

「付録 計算機を用いた函数論演習」の実行結果

【課題 1 : 微分計算】

```
(%i1) f(x,y):=log(sqrt(x^2+y^2))+%i*atan(y/x);
(%o1)          f(x, y) := log(sqrt(x2 + y2)) + %i atan(y/x)
(%i2) diff(f(x,y),x)+%i*diff(f(x,y),y);
(%o2)          %i (----- + -----) - ----- + -----
                2          2 2          2          2 2
                x (--- + 1)  y + x      x (--- + 1)  y + x
                2          2          2          2
                x          x          x          x
(%i3) ratsimp(%o2);
(%o3)          0
(%i4) ratsimp(diff(f(x,y),x));
(%o4)          - %i y - x/2 2
                y + x
```

演習 1.1

```
(%i1) cr(f):=diff(f,x)+%i*diff(f,y);
(%o1)          cr(f) := diff(f, x) + %i diff(f, y)
(%i2) f(x,y):=x^2-y^2+2*x*y%i;
(%o2)          f(x, y) := x2 - y2 + 2 x y %i
(%i3) cr(f(x,y));
(%o3)          2 %i y + %i (2 %i x - 2 y) + 2 x
(%i4) ratsimp(%o3);
(%o4)          0
(%i5) g(x,y):=x^2-y^2-2*x*y%i;
(%o5)          g(x, y) := x2 - y2 + (- 2) x y %i
(%i6) cr(g(x,y));
(%o6)          (- 2 %i y) + %i ((- 2 y) - 2 %i x) + 2 x
(%i7) ratsimp(%o6);
(%o7)          4 x - 4 %i y
(%i8) h(x,y):=%e^(x^2-y^2)*(cos(2*x*y)+%i*sin(2*x*y));
(%o8)          h(x, y) := %ex2 - y2 (cos(2 x y) + %i sin(2 x y))
(%i9) cr(h(x,y));
(%o9)          %i (%ex2 - y2 (2 %i x cos(2 x y) - 2 x sin(2 x y))
- 2 y %ex2 - y2 (%i sin(2 x y) + cos(2 x y)))
+ %ex2 - y2 (2 %i y cos(2 x y) - 2 y sin(2 x y))
+ 2 x %ex2 - y2 (%i sin(2 x y) + cos(2 x y))
(%i10) ratsimp(%o9);
(%o10)          0
```

演習 1.2

```
(%i1) f(x,y):=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2-2*x*y%i/(x^2+y^2)^2;
(%o1)          f(x, y) := x2 - y2/(x2 + y2)2 - 2 x y %i/(x2 + y2)2
```

```
(%i2) diff(f(x,y),x)+%i*diff(f(x,y),y);
(%o2) %i ((-  $\frac{2y}{(y+x)^2}$ ) -  $\frac{2ix}{(y+x)^2}$  +  $\frac{8ixy}{(y+x)^3}$  -  $\frac{4y(x-y)^2}{(y+x)^3}$ )
-  $\frac{2iy}{(y+x)^2}$  +  $\frac{2x}{(y+x)^2}$  -  $\frac{4x(x-y)^2}{(y+x)^3}$  +  $\frac{8ix^2y}{(y+x)^3}$ )
(%i3) ratsimp(%o13);
(%o3) 0
```

以上の結果から分かるように、maxima は原点以外で形式的に計算するだけで、原点については何も教えてはくれないので、特異点を持つ関数に対して使う場合には注意が必要です。

演習 1.3

gradef の使い方は微妙なので、分かりやすい例でまず動作をチェックしてみます。

```
(%i1) gradef(h(u,v),h_u(u,v),h_v(u,v)); /* h(u,v) の grad の定義を与える */
(%o1) h(u, v) /* 第一成分が戻り値となる */
(%i2) diff(h(x,y),x);
(%o2) h_u(x, y)
(%i3) diff(h(x,y),y);
(%o3) h_v(x, y)
(%i4) diff(h(p(x,y),x),x);
(%o4) h_u(p(x, y), x)  $\frac{d}{dx}$  (p(x, y)) + h_v(p(x, y), x)
(%i5) diff(h(p(x,y),x^3),x);
(%o5) 3 x^2 h_v(p(x, y), x) +  $\frac{d}{dx}$  (p(x, y)) h_u(p(x, y), x^3)
```

では本番をやってみます。以下に用いる divide(f,g,w) は w を独立変数として f を g で割ったときの商と余りを 2 成分の配列として返す関数で、余りの方を取り出せば f mod g の計算となります。これを用いて零になるはずの式で mod を取っています。

```
(%i1) gradef(g(u,v),g_u(u,v),g_v(u,v));
(%o1) g(u, v)
(%i2) gradef(u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))$
(%i3) gradef(v(x,y),v_x(x,y),v_y(x,y))$
(%i4) f(x,y):=g(u(x,y),v(x,y));
(%o4) f(x, y) := g(u(x, y), v(x, y))
(%i5) D:=diff(f(x,y),x)+%i*diff(f(x,y),y);
(%o5) %i (v_y(x, y) g_v(u(x, y), v(x, y)) + u_y(x, y) g_u(u(x, y), v(x, y)))
+ v_x(x, y) g_v(u(x, y), v(x, y)) + u_x(x, y) g_u(u(x, y), v(x, y)))
(%i6) E:=divide(D,g_u(u(x,y),v(x,y))+%i*g_v(u(x,y),v(x,y)),g_u(u(x,y),v(x,y)));
(%o6) [%i u_y(x, y) + u_x(x, y), (%i (v_y(x, y) - u_x(x, y)) + v_x(x, y)
+ u_y(x, y)) g_v(u(x, y), v(x, y))]
(%i7) F:=divide(E[2],u_x(x,y)+%i*v_x(x,y)+%i*(u_y(x,y)+%i*v_y(x,y)),u_x(x,y));
(%o7) [- %i g_v(u(x, y), v(x, y)), 0]
```

