


## 『関数論講義』 ウェブ注

本文書はサイエンス社から出ているこの書名の本 (以下『本書』と略称) に対する著者からの読者サービスで、スペースの制約で載せきれなかった図版や補足説明が掲げられており、各項目は同書中の  記号に対応しています。以下で引用される定理等の番号は特に記されていない限り本書中のものを使い、式の番号についても本文書で新たに追加された (W.x) の形式のもの以外は本書中のものです。引用文献の文献番号も、本文書で追加された [20] 以降を除き本書のそれをそのまま使います。本文書は出版社からの制約は何もありませんが、本文書の著作権は特に明記されている写真画像を除き、出版されている本書の延長という扱い (© 金子 晃) をお願いします。

**【p.9, 還元不能の場合】** 3次方程式が3実根を持つときは Cardano の公式で負数の平方根が現れますが、Cardano はこれを避けた実数だけが現れる公式を探す努力をしたものの果たせず、還元不能の場合 (casus irreducibilis) と名付けられました。これは実は不可能問題の例で、19世紀に Pierre Wantzel によりその不可能性が証明されました。Wantzel はこれ以外にも角の三等分、立方体の倍積というギリシャ以来の作図の難問が不可能であることを初めて証明しました。これらはいずれも Galois により創始された体の拡大と根の置換群の正規部分群の対応という、いわゆる Galois 理論を用いて証明されました。函数論からは少し逸脱するのですが、著者が日本語でネット検索したとき、goo のサイトでこの証明法を質問しているのが最初にヒットしたのに、回答が無いまま6年も経っていたので、これではネット検索する人の迷惑だろうと思って回答を追加しようとしたら、既にスレッドが閉じられていたので、本書の読者のために若干の歴史も混じえてここに置いておきます。(長くなるので別文書 casus-irreducibilis.pdf (準備中) としてここに置いてあります。) なお、英語版の Wikipedia にはこれの簡単な解説があります (Wikipedia のすべての記事が邦訳されているという訳ではないのですね) :

[https://en.wikipedia.org/wiki/Casus\\_irreducibilis](https://en.wikipedia.org/wiki/Casus_irreducibilis)

**【p.15, 複素数を用いても計算が面倒な問題の例】** 例として以下を取り上げます。

追加問題 1 正弦定理 :

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

を示せ。

**解答** 以下 A, B, C は頂点に対応する複素数とし、外接円の中心を原点に取る。従って  $|A| = |B| = |C| = R$  となる。このとき、

$$\angle A = \arg \frac{C-A}{B-A} = \arg \left( \frac{C-A}{B-A} \middle/ \left| \frac{C-A}{B-A} \right| \right)$$

従って

$$\sin \angle A = \operatorname{Im} \left( \frac{C-A}{B-A} \middle/ \left| \frac{C-A}{B-A} \right| \right) = \frac{|B-A|}{|C-A|} \operatorname{Im} \frac{C-A}{B-A} = \frac{c}{b} \operatorname{Im} \frac{C-A}{B-A}$$

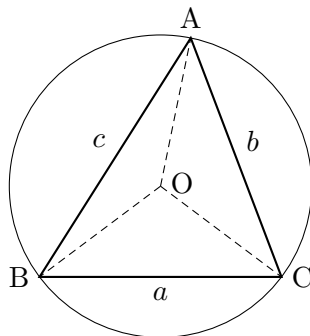


図 W.1

ここで  $A = Re^{i\theta_A}$ ,  $B = Re^{i\theta_B}$ ,  $C = Re^{i\theta_C}$  と置けば, 上は

$$\begin{aligned}\sin \angle A &= \frac{c}{b} \operatorname{Im} \frac{e^{i\theta_C} - e^{i\theta_A}}{e^{i\theta_B} - e^{i\theta_A}} = \frac{c}{b} \operatorname{Im} \frac{e^{i(\theta_C - \theta_A)} - 1}{e^{i(\theta_B - \theta_A)} - 1} = \frac{c}{b} \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i(\theta_C - \theta_A)/2} e^{i(\theta_C - \theta_A)/2} - e^{-i(\theta_C - \theta_A)/2}}{e^{i(\theta_B - \theta_A)/2} e^{i(\theta_B - \theta_A)/2} - e^{-i(\theta_B - \theta_A)/2}} \right) \\ &= \frac{c}{b} \operatorname{Im} e^{i(\theta_C - \theta_B)/2} \frac{\sin(\theta_C - \theta_A)/2}{\sin(\theta_B - \theta_A)/2} = \frac{c}{b} \sin \frac{\theta_C - \theta_B}{2} \frac{\sin \frac{\theta_C - \theta_A}{2}}{\sin \frac{\theta_B - \theta_A}{2}} = \frac{c}{b} \sin \angle A \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}.\end{aligned}$$

最後の等式は, 中心角の半分が円周角であるという例題 1.2-7 の結果を用いた. これより

$$\frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

を得るので, 対称性により正弦定理の最後の部分以外が示された. 最後の等号は, 例えば BO を延長して直径 BD を作れば, 円周角が一定なことから  $\angle BDC = \angle A$  となるので  $a = 2R \sin A$  が直ちに示されるが, これを使うくらいなら上の証明も必要無くなるので, 何とか計算で示そう. 図 W.1 を  $R = 1$ , すなわち単位円に対して描いたものと比較すると, 前者は後者を原点を中心に  $R$  倍に相似拡大したもので, 従って

$$R = \frac{|C - B|}{|e^{i\theta_C} - e^{i\theta_B}|} = \frac{|C - B|}{|e^{i\theta_C/2} e^{i\theta_B/2} (e^{i(\theta_C - \theta_B)/2} - e^{-i(\theta_C - \theta_B)/2})|} = \frac{|C - B|}{2|\sin \frac{\theta_C - \theta_B}{2}|}.$$

ここで,  $\theta_C - \theta_B$  は弧  $\widehat{BC}$  の中心角, 従って  $\frac{\theta_C - \theta_B}{2}$  はその円周角なので  $\angle A$  に等しい. よって最終的に

$$R = \frac{1}{2} \frac{|C - B|}{\sin \angle A}, \quad \therefore \frac{a}{\sin \angle A} = 2R.$$

**追加問題 2**  $\alpha, \beta, \gamma$  を頂点とする三角形の外接円の半径と中心を求めよ.

**解答** 円  $|z|^2 - \bar{c}z - c\bar{z} + |c|^2 = R^2$  が 3 頂点を通るように複素数  $c$ , 実数  $R > 0$  を決めればよいから,

$$|\alpha|^2 - \bar{c}\alpha - c\bar{\alpha} + |c|^2 = R^2 \dots \textcircled{1},$$

$$|\beta|^2 - \bar{c}\beta - c\bar{\beta} + |c|^2 = R^2 \dots \textcircled{2},$$

$$|\gamma|^2 - \bar{c}\gamma - c\bar{\gamma} + |c|^2 = R^2 \dots \textcircled{3}.$$

① - ②, ① - ③ を作ると

$$(|\alpha|^2 - |\beta|^2) - c(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{c}(\alpha - \beta) = 0,$$

$$(|\alpha|^2 - |\gamma|^2) - c(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) - \bar{c}(\alpha - \gamma) = 0.$$

これを  $c, \bar{c}$  の連立 1 次方程式と見て,  $\bar{c}$  を消去すると

$$\begin{aligned} & (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\alpha - \gamma) - (|\alpha|^2 - |\gamma|^2)(\alpha - \beta) \\ & - c\{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\alpha - \gamma) - (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})(\alpha - \beta)\} = 0, \\ \therefore c &= \frac{(|\gamma|^2 - |\beta|^2)\alpha + (|\alpha|^2 - |\gamma|^2)\beta + (|\beta|^2 - |\alpha|^2)\gamma}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha}}\end{aligned}$$

この分母は  $\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta - \overline{\alpha\beta}$  のように  $X - \bar{X}$  の形をした項の和なので純虚数である. 半径は  $|\alpha - c|$  として求まるが, 結果を  $\alpha, \beta, \gamma$  について対称な式にするのはけっこう大変なので, ① ~ ③ の相加平均から求めると,

$$\begin{aligned} R^2 &= |c|^2 - \frac{2}{3} \operatorname{Re}\{(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma})c\} + \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2}{3} \\ &= \left| c - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right|^2 + \frac{3(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2) - |\alpha + \beta + \gamma|^2}{9}.\end{aligned}$$

これも  $c$  を代入して計算するのは大変なので. これを答としておく. ただし, Risa/Asir でこの代入計算を実行してみると, (最初の表現の方に代入すれば)

$$R^2 = \frac{|\beta - \alpha|^2 |\gamma - \beta|^2 |\alpha - \gamma|^2}{|(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma + (\bar{\gamma} - \bar{\beta})\alpha + (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})\beta|^2}, \quad \text{従って} \quad R = \frac{|\beta - \alpha| |\gamma - \beta| |\alpha - \gamma|}{|(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\gamma + (\bar{\gamma} - \bar{\beta})\alpha + (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})\beta|}$$

となることが確かめられる。 □

別解 追加問題 1 を使う。

$$\begin{aligned}\sin \angle A &= \operatorname{Im} \left( \frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|} / \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|} \right) = \frac{|\beta - \alpha|}{|\gamma - \alpha|} \operatorname{Im} \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{|\beta - \alpha|}{|\gamma - \alpha|} \frac{1}{2i} \left( \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} - \overline{\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{|\beta - \alpha|}{|\gamma - \alpha|} \frac{(\gamma - \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha}) - (\beta - \alpha)(\overline{\gamma} - \overline{\alpha})}{|\beta - \alpha|^2} = \frac{1}{|\beta - \alpha||\gamma - \alpha|} \frac{\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma} + \overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha}}{2i}.\end{aligned}$$

最後の分数の分子は純虚数なので、分数全体は実数となるが、頂点の並び順が正の向きでないとき負になることは有り得るので、

$$\sin \angle A = \frac{|\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma} + \overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha}|}{2|\beta - \alpha||\gamma - \alpha|}$$

と絶対値を付けておく方が汎用的である。これは原点と外心が一致していなくても成り立つ式なので、

$$R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \angle A} = \frac{1}{2} \frac{|\gamma - \beta|}{\sin \angle A} = \frac{|\beta - \alpha||\gamma - \alpha||\gamma - \beta|}{|\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma} + \overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha}|}. \quad (\text{W.1})$$

(これは最初の解答で  $c = 0$  とした式

$$R^2 = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2}{3}$$

と一致しないように見えるが、この式は外心が原点という条件  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = R$  を課すとトートロジーになってしまい、比較対象にはならない.)

次に中心は、各辺の垂直二等分線の交点として求めてみる。それは

$$c = \frac{\beta + \alpha}{2} + ir \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\gamma + \beta}{2} + is \frac{\gamma - \beta}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} + it \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

あるいは、

$$\begin{aligned}2ir|\beta - \alpha|^2 &= 2(\overline{\beta} - \overline{\alpha})c - (\beta + \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha}), \\ is|\gamma - \beta|^2 &= 2(\overline{\gamma} - \overline{\beta})c - (\gamma + \beta)(\overline{\gamma} - \overline{\beta}), \\ it|\alpha - \gamma|^2 &= 2(\overline{\alpha} - \overline{\gamma})c - (\alpha + \gamma)(\overline{\alpha} - \overline{\gamma})\end{aligned}$$

を満たす点である。これらの実部を取れば

$$\begin{aligned}2(\overline{\beta} - \overline{\alpha})c + 2(\beta - \alpha)\overline{c} &= (\beta + \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha}) + (\overline{\beta} + \overline{\alpha})(\beta - \alpha) = 2|\beta|^2 - 2|\alpha|^2 \\ \therefore (\overline{\beta} - \overline{\alpha})c + (\beta - \alpha)\overline{c} &= |\beta|^2 - |\alpha|^2 \\ \text{同様に } (\overline{\gamma} - \overline{\beta})c + (\gamma - \beta)\overline{c} &= |\gamma|^2 - |\beta|^2 \\ (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})c + (\alpha - \gamma)\overline{c} &= |\alpha|^2 - |\gamma|^2.\end{aligned}$$

これらはすべて加えると零になるので、独立なものは2個だけである。後の二つから  $\overline{c}$  を消去すると、

$$\begin{aligned}\{(\alpha - \gamma)(\overline{\gamma} - \overline{\beta}) - (\gamma - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\gamma})\}c &= (\alpha - \gamma)(|\gamma|^2 - |\beta|^2) - (\gamma - \beta)(|\alpha|^2 - |\gamma|^2). \\ \therefore c &= \frac{(\alpha - \gamma)(|\gamma|^2 - |\beta|^2) - (\gamma - \beta)(|\alpha|^2 - |\gamma|^2)}{(\alpha - \gamma)(\overline{\gamma} - \overline{\beta}) - (\gamma - \beta)(\overline{\alpha} - \overline{\gamma})} = \frac{(\gamma - \beta)|\alpha|^2 + (\alpha - \gamma)|\beta|^2 + (\beta - \alpha)|\gamma|^2}{\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\gamma} - \overline{\beta}\gamma + \gamma\overline{\alpha} - \overline{\gamma}\alpha}.\end{aligned}$$

