdots z_m^{k_m}$$

という $m+1$ 変数の収束冪級数に展開できるような関数と理解してください．多変数の冪級数の場合は，収束半径の概念はややこしいのですが，ここでは原点のある近傍で正則な解を探すだけなので，ある $R>0$ について $|z_j|<R$, $j=0,1,\dots,m$ で収束しているものとします[1]．すると，$r<R$ のとき，収束の必要条件から $|z_j|\le r$, $j=0,1,\dots,m$ のとき一般項 $c_{k_0k_1\dots k_m}z_0^{k_0}z_1^{k_1}\cdots z_m^{k_m}$ は 0 に近づかなければならず，従って特にそれは有界となります：$\exists M>0$ s.t.

$$|c_{k_0k_1\dots k_m}||z_0|^{k_0}|z_1|^{k_1}\cdots|z_m|^{k_m}\le M.$$

これより，$|c_{k_0k_1\dots k_m}|\le \dfrac{M}{r^{k_0+k_1+\cdots+k_m}}$ が従うので，

$$\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}M\frac{z_0^{k_0}z_1^{k_1}\cdots z_m^{k_m}}{r^{k_0+k_1+\cdots+k_m}}=M\frac{1}{1-\frac{z_0}{r}}\frac{1}{1-\frac{z_1}{r}}\cdots\frac{1}{1-\frac{z_m}{r}} \tag{C.10}$$

[1] 一般には，収束半径は $j$ 毎に変えられ，それらの組で極大なもの $(R_0,R_1,\dots,R_m)$ を**関連収束半径**と呼びます．これらは連続体を成し，座標毎に大小関係が逆になるのが普通で，必ずしも全体で最大のものが存在するとは限りません．

が $f(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ の優級数として取れます．しかしこれは扱いにくいので，更にこの優級数として

$$M \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} \frac{(k_0 + k_1 + \cdots + k_m)!}{k_0! k_1! \cdots k_m!} \frac{z_0^{k_0} z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m}}{r^{k_0+k_1+\cdots+k_m}} = M \frac{1}{1 - \frac{z_0+z_1+\cdots+z_m}{r}} \tag{C.11}$$

を取ることができます．追加された多項係数 $\frac{(k_0 + k_1 + \cdots + k_m)!}{k_0! k_1! \cdots k_m!}$ は $\geq 1$ であることに注意しましょう．すると，問題は

$$W^{(m)} = M \frac{1}{1 - \frac{z+W+\cdots+W^{(m-1)}}{r}}$$

が原点の近傍で正則な解を持つかですが，これもまだ解くのは難しそうなので，更に右辺に項を加えて

$$W^{(m)} = M \frac{1}{1 - \frac{z+W+\cdots+W^{(m-1)}}{r}} + z + W$$

を考えると，この右辺は更に優級数となっていることが明らかで，かつこれは両辺に $W^{(m-1)} + \cdots + W' + 1$ を加えると，

$$(W^{(m-1)} + \cdots + W' + W + z)' = M \frac{1}{1 - \frac{z+W+\cdots+W^{(m-1)}}{r}} + W^{(m-1)} + \cdots + W' + W + z + 1,$$

従って，$Y = W^{(m-1)} + \cdots + W' + W + z$ と置けば，これは

$$Y' = \frac{M}{1 - \frac{Y}{r}} + Y + 1, \qquad \therefore \quad \frac{Y - r}{(Y+1)(Y-r) - rM} Y' = 1$$

を満たすことが分かります．この方程式は変数分離形で以下のように具体的に求積できます：$W$ の初期条件より $Y(0) = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
z &= \int_0^Y \frac{Y - r}{(Y+1)(Y-r) - rM} dY = \int_0^Y \frac{Y - r}{Y^2 + (1-r)Y - (M+1)r} dY \\
&= \int_0^Y \frac{1}{2} \frac{2Y + 1 - r}{Y^2 + (1-r)Y - (M+1)r} dY - \int_0^Y \frac{r+1}{2} \frac{dY}{Y^2 + (1-r)Y - (M+1)r} \\
&= \frac{1}{2} \log\{(M+1)r - (1-r)Y - Y^2\} - \frac{r+1}{2} \int_0^Y \frac{dY}{\left(Y + \frac{1-r}{2}\right)^2 - \frac{(1-r)^2}{4} - (M+1)r} \\
&= \frac{1}{2} \log\{(1+r)M - (1-r)Y - Y^2\} + \frac{r+1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\sqrt{4(M+1)r + (1-r)^2}} \left(Y + \frac{1-r}{2}\right).
\end{aligned}$$