最後の 3 個の出力から、 $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$ に Cauchy-Riemann 作用素を施した結果が

$$\{g_u(u(x, y), v(x, y)) + ig_v(u(x, y), v(x, y))\} \{u_x(x, y) + iv_y(x, y)\} - i\{u_x(x, y) + iv_x(x, y) + i(u_y(x, y) + iv_y(x, y))\}g_v(u(x, y), v(x, y))$$

となっていることが分かるので、もし $g(u, v)$ が Cauchy-Riemann 方程式を満たせば $g_u(u(x, y), v(x, y)) + ig_v(u(x, y), v(x, y)) = 0$ 、また $u(x, y) + iv(x, y)$ が Cauchy-Riemann 方程式を満たせば $u_x(x, y) + iv_x(x, y) + i(v_y(x, y) + iv_y(x, y)) = 0$ となることから、上は 0 となることが分かりました。これで証明完了です。もちろん maxima は関数がどこで定義されているかなどは気にしておらず、この形式的な計算が通用する範囲で証明をしているだけです。

【課題 2 : 複素線積分の計算】

```
(%i1) integrate(%i*exp(%i*t)/(cos(t)+%i*sin(t))^n,t,0,2*%pi);
(%o1) %i (-----)
          n - 1          n - 1
          sin(2 %pi n) + %i cos(2 %pi n) %i
(%i2) integrate(%i*exp(%i*t)/(cos(t)+%i*sin(t)),t,0,2*%pi);
(%o2) 2 %i %pi
```

【課題 3 : 代数方程式の根の探求】

```
(%i1) f(z):=z^3-z+5;
(%o1) f(z) := z^3 - z + 5
(%i2) df(z):=''(diff(f(z),z));
(%o2) df(z) := 3 z^2 - 1
(%i3) pi:3.14; N:20;
(%o3) 3.14
(%o4) 20
(%i5) s1:0; t:-pi/2;
(%o5) 0
(%o6) - 1.57
(%i7) dt:pi/N; /* 積分変数の増分 */
(%o7) 0.157
(%i8) z1:float(2*cos(t)+2*i*sin(t));
(%o8) 0.001592653421466526 - 1.999999365863669 %i
(%i9) for j: 1 thru N /* 半円弧上の近似和のループ */
(%i9) do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),t:t+dt,
(%i9) z2:float(2*cos(t)+2*i*sin(t)), s1:s1+w*(z2-z1), z1:z2);
(%o9) done
(%i10) s2:0;
(%o10) 0
(%i11) z1:2*i;
(%o11) 2 %i
(%i12) dz:4.0*i/N;
(%o12) 0.2 %i
(%i13) for j: 1 thru N
(%i13) do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1-dz,
(%i13) s1:s1+w*(z2-z1), z1:z2);
(%o13) done
(%i14) s:rectform((s1+s2)/2/pi/%i);
(%o14) 0.1881262267528244 %i + 1.990597209834584
```

最後の出力の実部を丸めて、この半円内には根が2個と推定されます。以後の推論は本書に書いた通りです。なお、上で pi:3.14159265359 に、N:1000 に変えると、最後の出力が

$$3.770102822493309E-4 \text{ %i} + 1.999999958599716$$

となり、2であることが確信できます。maxima でもこの程度の計算は1秒もかかりません。

演習 3.1

(2) $z^4 + 2z^2 + 2 = (z^2 + 1)^2 + 1 = 0$ は $z^2 = -1 \pm i$, 従って $z = \pm\sqrt{-1 \pm i} = \pm\sqrt{2}e^{3\pi/8}, \pm\sqrt{2}e^{5\pi/8}$ を根に持つことが直ちに分かりませんが、自分で書いたプログラムのチェックにはこうした例も必要です。虚軸上 $z = yi$ では $y^4 - 2y^2 + 2 \geq 1$ で根は無く、また

$$|z^4 + 2z^2 + 2| = |z|^4 \left| 1 + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^4} \right| \geq |z|^4 \left(1 - \frac{2}{|z|^2} - \frac{2}{|z|^4} \right)$$

なので、 $|z| \geq 2$ では零にならないので、(1)と同じ積分路について偏角の原理を適用できます。今回は明らかな出力を抑制して

```
(%i1) f(z):=z^4+2*z^2+2$
(%i2) df(z):=''(diff(f(z),z));
(%o2) df(z) := 4 z^3 + 4 z
(%i3) pi:3.14$ N:20$
```

```
(%i5) s1:0$ t:-pi/2$
(%i7) dt:pi/N$ /* 積分変数の増分 */
(%i8) z1:float(2*cos(t)+2*i*sin(t))$
(%i9) for j: 1 thru N /* 半円弧上の近似和のループ */
(%i9) do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),t:t+dt,
(%i9) z2:float(2*cos(t)+2*i*sin(t)),s1:rectform(s1+w*(z2-z1)),z1:z2)$
(%i10) s1;
(%o10) 12.50718428101775 %i - 0.983755496799261
(%i11) s2:0$
(%i12) z1:2*i$
(%i13) dz:4.0*i/N$
(%i14) for j: 1 thru N
(%i14) do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1-dz,
(%i14) s2:rectform(s2+w*(z2-z1)), z1:z2)$
(%i15) s2;
(%o15) - 1.387778780781445E-15
(%i16) s:rectform((s1+s2)/2/pi/%i);
(%o16) 0.1660623232912977 %i + 2.111096525177966
```