これは先に求めたものと分子のくくり方を変え (分子分母の符号を変え) ただけである。

このような解き方は、複素数を使って初等幾何の問題をより簡単に解くという目的には全く合わないが、初等幾何で良く知られた量を複素数で表す必要が生じたときには便利である。

追加問題 3  $\alpha, \beta, \gamma$  を頂点とする複素平面の三角形の内接円の中心と半径を求めよ。

解答 内接円を  $|z - c|^2 = z\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + |c|^2 = r^2$  と置く. これが辺  $\alpha\beta$  すなわち,  $z = \alpha + t(\beta - \alpha)$  と接する条件は, 後者を前者に代入して得られる  $t$  の 2 次方程式

$$|\beta - \alpha|^2 t^2 + \{(\bar{\alpha} - \bar{c})(\beta - \alpha) + (\alpha - c)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\}t + |\alpha - c|^2 - r^2 = 0$$

が重根を持つことである. よって

$$\begin{aligned} & \{(\bar{\alpha} - \bar{c})(\beta - \alpha) + (\alpha - c)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\}^2 - 4|\beta - \alpha|^2(|\alpha - c|^2 - r^2) = 0, \\ & (\bar{\beta} - \bar{\alpha})^2(\alpha - c)^2 + (\beta - \alpha)^2(\bar{\alpha} - \bar{c})^2 + 2|\beta - \alpha|^2|\alpha - c|^2 - 4|\beta - \alpha|^2(|\alpha - c|^2 - r^2) = 0, \\ & (\bar{\beta} - \bar{\alpha})^2(\alpha - c)^2 + (\beta - \alpha)^2(\bar{\alpha} - \bar{c})^2 - 2|\beta - \alpha|^2|\alpha - c|^2 + 4|\beta - \alpha|^2 r^2 = 0, \\ & \{(\bar{\alpha} - \bar{c})(\beta - \alpha) - (\alpha - c)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\}^2 + 4|\beta - \alpha|^2 r^2 = 0. \end{aligned}$$

これより

$$(\bar{\alpha} - \bar{c})(\beta - \alpha) - (\alpha - c)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) = \pm 2i|\beta - \alpha|r \quad \text{あるいは} \quad \text{Im}\{(c - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})\} = \pm|\beta - \alpha|r.$$

最後の式の両辺を  $|\beta - \alpha|^2 = (\beta - \alpha)\overline{(\beta - \alpha)}$  で割ると

$$\text{Im} \frac{c - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \frac{r}{|\beta - \alpha|}. \quad (\text{W.2})$$

複号を一つに決めるため, 図を描いてみると,  $\alpha, \beta, \gamma$  が正の向きに並んでいるとすれば,

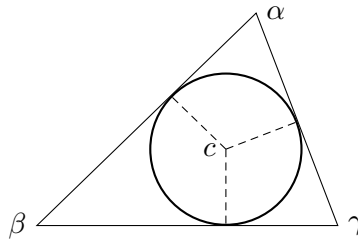


図 W.2

この図から, (W.2) の左辺は正であることが分かる. よって複号は + の方だから, 元に戻って

$$\begin{aligned} & (c - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - (\bar{c} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha) = 2i|\beta - \alpha|r \\ \text{あるいは} & (\bar{\beta} - \bar{\alpha})c - (\beta - \alpha)\bar{c} = \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + 2i|\beta - \alpha|r \\ \text{同様に} & (\bar{\gamma} - \bar{\beta})c - (\gamma - \beta)\bar{c} = \beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma + 2i|\gamma - \beta|r \\ & (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})c - (\alpha - \gamma)\bar{c} = \gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha + 2i|\alpha - \gamma|r. \end{aligned} \quad (\text{W.3})$$

これらを総和すると

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma + \gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha + 2i(|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma|)r. \\ \therefore r &= \frac{1}{2i} \frac{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma + \gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha}{|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma|} = \frac{\text{Im}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha})}{|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma|}. \end{aligned}$$

$c$  を求めるには, 連立 1 次方程式 (W.3) の最初の二つから  $\bar{c}$  を消すと

$$\begin{aligned} & \{(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(\gamma - \beta) - (\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\beta})\}c \\ &= \{(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(\gamma - \beta) - (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)(\beta - \alpha)\} + 2ir\{|\beta - \alpha|(\gamma - \beta) - |\gamma - \beta|(\beta - \alpha)\}. \end{aligned}$$

これを整理した後に  $r$  の最初の方の表現を代入すると,

$$\begin{aligned} & (\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha})c \\ &= \{(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(\gamma - \beta) - (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)(\beta - \alpha)\} \\ & \quad + \frac{\{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha}\}\{|\beta - \alpha|(\gamma - \beta) - |\gamma - \beta|(\beta - \alpha)\}}{|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma|}. \\ \therefore c &= \frac{(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(\gamma - \beta) - (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)(\beta - \alpha)}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha}} + \frac{|\beta - \alpha|(\gamma - \beta) - |\gamma - \beta|(\beta - \alpha)}{|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma|}. \end{aligned}$$

これを通分した後の分子は

$$\begin{aligned} & |\beta - \alpha|\{(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(\gamma - \beta) - (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta)(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha})\} \\ & + |\gamma - \beta|\{(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(\gamma - \beta) - (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha)(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha})\} \\ & + |\alpha - \gamma|\{(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(\gamma - \beta) - (\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)(\beta - \alpha)\} \\ = & |\beta - \alpha|\{(\alpha - \gamma)(\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma) - (\gamma - \beta)(\gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha)\} \\ & + |\gamma - \beta|\{(\beta - \alpha)(\gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha) - (\alpha - \gamma)(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)\} \\ & + |\alpha - \gamma|\{(\gamma - \beta)(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) - (\beta - \alpha)(\beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)\} \\ = & |\beta - \alpha|\gamma\{\bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta\} \\ & + |\gamma - \beta|\alpha\{\bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\alpha} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma}\} \\ & + |\alpha - \gamma|\beta\{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha}\} \\ = & (\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha})(|\gamma - \beta|\alpha + |\alpha - \gamma|\beta + |\beta - \alpha|\gamma) \end{aligned}$$

となるから, 最後の辺の先頭の因子は通分後の分母の一つ目の因子と打ち消し合い, 結局

$$c = \frac{|\gamma - \beta|\alpha + |\alpha - \gamma|\beta + |\beta - \alpha|\gamma}{|\gamma - \beta| + |\alpha - \gamma| + |\beta - \alpha|}.$$

となる.

別解 初等幾何の知識を使うと, 内心は各頂角の二等分線の交点なので,

$$c = \alpha + k\left(\frac{\gamma - \alpha}{|\gamma - \alpha|} + \frac{\beta - \alpha}{|\beta - \alpha|}\right) = \beta + l\left(\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} + \frac{\gamma - \beta}{|\gamma - \beta|}\right) = \gamma + m\left(\frac{\beta - \gamma}{|\beta - \gamma|} + \frac{\alpha - \gamma}{|\alpha - \gamma|}\right).$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{k}{|\gamma - \alpha||\beta - \alpha|} &= \frac{c - \alpha}{(\gamma - \alpha)|\beta - \alpha| + (\beta - \alpha)|\gamma - \alpha|}, \\ \frac{l}{|\alpha - \beta||\gamma - \beta|} &= \frac{c - \beta}{(\alpha - \beta)|\gamma - \beta| + (\gamma - \beta)|\alpha - \beta|}, \\ \frac{m}{|\beta - \gamma||\alpha - \gamma|} &= \frac{c - \gamma}{(\beta - \gamma)|\alpha - \gamma| + (\alpha - \gamma)|\beta - \gamma|}. \end{aligned}$$

これらの左辺は実より, 右辺の虚部は零で, 従って

$$\begin{aligned} \frac{c - \alpha}{(\gamma - \alpha)|\beta - \alpha| + (\beta - \alpha)|\gamma - \alpha|} - \frac{\bar{c} - \bar{\alpha}}{(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})|\beta - \alpha| + (\bar{\beta} - \bar{\alpha})|\gamma - \alpha|} &= 0, \\ \frac{c - \beta}{(\alpha - \beta)|\gamma - \beta| + (\gamma - \beta)|\alpha - \beta|} - \frac{\bar{c} - \bar{\beta}}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})|\gamma - \beta| + (\bar{\gamma} - \bar{\beta})|\alpha - \beta|} &= 0, \\ \frac{c - \gamma}{(\beta - \gamma)|\alpha - \gamma| + (\alpha - \gamma)|\beta - \gamma|} - \frac{\bar{c} - \bar{\gamma}}{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})|\alpha - \gamma| + (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})|\beta - \gamma|} &= 0. \end{aligned}$$

分母を払うと

$$\begin{aligned} & \{(\overline{\gamma} - \overline{\alpha})|\beta - \alpha| + (\overline{\beta} - \overline{\alpha})|\gamma - \alpha|\}c - \{(\gamma - \alpha)|\beta - \alpha| + (\beta - \alpha)|\gamma - \alpha|\}\overline{c} \\ &= \{(\overline{\gamma} - \overline{\alpha})|\beta - \alpha| + (\overline{\beta} - \overline{\alpha})|\gamma - \alpha|\}\alpha - \{(\gamma - \alpha)|\beta - \alpha| + (\beta - \alpha)|\gamma - \alpha|\}\overline{\alpha} \\ &= (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})|\beta - \alpha| - (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})|\gamma - \alpha|. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} & \{(\overline{\alpha} - \overline{\beta})|\gamma - \beta| + (\overline{\gamma} - \overline{\beta})|\alpha - \beta|\}c - \{(\alpha - \beta)|\gamma - \beta| + (\gamma - \beta)|\alpha - \beta|\}\overline{c} \\ &= (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})|\gamma - \beta| - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})|\alpha - \beta|, \\ & \{(\overline{\beta} - \overline{\gamma})|\alpha - \gamma| + (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})|\beta - \gamma|\}c - \{(\beta - \gamma)|\alpha - \gamma| + (\alpha - \gamma)|\beta - \gamma|\}\overline{c} \\ &= (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})|\alpha - \gamma| - (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})|\beta - \gamma| \end{aligned}$$

という連立1次方程式が得られる。これは (W.3) から二つずつペアにして  $r$  を消去したものと一致しており、独立なのは2個だけである。後の二つから  $\overline{c}$  を消去すると、

$$\begin{aligned} & [(\overline{\alpha} - \overline{\beta})|\gamma - \beta| + (\overline{\gamma} - \overline{\beta})|\alpha - \beta|\}\{(\beta - \gamma)|\alpha - \gamma| + (\alpha - \gamma)|\beta - \gamma|\} - \{(\overline{\beta} - \overline{\gamma})|\alpha - \gamma| + (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})|\beta - \gamma|\}\{(\alpha - \beta)|\gamma - \beta| + (\gamma - \beta)|\alpha - \beta|\}c \\ &= \{(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})|\gamma - \beta| - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})|\alpha - \beta|\}\{(\beta - \gamma)|\alpha - \gamma| + (\alpha - \gamma)|\beta - \gamma|\} \\ & \quad - \{(\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})|\alpha - \gamma| - (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})|\beta - \gamma|\}\{(\alpha - \beta)|\gamma - \beta| + (\gamma - \beta)|\alpha - \beta|\} \end{aligned}$$

ここで左辺の  $c$  の係数は、

$$\begin{aligned} &= \{(\overline{\alpha} - \overline{\beta})|\gamma - \beta| + (\overline{\gamma} - \overline{\beta})|\alpha - \beta|\}\{(\beta - \gamma)|\alpha - \gamma| + (\alpha - \gamma)|\beta - \gamma|\} \\ & \quad - \{(\overline{\beta} - \overline{\gamma})|\alpha - \gamma| + (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})|\beta - \gamma|\}\{(\alpha - \beta)|\gamma - \beta| + (\gamma - \beta)|\alpha - \beta|\} \\ &= (\overline{\alpha} - \overline{\beta})(\beta - \gamma)|\gamma - \beta||\alpha - \gamma| + (\overline{\gamma} - \overline{\beta})(\beta - \gamma)|\alpha - \beta||\alpha - \gamma| \\ & \quad + (\overline{\alpha} - \overline{\beta})(\alpha - \gamma)|\gamma - \beta||\beta - \gamma| + (\overline{\gamma} - \overline{\beta})(\alpha - \gamma)|\alpha - \beta||\beta - \gamma| \\ & \quad - (\overline{\beta} - \overline{\gamma})(\alpha - \beta)|\alpha - \gamma||\gamma - \beta| - (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})(\alpha - \beta)|\beta - \gamma||\gamma - \beta| \\ & \quad - \{(\overline{\beta} - \overline{\gamma})(\gamma - \beta)|\alpha - \gamma||\alpha - \beta| - (\overline{\alpha} - \overline{\gamma})(\gamma - \beta)|\beta - \gamma||\alpha - \beta|\} \\ &= (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\gamma} - \overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})|\gamma - \beta||\alpha - \gamma| \\ & \quad + (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\gamma} - \overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})|\beta - \gamma|^2 \\ & \quad + (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\gamma} - \overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})|\alpha - \beta||\beta - \gamma| \\ &= (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\gamma} - \overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| + |\alpha - \gamma|)|\beta - \gamma|. \end{aligned}$$