最後の表現は $Y = 0$ の近傍で正則な関数を定め，かつ $Y(0) = 0$ より $Y'(0) = M + 1 \neq 0$ なので，逆関数の定理 (定理 7.2) により $Y$ が $z$ の関数として $z = 0$ の近傍で解けます．すると $W$ は $W^{(m-1)} + \cdots + W' + W = Y - z$ から，$Y$ と同じところで正則な解として求まります．これは先に行った線形方程式の場合で $Y$ が $Y - z$ に変わっただけです．線形方程式の場合と異なるのは，一般には $Y$ の正則な範囲が $|z| < r$ よりは狭くなり，その大きさは右辺の関数に依存するという点です．ということは，一般の初期値に対しては，解の収束域が初期値にも依存するということで，これが線形の方程式の場合と大きく異なる点です．これを簡単に納得するには 1 階微分方程式 $y' = y^2$ の初期値 $y = c$ のときの解の収束半径を調べるのがよいでしょう．

なお，本文書の冒頭でも述べたように，『微分方程式講義』のサポートページの webchu.pdf には，より一般の 1 階連立微分方程式系に対する収束冪級数解の存在証明が同書の p.139 への として載せられています．単独高階微分方程式は同書の 3.5 節 (p.83) に解説したやり方で 1 階連立系に帰着できるので，実はそちらを参照してもらえば良かったのですが，本書のサポートを自足的にするために単独高階の形で証明を載せました．（そちらを見てもらうと分かりますが，実は 1 階連立系で議論した方が計算はかえって簡明になります.）

最後に例として，第 9 章で出てくる Weierstrass の $\wp$ 関数の微分方程式

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

を考えます．右辺の $4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \neq 0$ となるような $z = \alpha$ において，$w = \wp(\alpha)$ を初期値として，

$$w' = \sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}$$

を解けば，補題 6.5 が適用され，$\exists r > 0$ について $|z - \alpha| < r$ で正則な解が得られます．ただし $\sqrt{\ }$ の分枝は適当に選ぶものとします．この微分方程式は 1 階なので，任意定数を 1 個含みますが，$\wp(z)$ が解であることを既に知っており，かつ $\wp(z - c)$ も同じ微分方程式を満たすことが明らかなので，これが一般解となります．すると $w(\alpha) = \wp(\alpha)$ なる初期値問題の解は当然 $w = \wp(z)$ となり，この収束半径は $\alpha$ から $\wp(z)$ の特異点までの距離ですが，周期性によりそれは $\min\{|\alpha|, |\omega_1 - \alpha|, |\omega_2 - \alpha|, |\omega_1 + \omega_2 - \alpha|\}$ となります．なお，右辺の $4w^3 - g_2 w - g_3 = 0$ となる点が解の特異点になるのではないかと心配な人がいるかもしれませんが，正則関数の特異点は微分で消失することも新たに生じることも無いので，$\wp'(z)$ は $\wp(z)$ と同じところに極を持っているだけで，従って $\wp'(z) = 0$ となる $z$ では $\wp'(z)$, 従って $\wp(z)$ は極ではないので正則です．ただし $4\wp(\alpha)^3 - g_2\wp(\alpha) - g_3 = 0$ となるような $z = \alpha$ においては補題 6.5 の解法は適用できません．微分方程式的には，これは $w' = \sqrt{w}$ の解 $w = \frac{1}{4}(z - c)^2$ が $z = c$ で正則なのと同様です．$w' = \sqrt{w^3}$ の方は

$$\frac{dw}{\sqrt{w^3}} = dz, \qquad -\frac{2}{\sqrt{w}} = z - c, \qquad w = \frac{4}{(z - c)^2}$$

となって，$z = c$ で極を持ちますが，こちらは $z = c$ で $w = 0$ を初期値とする解はこの一般解には含まれない，いわゆる**特異解** $w = 0$ となっています．$y = 4x^3 - g_2 x - g_3$ が楕円曲線を定めるときは，$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$ は重根を持たない（持つと有理曲線に退化してしまう）ので，$\wp$ の微分方程式の場合は，この例で後者ではなく前者の状況になっているのです．