この結果から答を 2 個とするのに躊躇を覚える人は, $\pi:3.14159265359$ に, $N:1000$ に変更して同じ計算をやり直してみるとよい. その結果は

$$0.02334710964662759 \%i + 1.999918689343157$$

となり, 少し確信が増すでしょう. なお, 最初に述べたように具体的に解がなくても, この例では多項式の対称性から虚軸上の積分が零になることや, また根の分布が左右対称になることも分かります. 後者の知見から, 何も計算しなくても上の結果は 2 に決まります. 根の分布は上下対称なので, これから更に根が各象限に 1 個ずつ存在することも分かります.

(3) まず

$$|z^5 - z + 2| = |z|^5 \left| 1 - \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^5} \right| \geq |z|^5 \left(1 - \frac{1}{|z|^4} - \frac{2}{|z|^5} \right)$$

より $|z| \geq 2$ では明らかに零になりません. 次に, 実軸上の根を調べると, $x \geq 1$ では明らかに $x^5 - x + 2 = x(x^4 - 1) + 2 \geq 2 > 0$ であり, また $0 \leq x < 1$ でも $x^5 - x + 2 = x^5 + (2 - x) > 0$ です. $x < 0$ には符号変化により実根が 1 個以上有ります. 虚軸上では $z^5 - z + 2 = iy^5 - iy + 2$ なので零にはなりません. 同じようなプログラムを繰り返すのも何なので, ここで第一象限の 4 半円周に対する周回積分のサブルーチンを定義してみましょう.

```
(%i1) lineintegralC1(f,df,R,N):= /* 線分 [0,R] に沿う線積分 */
block (s:0, z1:0, dz:R/N,
for j: 1 thru N
do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1+dz,
s:rectform(s+w*dz), z1:z2),
return(s))$
(%i2) lineintegralC2(f,df,R,N,pi):= /* 4 半円周 Re^{it}, 0<t<pi/2 に沿う線積分 */
block(s:0, t:0, dt:pi/4,
for j: 1 thru N
do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),t:t+dt,
z2:float(R*cos(t)+R*i*sin(t)),s:rectform(s+w*(z2-z1)),z1:z2),
return(s))$
(%i3) lineintegralC3(f,df,R,N):= /* 線分 [0,Ri] に沿う逆向き線積分 */
block (s:0, z1:%i*R, dz:-z1/N,
for j: 1 thru N
do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1+dz,
s:rectform(s+w*(z2-z1)), z1:z2),
return(s))$
(%i4) f(z):=z^5-z+2;
(%i5) df(z):='(diff(f(z),z));
(%i6) R:2.0; N:100; pi:3.1416$
(%i9) s1:lineintegralC1(f,df,R,N);
(%o9) 2.742873064327026
(%i10) s2:lineintegralC2(f,df,R,N,pi);
(%o10) 7.784281685141358 %i - 0.1206875831745896
(%i11) s3:lineintegralC3(f,df,R,N);
(%o11) (- 1.510957204573667 %i) - 2.736424883376285
(%i12) s:rectform((s1+s2+s3)/2/pi/%i);
(%o12) 0.01818172304301134 %i + 0.9984282659421458
```

(これらの関数定義を打ち込むのがめんどろな人は、サポートページの ex3.2-1.m に同じものが含まれているのでそこからコピペすれば良い。) これから根が第 1 象限に 1 個と推測される。対称性により第 4 象限にも 1 個有り、従って残りは 3 個である。故に実根が負の実軸上に 1 個で、第 2,3 象限に共役複素根が一つずつかあるいは 3 実根が負の実軸上に有るかのいずれかであるが、 $x^5 - x + 2$ の符号変化を負の実軸上で調べると、根は $-2 < x < 0$ にしか無いので、導関数 $5x^4 - 1$ の符号を見ると、 $f(x)$ は $x < -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ で単調増加、 $-\frac{1}{\sqrt[4]{5}} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ で単調減少、 $x > \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ で単調増加で、かつ $f(0) = 2 > 0$ なので、負の実軸とは一度しか交わらないことが分かり、後者が否定される。

こんな高校生みたいな推論をしたくない人は、半径 2 の 4 半円の第 2 象限の部分から実軸の近傍を除いた閉路を考え、そこで周回積分を計算してみて根が 1 個捕捉できるかどうか試してみればよい。ここではプログラミングがより簡単な長方形でやってみると、見やすくするため、入力するコマンドのみを記せば、

```
lineintegralR(f,df,x1,y1,x2,y2,N):= /* 長方形 (x1,y1)-(x2,y2) の周に沿う線積分 */
block (s:0, z1:x1+%i*y1, dz:(x2-x1)/N,
for j: 1 thru N
do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1+dz,
s:rectform(s+w*dz), z1:z2),
dz:(y2-y1)*%i/N,
for j: 1 thru N
do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1+dz,
s:rectform(s+w*dz), z1:z2),
dz:(x1-x2)/N,
for j: 1 thru N
do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1+dz,
s:rectform(s+w*dz), z1:z2),
dz:(y1-y2)*%i/N,
for j: 1 thru N
do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1+dz,
s:rectform(s+w*dz), z1:z2),
return(s));
f(z):=z^5-z+2;
df(z):=''(diff(f(z),z));
N:100$
s:lineintegralR(f,df,-2.0,0.1,0.0,2.0,N);
pi:3.1416$
rectform(s/2/pi/%i));
```