また右辺は

$$\begin{aligned} &= (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})(\beta - \gamma)|\gamma - \beta||\alpha - \gamma| + (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})(\alpha - \gamma)|\gamma - \beta|^2 \\ & \quad - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(\beta - \gamma)|\alpha - \beta||\alpha - \gamma| - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(\alpha - \gamma)|\alpha - \beta||\beta - \gamma| \\ & \quad - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(\alpha - \beta)|\alpha - \gamma||\gamma - \beta| - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(\gamma - \beta)|\alpha - \gamma||\alpha - \beta| \\ & \quad + (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})(\alpha - \beta)|\beta - \gamma|^2 + (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})(\gamma - \beta)|\beta - \gamma||\alpha - \beta| \\ &= (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})(\beta - \gamma)|\gamma - \beta||\alpha - \gamma| + (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})(\alpha - \gamma)|\gamma - \beta|^2 - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(\alpha - \gamma)|\alpha - \beta||\beta - \gamma| \\ & \quad - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(\alpha - \beta)|\alpha - \gamma||\gamma - \beta| + (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})(\alpha - \beta)|\beta - \gamma|^2 + (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})(\gamma - \beta)|\beta - \gamma||\alpha - \beta| \\ &= \{(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})(\beta - \gamma) - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(\alpha - \beta)\}|\alpha - \gamma| \\ & \quad + \{(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})(\alpha - \gamma) + (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})(\alpha - \beta)\}|\gamma - \beta| \\ & \quad + \{(\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})(\gamma - \beta) - (\overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})(\alpha - \gamma)\}|\alpha - \beta||\gamma - \beta| \\ &= \{(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma} + \overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})\beta|\alpha - \gamma| \\ & \quad + (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha} + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma})\alpha|\gamma - \beta| \\ & \quad + (\overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha} + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})\gamma|\alpha - \beta|\}|\gamma - \beta| \\ &= (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + \overline{\beta}\gamma - \beta\overline{\gamma} + \overline{\gamma}\alpha - \gamma\overline{\alpha})(\alpha|\gamma - \beta| + \beta|\alpha - \gamma| + \gamma|\alpha - \beta|)|\gamma - \beta|. \end{aligned}$$

よって  $(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\gamma})$  と  $|\beta - \gamma|$  が両辺から共通因子として略せ、

$$c = \frac{\alpha|\gamma - \beta| + \beta|\alpha - \gamma| + \gamma|\alpha - \beta|}{|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| + |\alpha - \gamma|}.$$

せつかく初等幾何の知識を使うので、内接円の半径  $r$  を  $c$  から任意の辺までの距離として求めるのはやめ、面積を用いることにすると、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|\beta - \alpha|r + \frac{1}{2}|\gamma - \beta|r + \frac{1}{2}|\gamma - \alpha|r = \frac{1}{2}\{|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\gamma - \alpha|\}r.$$

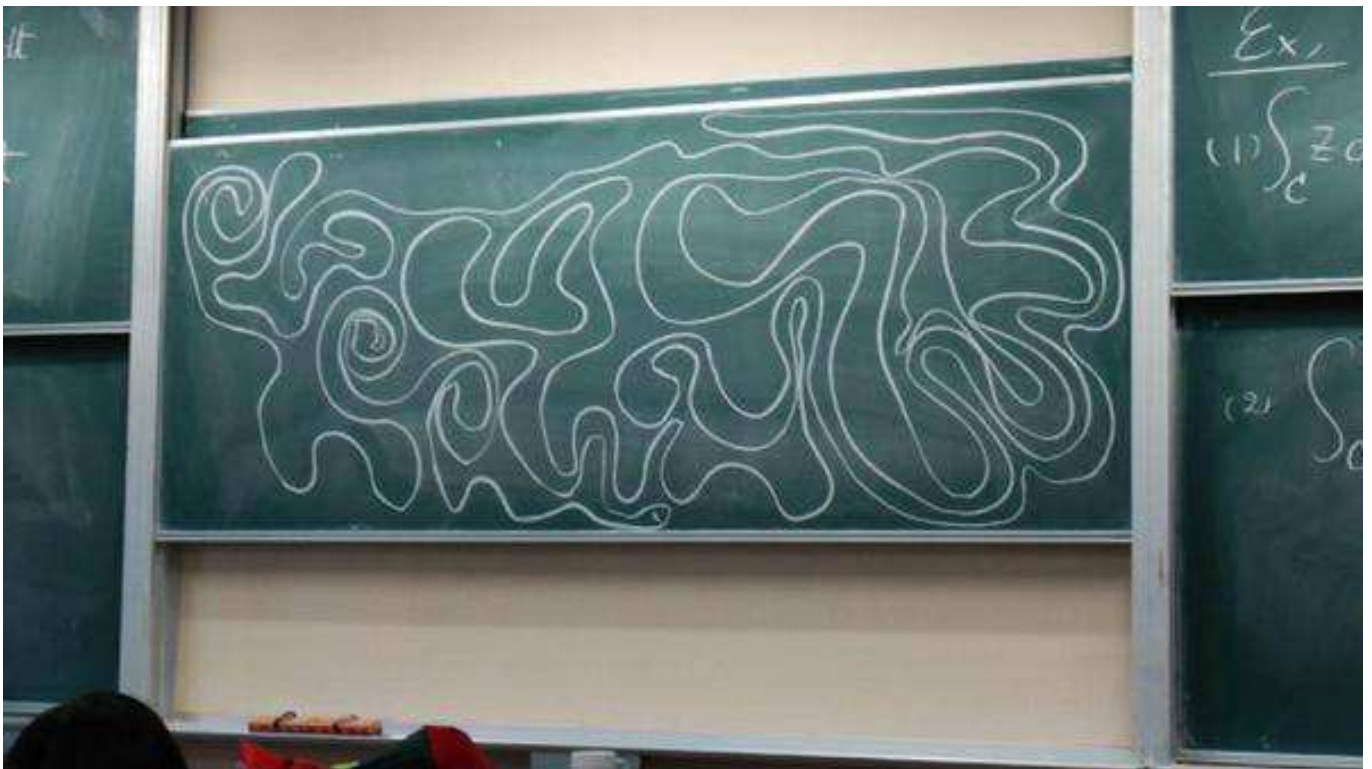
他方、正弦定理より

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2}|\gamma - \alpha||\beta - \alpha|\sin \angle B = \frac{|\gamma - \alpha||\beta - \alpha||\gamma - \alpha|}{4R}. \\ \therefore r &= \frac{|\gamma - \alpha||\beta - \alpha||\gamma - \alpha|}{2R(|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\gamma - \alpha|)} = \frac{1}{2} \frac{|\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\gamma}\alpha - \gamma\bar{\alpha}|}{|\beta - \alpha| + |\gamma - \beta| + |\gamma - \alpha|}. \end{aligned}$$

最後は追加問題 2 の別解の結果 (W.1) を用いた。□

この証明の途中で出てきた式は三角形の三辺を  $a, b, c$  とすれば  $2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$  となる。初等幾何だけで導かれ、非常にきれいなので名前が付いていると思われるが著者は寡聞にして見たことがない。

【p.82, 脚注 14)】 Jordan 曲線の例. 制作: 吉田裕亮教授 ©, 撮影: ふみなしさん © 禁転載でお願いします。



【p.93, 定理 4.10 の最後】 固定点  $\alpha$  を中心とする円板で、 $f(z)$  がその内部で正則であるようなものの集合には、包含関係に関して最大のものがあります。実際、これらの円板  $D_r$  (ここで  $r$  はその半径とします) のすべての和集合は各円板の内部だけを考えると開集合なので、再び開集合  $D$  となります。これは複素平面全体になることも有り得ますが、その場合は半径  $\infty$  の円板と解釈します。それ以外の場合は、 $D$  は有界な開円盤となります。実際、 $z \in D$  なら、それはある  $D_r$  に含まれるので、 $|z| < r$  であり、 $z$  とともに  $|w - \alpha| \leq |z - \alpha|$  を満たすすべての点  $w$  も  $D_r$  に、従って  $D$  に含まれます。これで  $D$  が円であることが分かりました。  $D$  の

半径が有限なことは、もし  $|z_n - \alpha| \rightarrow \infty$  なる点列  $z_n \in D$  が有ったら、上の論法と同様にして  $D$  は点  $\alpha$  を中心とする半径  $|z_n - \alpha|$  の円板を含むことが分かり、従ってその和集合は複素平面全体となってしまうので、 $\forall z \in D$  について  $|z - \alpha| < R$  が成り立つような  $R$  が存在しなければなりません。

以上はほぼ自明な事実だとは思いましたが、「ある順序について最大のもの」という表現を用いるときは、それが確かに存在することを示さねばならないという一般的な約束に従って、念の為少していねいにそれを説明しました。

**[p.117, 脚注]** 部分分数分解を用いた Laurent 展開の計算の簡易化版の詳細です。

まず

$$\frac{1}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{3} \frac{1}{2+z} \quad (\text{W.4})$$

を求めます。この分解も留数定理を用いて暗算で計算できますが、このように分母が二つだけの単純因子から成るときは、右辺の分数を書いておき、通分したときに分子から  $z$  が消えるように各分数の分子の定数を調節し、最後に分子に残った定数で全体を割るという初等的な手法でも暗算で簡単に計算できます。ここで例えば  $|z| > 2$  での Laurent 展開なら、上の式の右辺を  $z = 0$  を中心に負幂で展開すると

$$= -\frac{1}{3z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{1}{3z} \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} = -\frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \{$$

これを  $z$  で割って整頓すれば

$$\frac{1}{z(1-z)(2+z)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-2}}{z^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \{(-2)^{n-2} - 1\} \frac{1}{z^n}.$$

となります。(  $n = 2$  の項は打ち消して残りません。)

$|z| < 1$  での展開はこれらを  $z$  の正幂で、 $1 < |z| < 2$  では  $\frac{1}{2+z}$  だけを正幂で展開して最後に  $z$  で割ればよらしい。

ちなみに、他の極  $z = 1$  や  $z = -2$  での展開も同様に、それぞれ  $1 - z$ ,  $2 + z$  を省いたものの部分分数分解を求めておいて展開し、最後に省いた因子で割れば同様に計算できます。

**[p.124, 例題 5.4-1 の解答の最後]** 例 5.3-2 の関数の  $z = 0$  を中心とする Laurent 展開を求めるには、一つ前の補注に述べた方法で因子  $z^3$  を分母から省いたものの展開を計算しておいてその結果を  $z^3$  で割る方がより簡単な計算法です。ただし、 $z^3$  が  $(z - \alpha)^3$  ( $|\alpha| < 1$ , 例えば  $\alpha = \frac{1}{2}$  など) に変わると、 $z = 0$  を中心とするこの展開である  $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{z^{n+1}})^3$ , あるいは  $-(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha^{n+1}})^3$  を掛けねばなりません。級数の掛け算は面倒ですが、ここで述べた解法は、最後に  $\alpha = 0$  と置くのをやめれば、 $|\alpha| < 1$  なる一般の  $\alpha$  で通用します。

**[p.142, Cauchy の存在定理]** やや長いので独立のファイル `Cauchy_existence_theorem.pdf` としてここに置きました。

**[p.143, 積分変換の他の例]** Laplace 変換, Mellin 変換, Borel 変換について関数論との関係に重点を置いて簡単に解説したものを別文書 `MoreExOfIntegralTransforms.pdf` (準備中) として置いておきます。

**[p.163, ホモトピーが同値関係を満たすことの確認]**

- ①  $C_0 \simeq C_0$  はホモトピー写像として  $\Phi(t, s) = \Phi(t)$ ,  $0 \leq s \leq 1$  ととれば成り立つ。
- ②  $C_0 \simeq C_1 \implies C_1 \simeq C_0$  は、前者を与えるホモトピー写像を  $\Phi(t, s)$  とするとき、後者が  $\Phi(t, 1 - s)$  というホモトピー写像で与えられることから分かる。
- ③  $C_0 \simeq C_1, C_1 \simeq C_2 \implies C_0 \simeq C_2$  は、前二者を与えるホモトピー写像をそれぞれ  $\Phi_1(t, s), \Phi_2(t, s)$  とすれば、後者は

$$\Phi(t, s) := \begin{cases} \Phi_1(t, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \text{ のとき,} \\ \Phi_2(t, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる。



【p.164, 補題 6.22 の証明】 (準備中)

(2)  $\implies$  (2)' 自明.

(2)'  $\implies$  (3) +++++

【p.176, 脚注】 仮定から

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Int}(K_{n+1}) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Int}(K_n) \subset \Omega.$$

よって間の  $\subset$  はすべて等号となるから,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Int}(K_n) = \Omega$  が言えます. このとき  $K \subset \Omega$  を任意のコンパクト集合とすれば, それは  $\text{Int}(K_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  で覆われるので, Heine-Borel の被覆定理 (というかコンパクトの定義) により, そのうちの有限個で覆われ, 従って  $K_n$  の単調増加性によりそれらのうちの最大のものに含まれます.

なお,  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  だけからは  $\forall K \subset \Omega$  コンパクトに対し  $\exists K_n$  s.t.  $K \subset K_n$  は一般には従いません. 反例として,  $\Omega = \{ |z| < 1 \}$ ,  $K_n = \{ |z| \leq 1 - \frac{1}{n} \} \setminus \{ x + iy ; 0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{n} \}$  が挙げられます. これが  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  を満たすことは,  $z \in \Omega$  が  $\text{Re } z \leq 0$  のとき, あるいは  $\text{Re } z > 0$  でも  $\text{Im } z \leq 0$  のときは,  $\frac{1}{n} \leq 1 - |z|$ , すなわち,  $n \geq \frac{1}{1-|z|}$  なる  $n$  に対して  $z \in K_n$  となります. また,  $\text{Re } z > 0$  かつ  $\text{Im } z > 0$  のときは,  $\frac{1}{n} \leq \text{Im } z$ , すなわち  $n \geq \frac{1}{\text{Im } z}$  も更に満たす  $n$  について  $z \in K_n$  となります. この番号は  $\text{Im } z$  が 0 に近づくと, いくらでも大きくする必要があるので, 例えば  $K = \{ |z| \leq \frac{1}{2} \}$  とすれば,  $K$  に含まれるすべての点に共通の  $n$  を取ることができません.

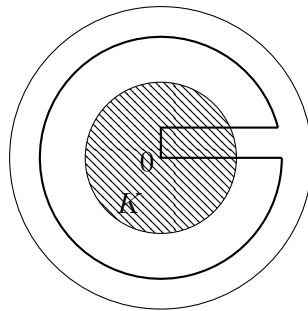


図 W.x  $K_n$  ( $n = 5$ ) の図

【p.189, 定理 7.12 (Schwarz-Christoffel の公式) の証明】

まず  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  がすべて有限の点の場合を考える.  $z$  平面において  $z = a_j$  を中心とする上半平面の十分小さな半円は仮定により  $w$  平面の  $\alpha_j$  を頂点とする中心角  $\frac{\pi}{q_j}$  の扇形の先端部に等角に写像される.  $w$  平面から  $\zeta$  平面への写像を  $\zeta = (w - \alpha_j)^{q_j}$  で定めると, この扇形は  $\zeta$  平面の原点を中心とする (傾いた) 半円に等角に写像される. 更に適当な複素定数  $c_j$  を掛けて, この直径が実軸上に来るようにする. このとき合成写像  $\zeta = g(z) := c_j(f(z) - \alpha_j)^{q_j}$  は鏡像の原理により  $a_j$  の近傍から原点の近傍への正則写像に拡張され,  $z$  が実数のとき実数値となる. 明らかに  $g'(z) \neq 0$  のはずなので,  $g(z) = (z - a_j)\{1 + h_j(z)\}$  の形となり, ここで  $h_j(z)$  は実軸上実数値を取る. 故に  $z = a_j$  の近傍で

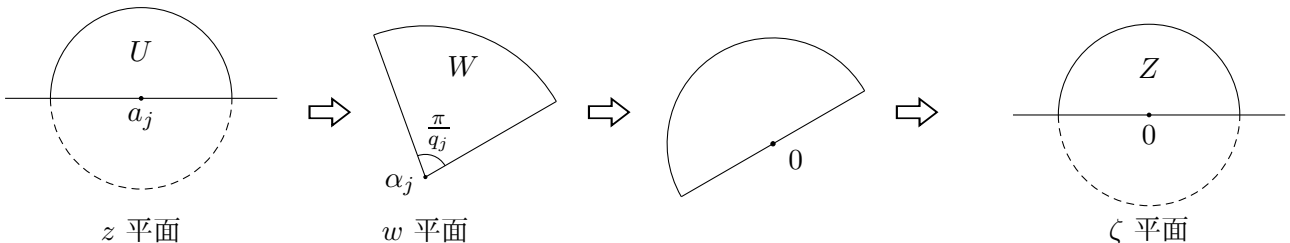


図 W.3

$$f(z) = \left\{ \frac{1}{c_j} g(z) \right\}^{1/q_j} + \alpha_j = C_j (z - a_j)^{1/q_j} \{1 + h_j(z)\}^{1/q_j} + \alpha_j$$

の形となる．ここに  $C_j = c_j^{-1/q_j}$  の値は実際には  $f$  から一意に定まるある分枝である．すると

$$f'(z) = \frac{C_j}{q_j} (z - a_j)^{1/q_j - 1} \left( 1 + (z - a_j) \frac{h'_j(z)}{1 + h_j(z)} \right) (1 + h_j(z))^{1/q_j}$$

となる． $f(z)$  は上半平面上の単葉関数なので  $f'(z) \neq 0$  であり，従って  $\log f'(z)$  は一価な分枝を取ることができるが，その微分は  $z = a_j$  の近傍では，上の式の対数を微分して

$$\frac{d}{dz} \log f'(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \left( \frac{1}{q_j} - 1 \right) \frac{1}{z - a_j} + \frac{d}{dz} \log \left\{ \left( 1 + (z - a_j) \frac{h'_j(z)}{1 + h_j(z)} \right) (1 + h_j(z))^{1/q_j} \right\}$$

となっている． $f'(z)$  は更に境界である実軸上でも  $z = a_j, j = 1, 2, \dots, n$  を除き  $f'(z) \neq 0$  を満たすことが，その像が線分になっていることから鏡像の原理で同様に証明できるので，上の式の左辺は  $z = a_j, j = 1, 2, \dots, n$  を除き実軸まで正則になっている．すると

$$F(z) := \frac{f''(z)}{f'(z)} - \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{q_j} - 1 \right) \frac{1}{z - a_j}$$

も同じところで正則，かつ上の局所表現により  $z = a_j, j = 1, 2, \dots, n$  でも正則となる．更に， $F(z)$  は上の局所表現から  $z = a_j, j = 1, 2, \dots, n$  の近傍で  $z$  が実のとき実数値となっていることが分かるので，一致の定理により実軸上で実数値を取る．従って鏡像の原理により  $F(z)$  は全平面で正則となる．のみならず，無限遠点は仮定により  $f(z)$  によって有界な多角形の頂点ではない辺のどこかに写像されるので， $f(z)$  は無限遠で有界，かつ鏡像の原理によりそこで正則である．（このことが納得できない人は，上半平面を上半平面に写す 1 次変換，例えば  $\tilde{z} = \frac{z-1}{z+1}$  などで無限遠点を有限の点に持ってきて鏡像の原理を適用した後，1 次変換を戻せばよい．）そこで  $f(z)$  の無限遠点での Taylor 展開を（簡単のため  $z$  を変数として Laurent 級数の形で）書くと

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

となり，従って

$$f'(z) = -\frac{b_1}{z^2} - \frac{2b_2}{z^3} + \dots, \quad f''(z) = \frac{2b_1}{z^3} + \frac{6b_2}{z^4} + \dots,$$

となり，従って

$$F(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{z^2}{b_1} \left( 1 + \frac{b_2}{b_1 z} + \dots \right)^{-1} \left( \frac{2b_1}{z^3} + \frac{6b_2}{z^4} + \dots \right) = -\frac{2}{z} - 2b_2 \frac{1 - 3/b_1}{z^2} + \dots$$

となるので， $F(z)$  も無限遠点の近傍で正則となるのみならず，そこで値が 0 となる．故に Liouville の定理により  $F(z)$  は定数 0 となる．

以上により

$$\frac{d}{dz} \log \{f'(z)\} = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{q_j} - 1 \right) \frac{1}{z - a_j}$$

が示されたので，不定積分すると，

$$\log \{f'(z)\} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{q_j} - 1 \right) \log(z - a_j) + C_1, \quad \text{すなわち} \quad f'(z) = c_1 \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{\frac{1}{q_j} - 1}.$$

ここに  $c_1 = e^{C_1}$ ．もう一度不定積分すると

$$f(z) = c_1 \int_0^z \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{\frac{1}{q_j} - 1} dz + c_2$$

となり, (7.8) が導かれた.

最後に,  $a_n = \infty$  のときは, 有限の点  $a_j, j = 1, 2, \dots, n-1$  について上の議論が適用でき,

$$F(z) := \frac{f''(z)}{f'(z)} - \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{q_j} - 1 \right) \frac{1}{z - a_j}$$

は上半平面とその境界で正則, かつ境界の実軸上で実数値となる. 故に鏡像原理により  $F(z)$  は全平面に正則に延長される. 今回は  $f(z)$  は無限遠点で正則とは言えないが,  $f(\infty) = \alpha_n$  は有限な値であり, かつ上の議論と同様にして  $f(z) = c_n z^{-1/q_n} + \alpha_n(1 + h_n(z))$  であることが分かる. よってやはり  $F(z)$  は無限遠で有界のみならず値が 0 に近づくので, Riemann の除去可能特異点定理により  $F(z)$  は無限遠点で正則で, 従って Liouville の定理により定数 0 となる. これから不定積分を 2 度行えば, (7.8) から因子  $(z_n - a_n)^{1/q_n - 1}$  を覗いたものが得られる.  $\square$

**【p.189, 例 7.3-3 の定数の決定】**

正三角形はすべて相似なので, この例では  $a, b, c$  をどのように与えても, (7.10) は上半平面を正三角形に写像するので, 相似変換と回転を決める  $c_1$  と位置を決める  $c_2$  を決定すれば良い. 見通しを良くするため,  $c = \infty$  とし,  $a = 0, b = 1$  として 0, 1 がそのままその位置に写るものを探す. 一般の場合は後で論ずる.

$$w = c_1 \int_0^z z^{-2/3}(1-z)^{-2/3} dz$$

と書き直せるので,  $z$  が実ならこれは不完全ベータ関数である.  $c_2 = 0$  とすれば 0 が 0 に写る.  $c_1$  を正実に取れば,  $0 < x < 1$  は実軸上に写されるので, 1 が 1 に写るようにするには,

$$1 = c_1 \int_0^1 x^{-2/3}(1-x)^{-2/3} dx = c_1 B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

とすればよい. ここに

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

である. (最後の等号の証明は [2], 第 8 章章末問題 1 の解答参照.) すなわち,

$$c_1 = \frac{1}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 0.1886822267877 \dots$$

さて,  $x$  が 1 を越えて実軸上を進むと,

$$f(z) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} \int_0^x x^{-2/3}(1-x)^{-2/3} dx = 1 + \frac{1}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} e^{2\pi i/3} \int_1^x x^{-2/3}(x-1)^{-2/3} dx$$

となる. ここで出てきた因子は  $(-1)^{-2/3}$  であるが, これがなぜ  $e^{-2\pi i/3}$  でないかという点,  $z$  が 1 から  $1 + \varepsilon e^{i\theta}$  に動いたとき,

$$\begin{aligned} \int_1^{1+\varepsilon e^{i\theta}} z^{-2/3}(1-z)^{-2/3} dz &= \int_0^\varepsilon (1 + te^{i\theta})^{-2/3} (-te^{i\theta})^{-2/3} e^{i\theta} dt \\ &= \int_0^\varepsilon \left( 1 - \frac{2}{3} e^{i\theta} t + \dots \right) \underbrace{(-1)^{-2/3} e^{-2\theta i/3} e^{i\theta} t^{-2/3}} dt \end{aligned}$$

において,  $\theta = \pi$  のときに実軸を戻ってこれが実数とならねばならないので,  $(-1)^{-2/3} = e^{2\pi i/3}$  となって後ろの  $e^{-2\theta i/3}|_{\theta \rightarrow \pi}$  を打ち消す必要があるからである. こうしておけば  $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき下線部は  $e^{2\pi i/3} e^{-\pi i/3} e^{\pi i/2} = e^{5\pi i/6}$  となり, 目的の正三角形の内部に向かう. 以上により  $x$  が実軸上 1 を越えて  $+\infty$  まで行くと,

$$f(z) = 1 + \frac{1}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} e^{2\pi i/3} \int_1^\infty x^{-2/3}(x-1)^{-2/3} dx$$

まで進むので、この第 2 項が  $e^{2\pi i/3}$  になればよい。すなわち、

$$\int_1^\infty x^{-2/3}(x-1)^{-2/3}dx = B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

となればよい。これは積分変数を  $x \mapsto \frac{1}{t}$  と変換すると

$$\text{左辺} = \int_1^0 t^{2/3}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-2/3}\left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_0^1 t^{2/3}(1-t)^{-2/3}t^{2/3}t^{-2}dt = \int_0^1 t^{-2/3}(1-t)^{-2/3}dt$$