これで

```
0.01132632865072206 %i + 0.998536690258569
```

が出力されます。念の為に

```
sb:lineintegralR(f,df,-2.0,-0.1,0.0,2.0,N);
rectform(sb/2/pi/%i));
```

もやってみると、

```
0.01272036292779985 %i + 1.998792664084397
```

となり、確かに負の実軸上に根が一つあることも確認できます。

このプログラムは使いまわせるので ex3.1-3rect.m としてサポートページに載せておきます。

(4) まず

$$|z^6 + z^5 - 1| = |z|^6 \left| 1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^5} \right| \geq |z|^6 \left(1 - \frac{1}{|z|} - \frac{1}{|z|^5} \right)$$

であるから、 $|z| \geq 2$ では零にならない。また実軸上では $x \geq 0$ で $f(x) = x^6 + x^5 - 1$ は単調増加なので、 $f(0) < 0$ よりここでただ一つの実根を持つ。虚軸上では、 $f(iy) = -y^6 + iy^5 - 1$ で $\operatorname{Re} f(iy) < 0$ なので根を持たない。そこで (1) と同じ周回積分路で線積分を計算してみる (それには henkakugenri.m の関数 f の定

義を変えるだけでよい)。ただし次数が高いので $N:100$, $\pi:3.1416$ とした。結果は

```
0.06127584397043841 %i + 2.999561615405931
```

となり、右半平面に根が 3 個あることが分かる。よって複素根が第 1, 4 象限に各 1 個有る。よって最初に調べた情報から、左半平面にも複素共役根が存在し、結局第 2, 3 象限に各 1 個の根があり、負の実軸上の一つと合わせて 5 個となる。

演習 3.2

以下いずれも積分路を $C_1 := \{x; 0 \leq x \leq R\}$, $C_2 := \{z = Re^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, $C_3 := \{yi; 0 \leq y \leq R\}$ として計算する。これに関する偏角原理の計算プログラムは、演習 3.1 (3) で示してあるので、それを用いることにする。すなわち、 $C_1: [0, R]$ 上の線積分を計算する関数 `lineintegralC1`, $C_2: Re^{it}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 上の線積分を計算する関数 `lineintegralC2`, $C_3: [0, R]i$ 上の線積分を逆向きに計算する関数 `lineintegralC3` を用いてこの 4 半円周上の周回積分を計算する関数を次のように作り利用する。

```
lineintegralS1(f,df,R,N,pi):=
  block(s1=lineintegralC1(f,df,R,N),
    s2=lineintegralC2(f,df,R,N,pi),
    s3=lineintegralC3(f,df,R,N),
    s=rectform((s1+s2+s3)/2/pi/%i),
    return(s));
\begin{verbatim}
```

(1) これは実質的に本書中の課題 3 とその続き検討済みであるが、4 半円周での周回積分はやっていないので、上の関数を用いてそれだけ計算すると

```
{\small\baselineskip 12pt
```

```
\begin{verbatim}
```

```
(%i5) f(z):=z^5-z+2$
```

```
(%i6) df(z):=''(diff(f(z),z))$
```

```
(%i7) R:2.0$
```

```
(%i8) N:1000$
```

```
(%i9) pi:3.1416$
```

```
(%i10) lineintegralS1(f,df,R,N,pi);
```

```
(%o10) 0.001132904562460609 %i + 1.000041323311565
```

なおこれと上記関数を一緒に書いたファイルが `ex3.2-1.m` としてサポートページで提供されています。

(2) この多項式は課題 3 の (2) とは異なるものなので、一応積分路 C_1, C_2, C_3 が根に引っかからないことを見ておこう。まず C_1 : 実軸上では、 $0 \leq x < \frac{5}{4}$ では

$$x^5 - 2x^2 - 2x + 5 \geq 5 - 2x - 2x^2 \geq 5 - 4x > 0.$$

$\frac{5}{4} \leq x < \frac{3}{2}$ では、

$$x^5 - 2x^2 - 2x + 5 = x(x^4 - 2) + (5 - 2x^2) > x\left(\frac{5^4}{4^4} - 2\right) + \left(5 - 2\frac{9}{4}\right) = x\frac{625 - 512}{256} + \frac{10 - 9}{2} > 0.$$

最後に $x > \frac{3}{2}$ では

$$x^5 - 2x^2 - 2x + 5 > x(x^4 - 2x - 2) = x\left(x^4 - \frac{10}{3}x\right) + \frac{4}{3}x\left(x - \frac{3}{2}\right) > x^2\left(\frac{27}{8} - \frac{10}{3}\right) = x^2\frac{81 - 80}{24} > 0.$$