より成り立っている。

同様に、積分を実軸上 0 から  $-\infty$  まで実行すると、結果は  $e^{\pi i/3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  となるが、これは一般論から同じ点  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  に到達することが分かっているの、やる必要は無い。以上により (7.9) は確かに上半平面を所定の正三角形に写す等角写像で、かつ  $0, 1, \infty$  を  $0, 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  に対応させることが分かった。

正三角形の頂点の原像が一般の点  $a, b, c$  のときは、これらの点を  $0, 1, \infty$  に写すような 1 次変換

$$\zeta = \frac{(c-b)(z-a)}{(a-b)(z-c)}$$

が問 6.3-6 で与えられているので、まずこれを施してから上に求めた  $f(\zeta)$  に代入すればよい。すなわち、上と

$$1 - \zeta = \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}, \quad d\zeta = \frac{(c-b)(c-a)}{(b-a)(z-c)^2}dz$$

を

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} \int_0^\zeta \zeta^{-2/3}(1-\zeta)^{-2/3}d\zeta$$

に代入すると、 $\zeta = 0$  が  $z = a$  に対応することから、

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} \int_a^z \left(\frac{(c-b)(z-a)}{(a-b)(z-c)}\right)^{-2/3} \left(\frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right)^{-2/3} \frac{(c-b)(c-a)}{(b-a)(z-c)^2} dz \\ &= \frac{(c-b)^{1/3}(b-a)^{1/3}(c-a)^{1/3}}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} \int_a^z (z-a)^{-2/3}(z-b)^{-2/3}(z-c)^{-2/3} dz \end{aligned}$$

となる。よって、

$$w = c_1 \int_0^z \frac{1}{\sqrt[3]{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}} dz + c_2$$

ここに

$$c_1 = \frac{\sqrt[3]{(c-b)(b-a)(c-a)}}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}, \quad c_2 = -c_1 \int_0^a \frac{1}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} dx$$

と表されることが分かった。

#### [p.189, 例 7.3-4 の定数の決定]

この例では  $a, b, c, d$  の位置を予め指定してしまうと正方形でなく長方形になってしまう可能性が大きいので、対称性により正方形にできるものとして、 $-1, 0, 1, \infty$  を  $e^{3\pi i/4}, 0, e^{\pi i/4}, \sqrt{2}e^{\pi i/2}$  に写す写像をまず求め、後で  $-\frac{\pi}{4}$  だけ回転させる方針を取る。すると

$$w = c_1 \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z(z^2-1)}} dz$$

を考え、

$$c_1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}} dx = e^{\pi i/4}, \quad c_1 \int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}} dx = e^{3\pi i/4}$$

となるように  $C_1$  を定める.  $z = 0$  から  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  の方向に動くとき,  $z(z^2 - 1) = -\varepsilon e^{i\theta}(1 - \varepsilon^2 e^{2i\theta})$  となるので,  $0 \leq \theta \leq \pi$  と動くとき, この量は負の実軸から下半平面を回って正の実軸に達する. よってその平方根は正の居軸から負の実軸に正の向きに動く. よって上はそれぞれ

$$\frac{c_1}{e^{\pi i/2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx, \quad \frac{c_1}{e^{\pi i}} \int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{-x(1-x^2)}} dx = -\frac{c_1}{e^{\pi i}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx$$

と解釈されるから, これらの値が順に  $e^{\pi i/4}$ ,  $e^{3\pi i/4}$  となるためには,  $c_1 = \frac{e^{3\pi i/4}}{\kappa}$  と取ればよいことが分かる. ここに

$$\kappa := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx = 2.2973768538 \dots$$

である. このとき一般論により無限遠点は居軸上の  $\sqrt{2}i$  に写ることが保証されるので, 結局全体に  $e^{-\pi i/4}$  を掛けて,

$$w = \frac{i}{\kappa} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z(z^2-1)}} dz$$

が指定された正方形への等角写像となる.

頂点の原像が  $a_1, a_2, a_3, a_4$  の場合は, これを上半平面を保つ 1 次変換で  $-1, 0, 1, \infty$  に写してから上の公式を当てはめればよいが, 問 6.3-6 によりこれらの複比は一致しなければならないので,

$$\frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} / \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} / \frac{\infty - (-1)}{\infty - 0}, \quad \text{従って} \quad \frac{(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)}{(a_3 - a_2)(a_4 - a_1)} = 2$$

という条件が付く.

#### 【p.191, $K_n$ の取り方の詳細】

ここの記述の意味を説明するための図を載せます. 図は  $(0,0)$  を中心とする半径 1 の開円板と,  $(3.5,0)$  を中心とする半径 2 の開円板を,  $x$  軸を中心線とする幅 0.5 の帯状の回廊で繋いだものを  $\Omega$  としたものです. 図には  $K_2$  と  $K_5$  が描かれていますが,  $n \leq 3$  までは回廊内に境界からの距離が  $\geq \frac{1}{n}$  の点は存在しないので, 集合  $\{z \in \Omega; \text{dis}(z, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$  は左右に別れています. そこで, 連結性を保証するため右方の連結成分だけを  $K_n$  として採用することにします.  $n = 4$  で左右が線分で繋がるので, それ以後は全体を  $K_n$  とします.

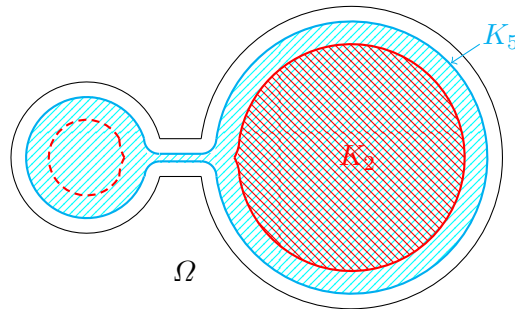


図 W.x

余談ですが, 上の図で  $K_5$  と  $\partial\Omega$  の距離が, 円周部分と回廊部分とでは後者の方が大きいように見えますが, これは錯視現象のせいです. 計算を間違えているのかと思って何度も検討しましたが, 間違いは見つからず, 顔を 45 度傾けて見たところ, 両者の幅が同じに見えたので錯視と気づきました. 偶然にも初めて自分で錯視の例を作れて面白かったです.

#### 【p.204, 8.3 の中 3 線定理が成立する増大度】 (準備中)

【p.222, 楕円曲線の加法公式の同次座標化と単位元の確認】 楕円曲線  $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$  に対する加法公式 (9.12)–(9.13) を同次座標化する. まず楕円曲線の方程式は, 同次座標として  $(\xi, \eta, \zeta)$  を使うことにすると, 本書中に示したように,  $x = \xi/\zeta, y = \eta/\zeta$  を代入して分母を払うと

$$\eta^2 \zeta = \xi^3 + a\xi^2 \zeta + b\xi \zeta^2 + c\zeta^3 \tag{9.16}$$

と同次化される。この上の点を

$$(x_j, y_j) \longleftrightarrow (\xi_j, \eta_j, \zeta_j), \quad j = 1, 2, 3$$

と同次化すれば、 $P = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  と  $Q = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  の和を与える点  $R = (\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$  は (9.12)–(9.13) を同次化した式

$$\frac{\xi_3}{\zeta_3} = \lambda^2 - a - \frac{\xi_1}{\zeta_1} - \frac{\xi_2}{\zeta_2}, \quad \frac{\eta_3}{\zeta_3} = -\lambda \frac{\xi_3}{\zeta_3} - \nu,$$

$$\text{ここに } \lambda = \frac{\eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2}{\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2}, \quad \nu = \frac{\eta_1 - \lambda \xi_1}{\zeta_1}$$

となる。よって求める同次表現はこれらの分母を払った

$$\begin{aligned} \xi_3 : \eta_3 : \zeta_3 &= \lambda^2 - a - \frac{\xi_1}{\zeta_1} - \frac{\xi_2}{\zeta_2} : -\lambda^3 + \lambda \left( a + \frac{\xi_1}{\zeta_1} + \frac{\xi_2}{\zeta_2} \right) - \frac{\eta_1 - \lambda \xi_1}{\zeta_1} : 1 \\ &= \{(\eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^2 - a(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2\}(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2) \zeta_1 \zeta_2 - (\xi_1 \zeta_2 + \zeta_1 \xi_2)(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^3 \\ &\quad : -(\eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^3 \zeta_1 \zeta_2 + (\eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2 \{a \zeta_1 \zeta_2 + \xi_1 \zeta_2 + \zeta_1 \xi_2\} \\ &\quad \quad - \zeta_2(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2 \{ \eta_1(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2) - \xi_1(\eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2) \} \\ &\quad : (\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^3 \zeta_1 \zeta_2 \end{aligned} \tag{W.5}$$

となる。これは一般論により自明なのだが、その理由を説明しておこう。

まず、 $P, Q$  を通る直線の同次方程式は、動座標を  $\xi, \eta, \zeta$  とすれば、

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0 \tag{W.6}$$

に  $P, Q$  の座標を代入して得られる連立 1 次方程式

$$A\xi_1 + B\eta_1 + C\zeta_1 = 0, \quad A\xi_2 + B\eta_2 + C\zeta_2 = 0$$

すなわち

$$A \frac{\xi_1}{\zeta_1} + B \frac{\eta_1}{\zeta_1} + C = 0, \quad A \frac{\xi_2}{\zeta_2} + B \frac{\eta_2}{\zeta_2} + C = 0$$

を  $A, B, C$  について解いた

$$\frac{A}{B} = -\frac{\frac{\eta_2}{\zeta_2} - \frac{\eta_1}{\zeta_1}}{\frac{\xi_2}{\zeta_2} - \frac{\xi_1}{\zeta_1}}, \quad \frac{C}{B} = -\frac{A}{B} \frac{\xi_1}{\zeta_1} - \frac{\eta_1}{\zeta_1}$$

から  $A : B : C$  を求めて (W.6) に代入すると、結局中学で習った公式

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

を同次化した式

$$\frac{\eta}{\zeta} = \lambda \frac{\xi}{\zeta} + \nu, \quad \text{ここに } \lambda = \frac{\eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2}{\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2}, \quad \nu = \frac{\eta_1 - \lambda \xi_1}{\zeta_1}$$

が得られる。これと楕円曲線 (9.16) の交点を求めるのは更に面倒だが、 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  がすべて零と異なる場合は、これらで割り算して非同次の形にすれば計算は本書中で行ったものに帰着されるので、結果の式の分母を払って上のように同次座標の形に表したものは、 $\zeta_1 \zeta_2 \neq 0$  という全空間で稠密な開集合上で有効な式となるので、実は到るところで有効となる。よってこのような計算は、改めてやる必要は無い。

最後に、この同時表現を用いて  $Q = \mathcal{O} = 0 : 1 : 0$  が確かに単位元となっていることを確かめよう。 $P = \xi_1 : \eta_1 : \zeta_1$  は元のままとし、いきなり  $\xi_2 = \zeta_2 = 0$  を (W.5) に代入すると、因子  $\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2$  と  $\zeta_2$  のせいで

すべての項が零になってしまう！しかしこれらの因子を全体から括りだすことはできないので，取り敢えず見やすくするため， $\eta_2 = 1$  を代入してしまうと，

$$\begin{aligned}
\xi_3 : \eta_3 : \zeta_3 &= \{(\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^2 - a(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2\}(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)\zeta_1 \zeta_2 - (\xi_1 \zeta_2 + \zeta_1 \xi_2)(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^3 \\
&: -(\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^3 \zeta_1 \zeta_2 + (\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2 \{a\zeta_1 \zeta_2 + \xi_1 \zeta_2 + \zeta_1 \xi_2\} \\
&\quad - \zeta_2(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2 \{\eta_1(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2) - \xi_1(\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)\} \\
&: (\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^3 \zeta_1 \zeta_2 \\
&= \{(\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^2 \zeta_1 \zeta_2 - (a\zeta_1 \zeta_2 + \xi_1 \zeta_2 + \zeta_1 \xi_2)(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2\}(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2) \\
&: -(\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^3 \zeta_1 \zeta_2 - (\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^3 \eta_1 \zeta_2 + (\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2 (a\zeta_1 \zeta_2 + 2\xi_1 \zeta_2 + \zeta_1 \xi_2) \\
&: (\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^3 \zeta_1 \zeta_2 \tag{W.7}
\end{aligned}$$

ここで  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = (\xi_2, 1, \zeta_2)$  は楕円曲線の同次方程式

$$\zeta_2 = \xi_2^3 + a\xi_2^2 \zeta_2 + b\xi_2 \zeta_2^2 + c\zeta_2^3$$

を満たしているので，ここで  $\zeta_2 \rightarrow 0$  とすれば， $\xi_2 \rightarrow 0$  となるのみならず， $\xi_2 \sim \zeta_2^{1/3}$  のオーダーで 0 に近づく．このことに注意して (W.5) の最後の辺の比例項を順に見ると，まず第 3 項は

$$\zeta_3 \sim \zeta_1^4 \xi_2^3 \zeta_2 = \zeta_1^4 \zeta_2^2$$

となるので，他の 2 項からも  $\zeta_2^2$  を括りだすように務める．第 1 項は，零に収束する最後の因子を除いた部分について

$$\begin{aligned}
&(\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^2 \zeta_1 \zeta_2 - (a\zeta_1 \zeta_2 + \xi_1 \zeta_2 + \zeta_1 \xi_2)(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2 \\
&= \zeta_1^3 \zeta_2 - \zeta_1^3 \xi_2^3 - (a\zeta_1 + \xi_1)\zeta_1^2 \xi_2^2 \zeta_2 + 2\xi_1 \zeta_1^2 \xi_2^2 \zeta_2 \pmod{O(\zeta_2^2)} \tag{W.8}
\end{aligned}$$