よって R が何で有っても C_1 上には根は無い。次に C_2 では、 $R \geq 2$ なら

$$|z^5 - 2z^2 - 2z + 5| = |z|^5 \left|1 - \frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \frac{5}{z^5}\right| \geq |z|^5 \left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{5}{2^5}\right) > |z|^5 \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) > 0.$$

最後に C_3 では $z = iy$ として

$$z^5 - 2z^2 - 2z + 5 = (y^5 - 2y)i + 2y^2 + 5$$

で、実部が常に正なので、零にならない。そこで、上で用いた関数を利用すると、

```
(%i5) f(z):=z**5-2*z**2-2*z+5$
(%i6) df(z):='(diff(f(z),z))$
(%i7) R:2.0$
(%i8) N:1000$
(%i9) pi:3.1416$
(%i10) lineintegralS1(f,df,R,N,pi);
(%o10) 0.00161274211353063 %i + 0.9999310020520589
```

よって第一象限には1個の根が存在する。

(3) は演習 3.1 (3) で既に理論的検討も周回積分の計算も済んでいる。

(4) 上と同じ関数を $f(z) := z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 8z + 7$ として実行すると, $R=6, \pi=3.1416, N=1000$ として
 $0.0021856899789671 \%i + 1.999664772836063$

となり, 2個と推定される. この計算が妥当なためには, $R=6$ という選択で $|z| \geq R$, 及びこれに対する座標軸上の積分路 $C1, C3$ 上に根が無いことを示す必要があるが, まず $|z| \geq 6$ では,

$$\begin{aligned} |z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 8z + 7| &= |z|^4 \left| 1 - \frac{4}{z} + \frac{8}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \frac{7}{z^4} \right| \geq |z|^4 \left(1 - \frac{4}{|z|} - \frac{8}{|z|^2} - \frac{8}{|z|^3} - \frac{7}{|z|^4} \right) \\ &\geq |z|^4 \left(1 - \frac{4}{6} - \frac{8}{36} - \frac{8}{216} - \frac{7}{1296} \right) > |z|^4 \left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{1}{27} - \frac{8}{1296} \right) \\ &= |z|^4 \left(1 - \frac{25}{27} - \frac{1}{162} \right) = |z|^4 \left(\frac{2}{27} - \frac{1}{162} \right) > 0. \end{aligned}$$

なので $R=6$ を用いれば確かに十分であることが分かった。(実は $R=3$ で大丈夫なのだが, 計算機にやらせる場合は少々無駄が有っても計算速度と結果の精密さにはほとんど影響が無い。)

次に実軸上 $x \geq 0$ では, $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 7$ は $f(0) = 7 > 0$, かつ $f(+\infty) > 0$ なので, 最小値が正なことを見れば十分である。偶には微分も使うと,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16x - 8 = 4(x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 4\{(x-1)^3 + (x-1)\} = 4(x-1)\{(x-1)^2 + 1\}$$

となるので, $x=1$ で最小と分かり, $f(1) = 4 > 0$. よって $C1$ 上には根は無い. 最後に $C3$ 上では

$$f(iy) = y^4 + 4y^3i - 8y^2 - 8yi + 7 = y^4 - 8y^2 + 7 + 4iy(y^2 - 2)$$

なので, 実部が零となるのは $y = \pm 1$ のみで, そのとき虚部は零でないから $C3$ 上にも根はない。

【課題 4 : Newton 法による根の近似値計算】

```
(%i1) f(z):=z^3-z+5;
(%o1) f(z) := z^3 - z + 5
(%i2) df(z):='(diff(f(z),z));
(%o2) df(z) := 3 z^2 - 1
(%i3) eps:1.0e-15;
(%o3) 1.0E-15
(%i4) z:1.0+1.0*i;
(%o4) 1.0 %i + 1.0
(%i5) do (w:rectform(f(z)/df(z)),z:rectform(z-w), /* 無限ループ */
(%i5) if float(cabs(w))<eps then return(z)); /* 脱出判定 */
(%o5) 1.311248044077122 %i + 0.9520804295674603
```

このプログラムは newton.m としてサポートページに載せてあります。

演習 4.1

他の根を求めるために, 上の計算を関数定義して使います. Newton 法の初期値としては $|z| = R$ 上から適当に選び, 根が多項式の次数だけ見つかるまで続けます. R が十分大きければ, n 次方程式なら n 等分点を初期値に取れば大抵すべて求まります. ただし, 重根がある場合は次数より少ないものしか求まりません. この対策は下記の注 2 を見てください.

```

newton(f,df,z,eps):=
  block (do (w:rectform(f(z)/df(z)),z:rectform(z-w),
    if float(cabs(w))<eps then return(z)));
f(z):z^3-z+5
df(_z):=''(diff(f(_z),_z))$ /* zだとdfを使うとき定数zで微分できなくなるので */
n:3
R:2.0$
pi:3.14$
eps:1.0e-15$
for k:1 thru n
  do (z: R*(cos(2*pi/n*k-pi/n)+%i*sin(2*pi/n*k-pi/n)),
    s:newton(f,df,z,eps), print(s))$

```

最後の出力結果だけ記せば、(整形せず、計算機の出力そのまま)

```

1.311248044077122 %i + 0.9520804295674603
- 1.90416085913492
0.9520804295674603 - 1.311248044077122 %i