ここで，見かけの主要部は

$$\zeta_1^3 \zeta_2 - \zeta_1^3 \xi_2^3 \sim \zeta_1^3 \zeta_2 - \zeta_1^3 \zeta_2 = 0$$

でキャンセルが起きているので， $\xi_2$  の漸近展開をもう 1 項見る必要がある．これには Newton が発明した計算法を用いて，

$$\xi_2 = \zeta_2^{1/3} + k\zeta_2^q + \dots, \quad \text{ここに } q > \frac{1}{3}, \text{ また } \dots \text{ は更に高次の部分}$$

と置いて上に代入すると，

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= (\zeta_2^{1/3} + k\zeta_2^q + \dots)^3 + a(\zeta_2^{1/3} + k\zeta_2^q + \dots)^2 \zeta_2 + b(\zeta_2^{1/3} + k\zeta_2^q + \dots)\zeta_2^2 + C\zeta_2^3 \\
&= \zeta_2 + 3k\zeta_2^{2/3+q} + a\zeta_2^{2/3+1} + \dots
\end{aligned}$$

よって  $q = 1, k = -\frac{a}{3}$  と定まる．すると

$$\xi_2 \sim \zeta_2^{1/3} - \frac{a}{3}\zeta_2 + \dots, \tag{W.9}$$

$$\therefore \xi_2^3 \sim \zeta_2 - a\zeta_2^{5/3} + \dots \tag{W.10}$$

となるので，これより (W.8) は

$$= a\zeta_1^3 \zeta_2^{5/3} - a\zeta_1^3 \xi_2^2 \zeta_1 - \xi_1 \xi_2^2 \zeta_2 + 2\xi_1 \zeta_1^2 \xi_2^2 \zeta_2 = \xi_1 \xi_2^2 \zeta_2 \pmod{o(\zeta_2^{5/3})}$$

となる．よって第 1 項はこれに  $(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2) \sim \zeta_1 \xi_2$  を掛けて

$$\xi_3 \sim \xi_1 \zeta_1^3 \zeta_2^2 \pmod{o(\zeta_2^2)}$$

となる。最後に第2項は

$$\begin{aligned}
\eta_3 &= -(\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^3 \zeta_1 \zeta_2 - (\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^3 \eta_1 \zeta_2 + (\zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)(\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2)^2 (a \zeta_1 \zeta_2 + 2 \xi_1 \zeta_2 + \zeta_1 \xi_2) \\
&\sim -\zeta_1^4 \zeta_2 + 3 \zeta_1^3 \eta_1 \zeta_2^2 - \eta_1 \zeta_1^3 \xi_2^3 \zeta_2 + \zeta_1^4 \xi_2^3 + a \zeta_1^4 \xi_2^2 \zeta_2 + 2 \xi_1 \zeta_1^3 \xi_2^2 \zeta_2 - \eta_1 \zeta_1^3 \xi_2^3 \zeta_2 \\
&\sim -\zeta_1^4 \zeta_2 + 3 \eta_1 \zeta_1^3 \zeta_2^2 - \eta_1 \zeta_1^3 \zeta_2^2 + \zeta_1^4 \zeta_2 - a \zeta_1^4 \zeta_2^{5/3} + a \zeta_1^4 \zeta_2^{5/3} - \eta_1 \zeta_1^3 \xi_2^3 \zeta_2 \\
&\sim \eta_1 \zeta_1^3 \zeta_2^2 \pmod{o(\zeta_2^2)}.
\end{aligned}$$

よって

$$\xi_3 : \eta_3 : \zeta_3 \sim \xi_1 \zeta_1^3 \zeta_2^2 : \eta_1 \zeta_1^3 \zeta_2^2 : \zeta_1^4 \zeta_2^2 = \xi_1 : \eta_1 : \zeta_1$$

となるので、 $\zeta_2 \rightarrow 0$  のとき、これは  $P = \xi_1 : \eta_1 : \zeta_1$  に近づく。以上で  $P + \mathcal{O} = P$  が計算でも示された。

この証明法は極限論法を使っているのので、有限体の場合には通用しないが、同じ事実は有限体でも成り立つはずなので、多分代数的な証明があるはずですね。楕円曲線の方程式を用いて変形すればできると思いますが、まだやっていません。

**[p.228, Riemann-Roch の定理の紹介]** まず、本書ではスペースが無くて紹介できなかった次の記号を導入します。Riemann 面  $\mathfrak{R}$  上の有理型関数の集合を  $\mathcal{M}(\mathfrak{R})$  で表します。 $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R})$  が定める因子 ( $f$ ) を

$$(f) := \sum_{j=1}^m \mu_j \alpha_j + \sum_{k=1}^n (-\nu_k) \beta_k$$

により定めます。ここで、 $\alpha_j$  は  $f$  の零点、 $\mu_j$  はその位数で、 $\beta_k$  は  $f$  の極、 $\nu_k$  はその位数です。これらは  $\mathfrak{R}$  の局所座標を用いて普通に調べます。座標の選び方によらないことはほぼ自明ですね。次に、抽象的な因子  $D = \sum_{j=1}^m \mu_j \alpha_j + \sum_{k=1}^n (-\nu_k) \beta_k$ , ここに  $\mu_j > 0, \nu_k > 0$ , に対し、

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}) ; (f) + D \geq 0\}$$

と置きます。ここで一般に因子が非負  $\geq 0$  であるとは、その係数がどれも負でないという意味です。従って  $L(D)$  は  $\alpha_j$  において高々  $\mu_j$  位の極を持ち、 $\beta_k$  において少なくとも  $\nu_k$  位の零点を持つような  $\mathfrak{R}$  上の有理型関数の全体が成す  $\mathbf{C}$  上の線形空間を表します。この  $\mathbf{C}$  上の次元が本書中でも紹介した  $l(D)$  です。

さて、Riemann 球面の場合は  $g = 0$  で、標準 1 次形式  $dz$  は本書中にも記したように  $K = -2\infty$  となり  $\deg(K) = -2$  なので、Riemann-Roch の公式は

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1$$

となります。今、

$$D = \sum_{j=1}^m \mu_j \alpha_j, \quad \mu_j > 0$$

に対して  $l(D)$  を調べると、 $\deg(D) = N := \sum_{k=1}^n \nu_k$  であり、このとき  $K - D$  は正の項を含まないので、 $L(K - D)$  の元は整関数となります。しかも無限遠点  $\infty$  では本当に負の係数が存在するので、そこでは少なくとも 2 位の零点を持ち、従って Liouville の定理により零となります。故に  $L(K - D) = \{0\}$ , 従って  $l(K - D) = 0$  となり、Riemann-Roch の等式は

$$l(D) = N + 1 \tag{W.11}$$

となります。 $N = 0$  のときは定数関数が 1 次元あるので、 $l(D) = 1$  と整合的ですが、この後、極の位数が全体で一つ増える毎に  $L(D)$  はちょうど 1 次元ずつ増えてゆくことがこの式から分かります。

次に、楕円曲面の場合には、 $g = 1$  で、p.225, (9.17) の表現を用いると、 $\mathbf{C}$  上の 1 次微分形式  $dz$  から  $\mathbf{T}$  上に誘導されたものがそのまま標準 1 次形式として使えるので、この係数は零点も極も無く、従って  $K = 0$  です。故にこの場合の Riemann-Roch の公式は

$$l(D) - l(-D) = \deg(D)$$



となるので、1位の極一つだけに相当する因子  $D = \alpha$  の場合は  $\deg D = 1$  で、公式は

$$l(D) - l(-D) = 1$$

となりますが、ここで  $l(-D)$  は点  $\alpha$  で少なくとも1位の零点を持つような有理型関数が成す線形空間の次元で、Liouville の定理によりこれは0しか無いので、 $l(-D) = 0$ .  $l(D)$  が点  $\alpha$  に高々1位の極を持ち、それ以外では正則な  $T$  上の有理型関数が成す線形空間の次元となるので、上の式から  $l(D) = 1$  となりますが、これは定数の1次元分を含んでいるので、それ以外には無いことが分かります。これが本書 p.219 に書いた疑問への回答です。

ちなみに  $D = 2\alpha$  の場合は、 $l(D)$  は点  $\alpha$  で少なくとも2位の極を持つような  $T$  上の有理型関数の成す線形空間の次元ですが、このような関数は Weierstrass の  $\wp$  関数として作りました。この場合は Riemann-Roch の式は

$$l(D) - l(-D) = 2$$

となり、同様に  $l(-D) = 0$  なので  $l(D) = 2$  となり、定数以外にもう1次元だけそのような関数が存在することが分かります。従って、それは  $\wp$  の定数倍に限ることが分かります。

なお、Riemann-Roch の定理の証明は、かなり長いので別文書 `proof_of_Riemann-Roch_theorem.pdf` としてここに置きます。(準備中)

**[p.228, 図 9.9 への補足]** 単位円  $C: |z| = 1$  と同心円  $|z| = s$  を考える。後者の上の点

$$w_k = se^{2k\pi i/8} = se^{k\pi i/4} = s\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

を中心とする半径  $r$  の円弧を描き、これらの周の一部からなる八角形  $D$  を作る。これがある Fuchs 群の基本領域となるようにしよう。 $D$  の辺は単位円板の Poincaré 計量に関する測地線でなければならないことが一般論で知られており、これは単位円  $C$  と直交するような円弧または直径であることと同値である。これより円弧を定める円  $|z - w_k| = r$  は  $C$  と直交し、これから  $r$  と  $s$  の間には以下のような関係が必要となる：交点のうち上半平面にあるものを  $z$  とすれば、円弧の直交条件はそこを通る半径の直交条件と同値なので、

$$\begin{aligned} |z| = 1, \quad |z - s| = r, \\ z \perp z - s, \quad \text{従って, } z - s = irz, \quad z = \frac{s}{1 - ir}. \end{aligned}$$

これらから  $z$  を消去すると、

$$1 = z\bar{z} = \frac{s}{1 - ir} \cdot \frac{s}{1 + ir} = \frac{s^2}{1 + r^2}, \quad \text{従って, } s^2 = 1 + r^2. \quad (\text{W.12})$$

$w_k, w_{k+1}$  を中心とする円が交わる点を  $z_k$  で表す。まず最初の二つの円

$$(x - s)^2 + y^2 = r^2, \quad \left(x - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2$$

の交点を求める。後者から前者を引き算して得られる根軸の方程式

$$(2 - \sqrt{2})sx - \sqrt{2}sy = 0, \quad \therefore y = (\sqrt{2} - 1)x$$

(この勾配は  $\sqrt{2} - 1 = \tan \frac{\pi}{8}$  から求める) を第一の円の式に代入して

$$(x - s)^2 + ((\sqrt{2} - 1)x)^2 = r^2, \quad (4 - 2\sqrt{2})x^2 - 2sx + s^2 = r^2.$$

$$\text{従って (W.12) より } (4 - 2\sqrt{2})x^2 - 2sx + 1 = 0.$$

これより  $z_0 = x_0 + iy_0$  として

$$x_0 = \frac{s - \sqrt{s^2 - (4 - 2\sqrt{2})}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \left\{ s - \sqrt{s^2 - 4 + 2\sqrt{2}} \right\},$$

従って

$$y_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ s - \sqrt{s^2 - 4 + 2\sqrt{2}} \right\}$$

を得る。(プラスの方に対応する点は図から分かるように円外になる。) ここで

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = 1.08239220029239396879944641 \dots$$

に注意せよ。すなわち、 $s$  がこれより小さいと上の解の分子の根号内が負になり、二つの円は交わらなくなる。

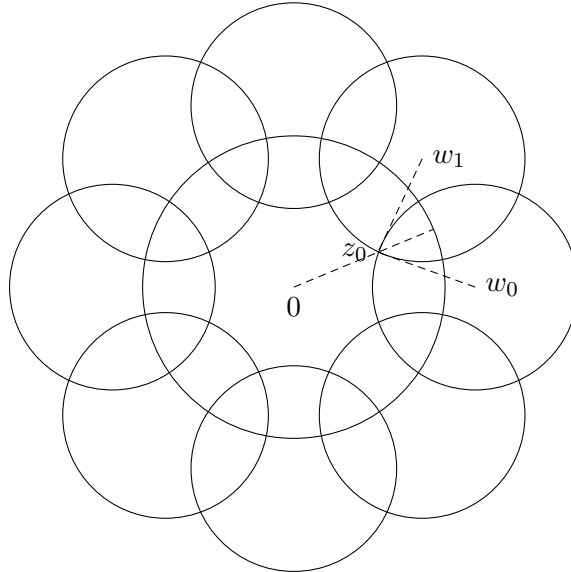


図 W.3 この図は直交条件を無視し  $s = 1.2$ ,  $r = 0.68$  で描いている。

さて、八角形の頂角は、頂点で各円への接線が成す角であるが、それらの半径がこの点で接線に垂直なので、図から分かるように、この点での半径の成す角と互いに補角の関係に有る。後者は簡単に

$$\begin{aligned} \alpha &:= \arg \frac{w_1 - z_0}{w_0 - z_0} = \arg \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}s - (x_0 + iy_0)}{s - (x_0 + iy_0)} = \arg \frac{\left\{ \frac{s}{\sqrt{2}} - x_0 + i\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - y_0\right) \right\} (s - x_0 + iy_0)}{(s - x_0)^2 + y_0^2} \\ &= \arg \frac{\left\{ \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x_0\right)(s - x_0) - \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - y_0\right)y_0 \right\} + i\left\{ \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x_0\right)y_0 + \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - y_0\right)(s - x_0) \right\}}{(s - x_0)^2 + y_0^2} \\ &= \text{Arctan} \frac{\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x_0\right)y_0 + \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - y_0\right)(s - x_0)}{\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x_0\right)(s - x_0) - \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - y_0\right)y_0}. \end{aligned}$$

一般論によれば、八角形の頂角の総和が  $2\pi$  になれば、従って一つの角が  $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$  になれば、この八角形が 1 次変換  $\sigma_k$  で円弧  $\widehat{z_k z_{k+1}}$  を円弧  $\widehat{z_{k+3} z_{k+2}}$  に写すようなもので生成される Fuchs 群の基本領域となることが知られている。従ってこの条件は  $\pi - \alpha = \frac{\pi}{4}$ , すなわち  $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ , 従って

$$\frac{\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x_0\right)y_0 + \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - y_0\right)(s - x_0)}{\left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x_0\right)(s - x_0) - \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - y_0\right)y_0} = \tan \frac{3}{4}\pi = -1$$

となる。これに上で求めた  $x_0, y_0$  の表現を代入して得られる  $s$  の方程式を 2 分法で解くと

$$s = 1.098684113467809 \dots, \quad r = 0.455089860562226 \dots$$

が得られる。このとき

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)s = 0.776886987015018 + 0.776886987015018i$$

となる。また円  $w_0$  と  $w_1$  の交点は

$$z_0 = 0.776886987015021 + 0.321797126452792i$$

である。上の図をこの  $s, r$  の値に対して描き直すと

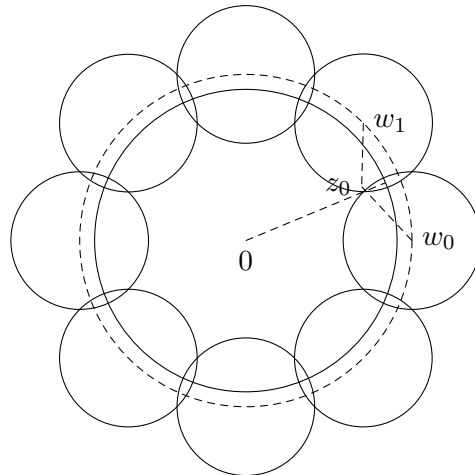


図 W.y 基本集合の作図

ここで内部の八角形の部分だけを残したのが本書に掲載した図である。以下、これが種数 2 の Riemann 面を表すことを見よう。最終的には紙の表側が出来上がる Riemann 面の外側になるようにするのだが、途中の変形を見やすくするため、一旦紙を裏返すと、

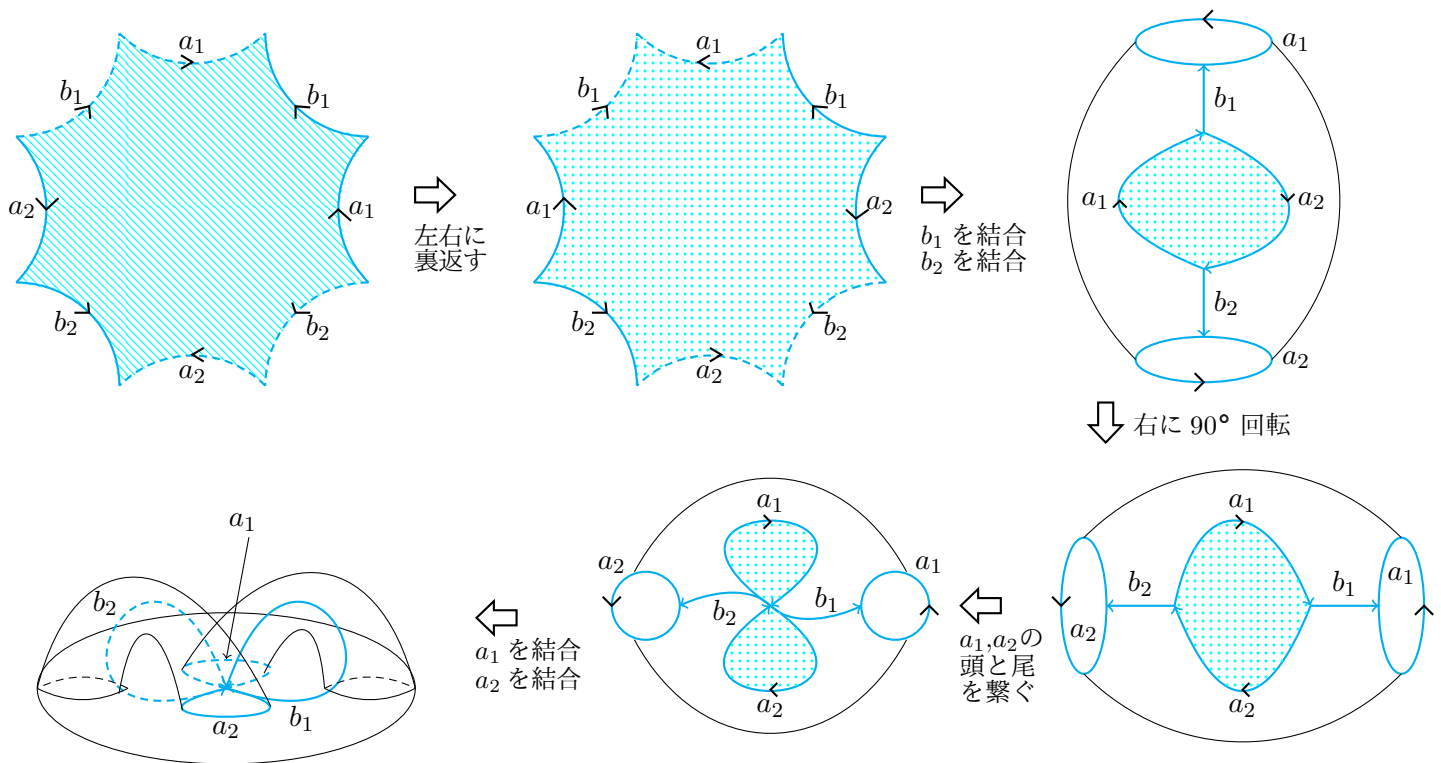


図 W.z 種数 2 の Riemann 面の工作

最初に名前が浸けられた有向辺  $a_1, a_2, b_1, b_2$  はこうして出来上がった“二人乗りの浮袋”のホモロジー群の生成元を与える閉曲線となっていることが分かります。

上の変形の説明はトポロジカルなものだが、楕円曲線の場合の平行移動による剰余類群のような計算による変形は、出発の図の同じ名前を持つ向き付けられた辺を互いに他に写すような1次変換が生成する Fuchs 群で単位円の点を同一視することにより得られる。例えば、実線の  $a_1$  を点線の  $a_1$  に写すには、まず実線の  $a_1$  をそれ自身に、ただし始点と終点を入れ替えて写すような1次変換を求め、それに  $i$  を掛ければよい。(正則写像なので  $x$  軸に関する鏡映などは使えない！これから求めるのは、単位円板の Poincaré 計量に関する“回転”であるが、この計量に関する直線(測地線)はそれが通る2点で一意に定まるので、この条件から対象とする円が同じ円に写ることが保証されるのである。) 前者は数値的には  $w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$  のパラメータ、 $e^{i\theta}, \alpha$  を

$$0.776886987015021 + 0.321797126452792i = e^{i\theta} \frac{0.776886987015021 - 0.321797126452792i - (a + bi)}{1 - (0.776886987015021 - 0.321797126452792i)(a - bi)}$$

という方程式から

$$\begin{aligned} & (0.776886987015021 + 0.321797126452792i) \\ & \times \{1 - 0.776886987015021a + 0.321797126452792b + (0.321797126452792a + 0.776886987015021b)i\} \\ & = (\cos \theta + i \sin \theta)(0.776886987015021 - a - (0.321797126452792 + b)i). \end{aligned}$$

従って両辺の実部・虚部を等値して、まず実部から

$$\begin{aligned} & 0.776886987015021(1 - 0.776886987015021a + 0.321797126452792b) \\ & - 0.321797126452792(0.321797126452792a + 0.776886987015021b) \\ & = (0.776886987015021 - a) \cos \theta + (0.321797126452792 + b) \sin \theta, \\ \therefore & (0.7071067811865516 - \cos \theta)a + b \sin \theta = 0.776886987015021(1 - \cos \theta) - 0.321797126452792 \sin \theta. \end{aligned}$$

また虚部から

$$\begin{aligned} & 0.321797126452792(1 - 0.776886987015021a + 0.321797126452792b) \\ & + 0.776886987015021(0.321797126452792a + 0.776886987015021b) \\ & = (0.776886987015021 - a) \sin \theta - (0.321797126452792 + b) \cos \theta, \\ \therefore & a \sin \theta + (0.7071067811865516 + \cos \theta)b = 0.776886987015021 \sin \theta - 0.321797126452792(1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

同様に

$$0.776886987015021 - 0.321797126452792i = e^{i\theta} \frac{0.776886987015021 + 0.321797126452792i - (a + bi)}{1 - (0.776886987015021 + 0.321797126452792i)(a - bi)}$$

という方程式から、

$$\begin{aligned} & (0.776886987015021 - 0.321797126452792i) \\ & \times \{1 - 0.776886987015021a - 0.321797126452792b + (-0.321797126452792a + 0.776886987015021b)i\} \\ & = (\cos \theta + i \sin \theta)(0.776886987015021 - a - (-0.321797126452792 + b)i). \end{aligned}$$

従って両辺の実部・虚部を等値して、まず実部から

$$\begin{aligned} & 0.776886987015021(1 - 0.776886987015021a - 0.321797126452792b) \\ & + 0.321797126452792(-0.321797126452792a + 0.776886987015021b) \\ & = (0.776886987015021 - a) \cos \theta + (-0.321797126452792 + b) \sin \theta, \\ \therefore & (0.7071067811865516 - \cos \theta)a + b \sin \theta = 0.776886987015021(1 - \cos \theta) + 0.321797126452792 \sin \theta. \end{aligned}$$

また虚部から

$$\begin{aligned} & 0.321797126452792(1 - 0.776886987015021a - 0.321797126452792b) \\ & + 0.776886987015021(-0.321797126452792a + 0.776886987015021b) \\ & = (0.776886987015021 - a) \sin \theta - (-0.321797126452792 + b) \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\therefore a \sin \theta + (0.7071067811865516 + \cos \theta)b = 0.776886987015021 \sin \theta + 0.321797126452792(1 + \cos \theta).$$

これらから、まず  $1 + \cos \theta = 0$ ,  $\sin \theta = 0$ , 従って  $\theta = \pi$ ,  $e^{i\theta} = -1$  でなければならない。このとき  $a, b$  の連立方程式として

$$\begin{aligned} (0.7071067811865516 + 1)a &= 0.776886987015021 \times 2, \\ (0.7071067811865516 - 1)b &= 0, \\ \therefore a &= 0.9101797211244552b = 0 \end{aligned}$$

が得られ、これから、求める Fuchs 群の第 1 生成元として

$$\sigma_1(z) = -i \frac{z - 0.9101797211244552}{1 - 0.9101797211244552z}$$

が得られる。これより他の生成元

$$\sigma_2(z) = e^{\pi i/4} \sigma_1(e^{-\pi i/4} z), \quad \sigma_3(z) = e^{\pi i/4} \sigma_1(-z), \quad \sigma_4(z) = e^{\pi i/4} \sigma_1(-e^{-\pi i/4} z)$$

も得られる。

$$\sigma_4^{-1} \circ \sigma_3^{-1} \circ \sigma_4 \circ \sigma_3 \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = id.$$

**[p.241, 問 2.4-3 (2) の解答]** 正則関数  $f(z)$  が点  $z$  において、 $|h|$  が十分小さい任意の  $h$  に対して  $0 \leq c \leq 1$  なる  $\exists c$  について  $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z+ch)$  を満たすとすると、 $z$  を中心に  $f$  を Taylor 展開して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} h^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} c^n h^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!} c^{n-1} h^{n-1}.$$