```

従ってこの最後の2個が求めるものでした。ちなみに、この方程式を Cardano の公式で解いてみると、 $q = -1$, $r = 5$ で

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{671}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{671}{108}}} \\
& = \sqrt[3]{-2.5 + 2.492581586019395} + \sqrt[3]{-2.512.492581586019395} \\
& = -\sqrt[3]{0.007418413980604388} - \sqrt[3]{4.992581586019396} = -0.1950310183451586 - 1.709129840789757 \\
& = -1.904160859134916, \\
& \omega \sqrt[3]{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{27}}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{27}}} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{671}{108}}} + \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{671}{108}}} \\
& = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{671}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{671}{108}}} \right) + \frac{1}{2} 1.732050807568877 \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{671}{108}}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{671}{108}}} \right) \right) \\
& = \frac{0.1950310183451586 + 1.709129840789757}{2} + \frac{1.732050807568877}{2} (1.709129840789757 - 0.1950310183451586) \\
& = \frac{1}{2} \times 1.904160859134916 + 0.8660254037844385 \times 1.514098822444598 \\
& = 0.952080429567458 + 1.311248044077125i
\end{aligned}$$

計算は maxima を電卓代わりに使ってやったので、最後の桁は Newton 法の結果と合っていないが、ほぼ同じである。eps の値をより小さくすれば Newton 法の出力が最後まで信用できるようになると思われるかもしれないが、問題によっては eps=1.0e-16 とすると for ループが振動して停止しなくなる場合が生ずる。この辺りが純粋数学との違いである。なお、もっと大きな桁数の近似値を求めたければ、多倍長演算というものを使えばよい。(後述の注3参照)

演習 4.2 (2) 上記プログラムを f(z) の定義だけ変えて実行すると、最終出力は

```

1.098684113467809 %i + 0.4550898605622273
1.098684113467809 %i - 0.4550898605622273
(- 1.098684113467809 %i) - 0.4550898605622273
0.4550898605622274 - 1.09868411346781 %i

```

で、これは理論値の $\pm\sqrt{-1 \pm i} = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{8}-2}}{2} + \pm\frac{\sqrt{\sqrt{8}+2}}{2}i$ を良く近似している。

(3) 同様に、f(z) の定義と R, n の値を適切に変更して実行すると、

```



0.5341485461747326 %i + 0.8945480326575175
1.177226153394194 %i - 0.2609638803864552
(- 2.350988701644575E-38 %i) - 1.267168304542124
(- 1.177226153394194 %i) - 0.2609638803864553
0.8945480326575175 - 0.5341485461747326 %i

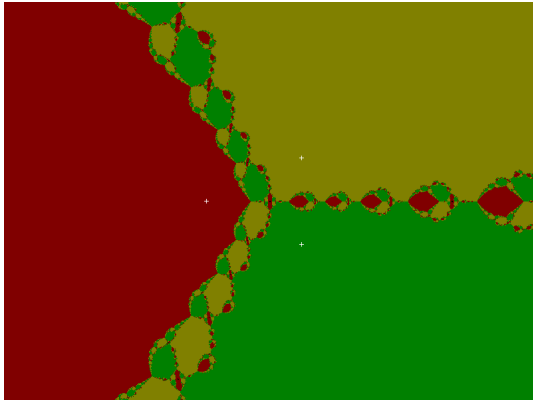
```


3 番目は実根である.

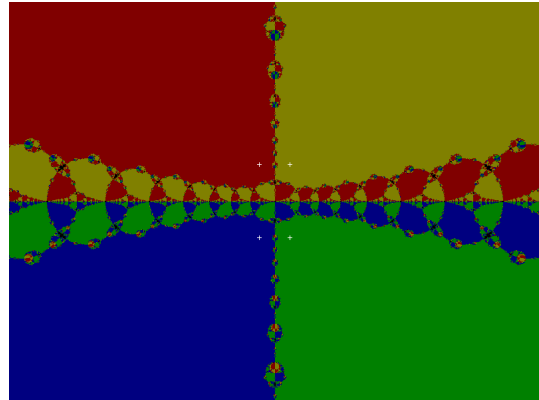
(4) 同様に,

```
0.8296446029891386 %i + 0.3733327060808887
0.7848511587200251 %i - 0.671368920274999
2.204051907791789E-39 %i - 1.285199033245349
(- 0.784851158720025 %i) - 0.6713689202749987
0.3733327060808887 - 0.8296446029891386 %i
0.8812714616335696 - 1.88079096131566E-37 %i
```

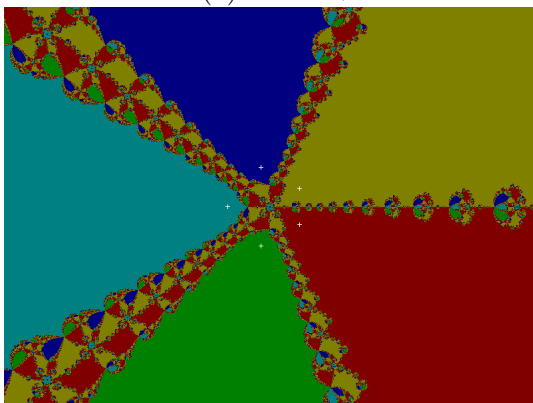
【注1：教科書 p.232 の二つ目の 】 ここで本書では課題 5 の中に書いておいた  の内容である，複素平面の各点から出発した Newton 法がどの根に収束するかで平面を色分けした図を示しておきます．使用したプログラムは C++ 言語で書かれ，[5], 第 9 章 で紹介した自作のグラフィックライブラリを用いています．まず，課題 3 の多項式については，



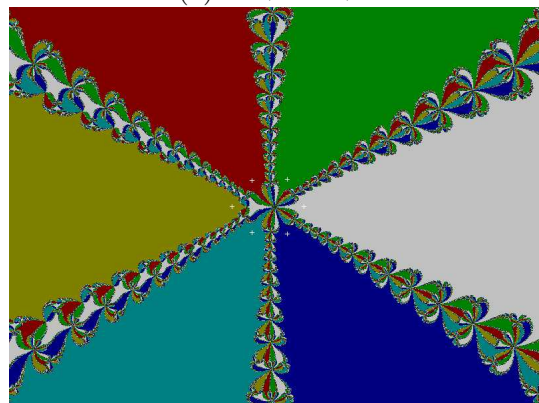
(1) $z^3 - z + 5$



(2) $z^4 + 2z^2 + 2$

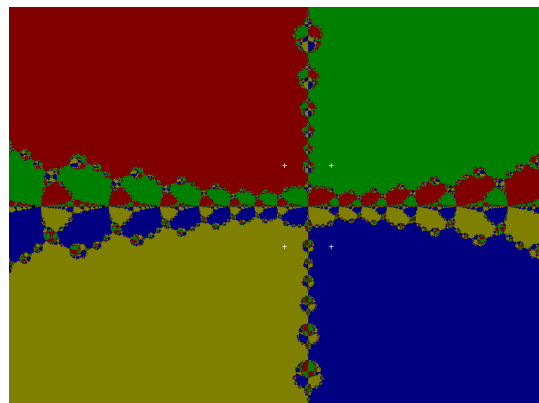
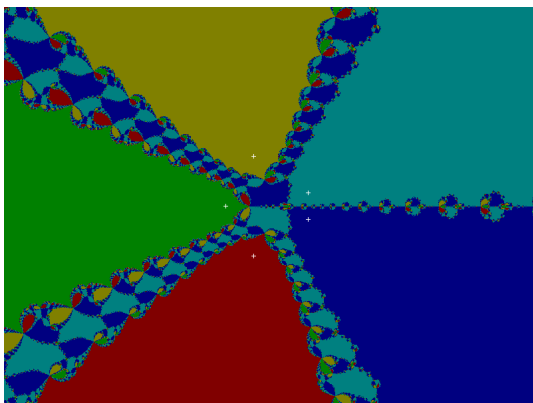


(3) $z^5 - z + 2$



(4) $z^6 + z^5 - 1$

次に，問 6.2-1 の多項式については，(1), (3) は課題 3 の (1), (3) とそれぞれ全く同じなので省略し，残りの (2), (4) のみ下に示します．これらについては，Newton 法が見つけた近似根も示しておきます．



問 6.2-1(2) $z^5 - 2z^2 - 2z + 5$
 $-0.4881947454262022 \pm 1.509787772263738i,$
 $-1.327917741529004,$
 $1.152153616190704 \pm 0.4098971964038234i$

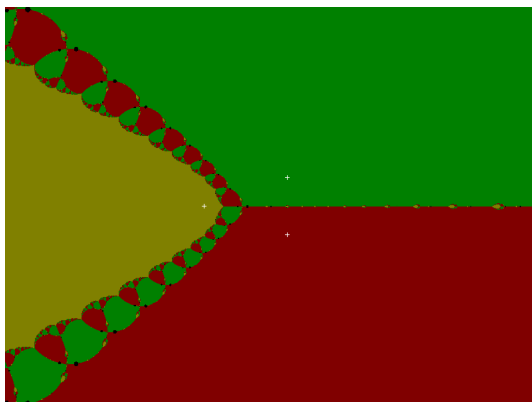
問 6.2-1(4) $z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 8z + 7$
 $0.2928932188134525 \pm 1.224744871391589i,$
 $1.707106781186547 \pm 1.224744871391589i$

【注2：重根が有る場合の取り扱い】 重根はもとの多項式とその導関数との最大公約式を求めてみると分かります。maximaには二つの多項式の最大公約式を求める関数 gcd が有るので、それには gcd(f,df) を出力させてみるだけで済みます。実は重根が有ると多項式は因数分解されるので、maxima を使うのであれば直接 factor(f(z)) をやるだけでも分かります。ここでは、例として、予めそういう知識が無い状態で課題3の演習3.2の周回積分や、課題4の演習4.2のような計算、更には上の注1のようなことをやってみましょう。

補充問題 1 次の多項式について根の分布を調べよ。

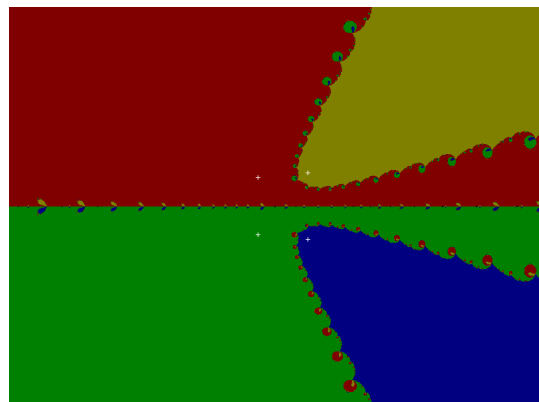
(1) $z^5 - z^3 + 4z^2 - 3z + 2$ (2) $z^6 + z^4 + 3z^2 + 2z + 2$

解答 様子を調べるため、まずは注1のプログラムを適用してみると良い。



(1)

$0.50000000 \pm 0.86602540i$ (重根),
 -2.00000000



(2)

$-0.50000000 \pm 0.86602540i$ (重根),
 $1.00000000 \pm 1.00000000i$

そこで、演習 3.1 (3) と演習 3.2 で作ったプログラムを適用してみると、(1) では

```
f(z):=z^5-z^3+4*z^2-3*z+2$
df(_z):=''(diff(f(_z),_z))$
R:2$
N:100$
pi:3.1416$
lineintegralS1(f,df,R,N,pi);
0.02140688130618278 %i + 1.998001466611986
```

これから根は第一象限と大四象限に二つずつ共役存在することが分かる。残りの一つは実根で、それは正の側では無いことが、 $x \geq 1$ で $x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \geq x^2 + 2 > 2$, また、 $0 \leq x < 1$ で $x^5 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = -x^c \cdot x^2(1 - x^2) + (4x^2 - 3x + \frac{9}{8}) + \frac{7}{8} \geq -\frac{x}{4} > -\frac{1}{4} + \frac{7}{8} > 0$ から分かるので、最後の一つは負実根である。

同様に (2) では、第一象限で

```
f(z):=z^6+z^4+3*z^2+2*z+2$
df(_z):=''(diff(f(_z),_z))$
R:2$
N:100$
pi:3.1416$
lineintegralS1(f,df,R,N,pi);
0.0182441498836522 %i + 0.9993073895339958
```

で根が1個なので、このプログラムを改変して第二象限用にし、実行すると、

```
lineintegralC3(f,df,R,N):= /* 線分 [0,Ri] に沿う線積分 */
block (s:0, z1:0, dz:R%i/N,
```

```

for j: 1 thru N
  do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1+dz,
      s:rectform(s+w*dz), z1:z2),
  return(s));
lineintegralC4(f,df,R,N,pi):= /* 4 半円周  $Re^{it}$ ,  $\pi/2 < t < \pi$  に沿う線積分 */
block(s:0, t:pi/2, dt:pi/2/N, z1:float(R*cos(t)+R%i*sin(t)),
  for j: 1 thru N
    do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),t:t+dt,
        z2:float(R*cos(t)+R%i*sin(t)),s:rectform(s+w*(z2-z1)),z1:z2),
    return(s));
lineintegralC5(f,df,R,N):= /* 線分  $[-R,0]$  に沿う線積分 */
block (s:0, z1:-R, dz:R/N,
  for j: 1 thru N
    do (w:rectform(df(z1)/f(z1)),z2:z1+dz,
        s:rectform(s+w*(z2-z1)), z1:z2),
    return(s));
lineintegralS1(f,df,R,N,pi):=
  block(s1:lineintegralC3(f,df,R,N),
        s2:lineintegralC4(f,df,R,N,pi),
        s3:lineintegralC5(f,df,R,N),
        s:rectform((s1+s2+s3)/2/pi/i),
        return(s));
f(z):=z^6+z^4+3*z^2+2*z+2$
df(_z):=''(diff(f(_z),_z))$
R:2.0;
N:100;
pi:3.1416;
lineintegralS1(f,df,R,N,pi);
0.02271315592774519 %i + 2.002677751807946

```

で根が2個、従ってこれらの複素共役と合わせて根が6個見つかった。

重根がある場合も周回積分は問題無く重複度分だけカウントしてくれるのは偏角原理の証明から分かるが、Newton 法については重根は注意が必要である。重根に対しては Newton 法の収束は1次で遅くなる。また、近似根の有効桁数も実験してみると通常の半分になるようである。Newton 法は反復法なので、数値積分のように丸め誤差の累積のようなことは起こらないので、これは多分反復の仮定で桁落ち・情報落ちが起こっていると思われる。このような事情により、根のカウントも既得のものと同じかどうかの判定を同じ $\text{eps}=1.0\text{e-}15$ でやると、“新しい根”が次々発見され、プログラムはエラー終了するので $\text{eps}=0.5\text{e-}7$ とかに取る必要がある。プログラム例 hoju1-1.m を参照し、これらのことを確かめられたい。

【注3：任意多倍長演算の利用】 maxima では bfloat という名の通常の float (浮動小数) より有効桁数が大きな小数を扱うことができ、これにより通常の計算より信頼できる桁数が多い近似値を得ることができます。そのうち、使用例をここに置きます。

【課題5：等角写像】

```

f(z):=(z-1)/(z+2);
fx(r,t):=''(realpart(f(r*(cos(t)+i*sin(t)))));
fy(r,t):=''(imagpart(f(r*(cos(t)+i*sin(t)))));
pi:3.14;
p:[];
for r: 0.1 thru 1 step 0.1 do
  (p:append(p,
    [[parametric,fx(r,t),fy(r,t),[t,0,2*pi],
     [gnuplot_preamble,"set size ratio -1"],
     [gnuplot_preamble,"unset key"],
     [color,black],[box,false]
    ]
  )
);

```

```
for a: 0.0 thru 2*%pi step %pi/10 do
  (p:append(p,
    [[parametric,fx(t,a),fy(t,a),[t,0,1.0],
      [gnuplot_preamble,"set size ratio -1"],
      [gnuplot_preamble, "unset key"],[color,black],
    ]
  )
);
plot2d(p);
```