$c$  が  $h$  には依存しないとすると、 $h$  の各幂で係数比較して、 $n \geq 1$  について

$$f^n(z) \neq 0 \implies nc^{n-1} = 1.$$

この関係が無限に多くの  $n$  について成り立つことは有り得ないので、有限個の  $n$  を除き  $f^n(z) = 0$ .  $f(z)$  は正則関数なので、この場合は  $z$  の多項式でなければならない。特に  $f''(z) \neq 0$  とすれば、 $c = \frac{1}{2}$  となり、このときは、 $n = 1, n = 2$  で  $nc^{n-1} = 1$  は成り立つが、 $n \geq 3$  では成り立たないので、 $f(z)$  は  $z$  の 2 次以下の多項式となる。同様に  $f''(z) = 0$  で  $f'''(z) \neq 0$  なら  $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$  となり、 $n \geq 4$  で  $f^n(z) = 0$  となるが、この場合は  $f'(z) = 0$  も必要で、固定点を  $z_0$  と書き直せば結局  $f(z) = \alpha_0 + (z - z_0)^3$  の形の 3 次関数になる。2 次多項式の場合と異なり、 $z \neq z_0$  では  $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z + \frac{h}{\sqrt{3}})$  は成り立たない。

$c$  が  $h$  に依存してもよい場合の考察は (続)

**[p.245, 問 3.3-2 の解答]**  $\sum_{j=1}^N |z_j - z_{j-1}|$  が上に有界でないとする。このとき  $\sum_{j=1}^N |x_j - x_{j-1}|, \sum_{j=1}^N |y_j - y_{j-1}|$  のどちらかは上に有界でないので、話を決めるため前者であるとする。曲線のパラメータ表示を  $z = \Phi(t)$ ,  $x = \operatorname{Re} z = \varphi(t)$ ,  $y = \operatorname{Im} z = \psi(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  とし、以下  $\varphi(t)$  を用いる。すると仮定から  $\forall n$  について

$$L_n := \sum_{j=1}^{N_n} |\varphi(t_{nj}) - \varphi(t_{n,j-1})| > 3^n + 2^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} L_k$$

となるような  $[0, T]$  の分割  $\Delta_n = \{j_{n0}, j_{n1}, \dots, j_n, N_n\}$  が帰納法で作れる。このとき、 $\Delta_n$  は  $\Delta_{n-1}$  の細分であるとしても一般性を失わない。実際そうでなければ、見つけた  $\Delta_n$  を  $\Delta_{n-1}$  との共通細分で置き換えても上の不等式は成り立つ。今、

$$L_n^+ := \sum_{j: \varphi(t_{nj}) - \varphi(t_{n,j-1}) \geq 0} (\varphi(t_{nj}) - \varphi(t_{n,j-1})), \quad L_n^- := \sum_{j: \varphi(t_{nj}) - \varphi(t_{n,j-1}) < 0} -(\varphi(t_{nj}) - \varphi(t_{n,j-1}))$$

と置けば、

$$L_n^+ + L_n^- = L_n, \quad L_n^+ - L_n^- = \sum_{j=1}^{N_n} (\varphi(t_{nj}) - \varphi(t_{n,j-1})) = \varphi(t_N) - \varphi(t_0) = \varphi(T) - \varphi(0)$$

である。よってこれらを加えて 2 で割れば

$$L_n^+ = \frac{1}{2}L_n + \frac{1}{2}(\varphi(T) - \varphi(0))$$

となるので、 $L_n^+$  もほぼ  $L_n$  と似た速さで増大する。今

$$f_n(z) = f_n(\Phi(t)) = \begin{cases} 1, & t_{j-1} \leq t < t_j \quad (t_{j-1}, t_j \in \Delta_n), \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で  $C$  上の実数値階段関数  $f_n$  を定めれば、これに対する線積分  $\int_C f(z) dx$  の分割  $\Delta_n$  を用いた近似和は

$$S_{\Delta_n}(f_n) := \sum_{j=1}^{N_n} f_n(\Phi(t_{n,j-1}))(\varphi(t_{nj}) - \varphi(t_{n,j-1})) = L_n^+$$

となる。他方、 $m < n$  に対する分割  $\Delta_m$  での近似和  $S_{\Delta_m}(f_n)$  は、

$$\left| \sum_{j=1}^{N_m} f_n(\Phi(t_{m,j-1}))(\Phi(t_{mj}) - \Phi(t_{m,j-1})) \right| \leq \sum_{j=1}^{N_m} |\varphi(t_{mj}) - \varphi(t_{m,j-1})| = L_m,$$

また、 $m > n$  に対する分割  $\Delta_m$  での近似和  $S_{\Delta_m}(f_n)$  は、 $\Delta_m$  が  $\Delta_n$  の細分となっていることから、 $f_n$  の値が 1 の  $\Delta_n$  の区間  $t_{n,j-1} \leq t < t_{nj}$  では、単に  $t_{n,j-1} \leq t_{m,k-1} < t_{mk} \leq t_{nj}$  に対する  $\varphi(t_{mk}) - \varphi(t_{m,k-1})$  の和となるので、結局  $\varphi(t_{nj}) - \varphi(t_{n,j-1})$  に帰着し、近似和全体は  $S_{\Delta_n}(f_n)$  に等しくなる。そこで

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(z) \quad i.e. \quad f(\Phi(t)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(\Phi(t)) \quad (\text{W.13})$$

という関数を考えると、これの  $\Delta_n$  に対する近似和は、

$$\begin{aligned} S_{\Delta_n}(f) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} S_{\Delta_n}(f_m) = \sum_{m < n} \frac{1}{2^m} S_{\Delta_n}(f_m) + S_{\Delta_n}(f_n) + \sum_{m > n} \frac{1}{2^m} S_{\Delta_n}(f_m) \\ &= \sum_{m < n} \frac{1}{2^m} S_{\Delta_n}(f_m) + S_{\Delta_n}(f_n) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \sum_{m < n} \frac{1}{2^m} S_{\Delta_m}(f_n) + \frac{1}{2^{n-1}} S_{\Delta_n}(f_n) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} S_{\Delta_n}(f) &\geq \frac{1}{2^{n-1}} S_{\Delta_n}(f_n) - \sum_{m < n} \frac{1}{2^m} |S_{\Delta_m}(f_n)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} L_n^+ - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2^m} L_m \\ &\geq \frac{1}{2^n} L_n - \frac{1}{2^n} |\varphi(T) - \varphi(0)| - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2^m} L_m \geq \frac{3^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} |\varphi(T) - \varphi(0)|. \end{aligned}$$

これは  $n$  とともにいくらでも大きくなるから、 $f$  は線積分  $\int_C f dz$  (の実部) が収束しない例となる。ただし  $f$  はまだ連続ではないので、これを連続関数に修正する必要がある。これには、各  $n$  について  $f_n$  の値が 1 となる区間の両端で幅がその区間の  $\varepsilon_n$  倍のマージンを取り、関数の値を 1 から 0 に線形に切り落として階段関数  $f_n$  を連続関数  $g_n$  に修正する。  $0 \leq g_n \leq f_n \leq 1$  なので、この修正の結果生じる線積分の近似和  $S_{\Delta_n}(f)$  への差分は高々  $2L_n\varepsilon_n^+$  である。従って、 $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2L_n^+}$  と取れば、級数 (W.13) において  $f_n$  を  $g_n$  に置き換えたものはやはり一様収束し、連続関数  $g$  を定めるが、それは任意の  $n$  について

$$S_{\Delta_n}(g) \geq \frac{3^n}{2^n} - \frac{1}{2^n}|\varphi(T) - \varphi(0)| - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \frac{3^n}{2^n} - \frac{1}{2^n}|\varphi(T) - \varphi(0)| - \varepsilon$$

を満たす。よって  $g$  は  $\int_C g(z)dz$  の実部  $\int_C g(z)dx$  が  $+\infty$  に発散するような連続関数の例となっている。

【p.247, 問 4.2-2 (2) の解答中の積分の計算】

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(a-t)^{n+2}} dt &= \int_0^1 \frac{(a-t+1-a)^n}{(a-t)^{n+2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{(a-t)^{n+2}} \sum_{k=0}^n {}_n C_k (a-t)^{n-k} (1-a)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (1-a)^k \int_0^1 \frac{1}{(a-t)^{k+2}} dt = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (1-a)^k \left[ \frac{1}{(k+1)(a-t)^{k+1}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} (1-a)^k \left( \frac{1}{(a-1)^{k+1}} - \frac{1}{a^{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n {}_{n+1} C_{k+1} (1-a)^k \left( \frac{(-1)^{k+1}}{(1-a)^{k+1}} - \frac{1}{a^{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(1-a)} \sum_{k=0}^n {}_{n+1} C_{k+1} (-1)^{k+1} - \frac{1}{(n+1)(1-a)} \sum_{k=0}^n {}_{n+1} C_{k+1} \left( \frac{1-a}{a} \right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)(1-a)} \left\{ -1 + \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1} C_k (-1)^k \right\} - \frac{1}{(n+1)(1-a)} \left\{ -1 + \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1} C_k \left( \frac{1-a}{a} \right)^k \right\} \\ &= -\frac{1}{(n+1)(1-a)} + \frac{1}{(n+1)(1-a)} - \frac{1}{(n+1)(1-a)} \left( 1 + \frac{1-a}{a} \right)^{n+1} \\ &= -\frac{1}{(n+1)(1-a)} \frac{1}{a^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(a-1)a^{n+1}}. \end{aligned}$$

別法 まず,

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-bt)^2} dt = \frac{1}{b} \left[ \frac{1}{1-bt} \right]_0^1 = \frac{1}{b} \left( \frac{1}{1-b} - 1 \right) = \frac{1}{1-b}$$

に注意し、この両辺を  $b$  で  $n$  回微分すると,

$$\int_0^1 \frac{(n+1)! t^n}{(1-bt)^{n+2}} dt = \frac{n!}{(1-b)^{n+1}}. \quad \therefore \int_0^1 \frac{t^n}{(1-bt)^{n+2}} dt = \frac{1}{(n+1)(1-b)^{n+1}}.$$

ここで、 $t \mapsto 1-t$  と変換すると、最後の積分は

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1-b(1-t))^{n+2}} dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1-b+bt)^{n+2}} dt = \frac{(-1)^n}{b^{n+2}} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{\left(\frac{b-1}{b} - t\right)^{n+2}} dt$$

と変形されるので,

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{\left(\frac{b-1}{b} - t\right)^{n+2}} dt = -\frac{b}{(n+1)\left(\frac{b-1}{b}\right)^{n+1}}$$

が得られる。ここで  $\frac{b-1}{b} = a$ , 従って  $b = -\frac{1}{a-1}$  と変換すれば,

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(a-t)^{n+2}} dt = \frac{1}{(n+1)(a-1)a^{n+1}}.$$

なお、仮定  $|a| > 1$  から、 $\frac{|1-b|}{|b|} > 1$ , すなわち、 $\operatorname{Re} b < \frac{1}{2}$  なので、途中の計算は正当である。このように  $a, b$  とも複素数が許されているのでこれらの計算は完全に微積分の範囲と言うよりは、本書の第 2 章 2.1 節までぐらいの内容である。

**[p.247, 問 4.2-2 (3) の解答への補足]** まず、本書に書いた関数の例で (4.17), (4.19) の評価がどうなるかを具体的に調べる。本書で断ったように、以下  $\alpha = 0$  とするが、これは複素平面の平行移動でいつでも実現できるので、二つの評価の優劣には影響しない。

$f(z) = z$  のとき、(4.17) の右辺は

$$\frac{|z - \alpha|^{n+1}}{(R-r)R^n} R = \begin{cases} \frac{R}{R-r} |z - \alpha|, & n = 0 \text{ のとき} \\ \frac{1}{(R-r)R^{n-1}} |z - \alpha|^{n+1}, & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

他方、(4.19) の右辺は  $n \geq 1$  のとき 0 となる。実際の Taylor 展開は 1 次で止まっているので、この場合は後者の方が精密な評価と言える。ちなみに  $n = 0$  のときもこちらは

$$|z - \alpha|$$

となるので、前者の評価よりも精密である。

次に、 $f(z) = \frac{1}{R+\varepsilon-z}$  のときは、(4.17) の右辺は

$$\frac{|z - \alpha|^{n+1}}{(R-r)R^n} \frac{1}{R + \varepsilon - r}$$

他方、(4.19) の右辺は

$$\frac{|z - \alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(n+1)!}{(R + \varepsilon - r)^{n+2}} = \frac{|z - \alpha|^{n+1}}{(R + \varepsilon - r)^{n+2}}$$

となるので、 $\varepsilon$  が小さいとき、前者の方が精密となる。具体的には

$$(R + \varepsilon - r)^{n+2} < (R-r)R^n(R + \varepsilon - r)$$

すなわち

$$(R - r + \varepsilon)^{n+1} < (R-r)R^n$$

のときであり、 $n = 0$  のときは  $\varepsilon > 0$  をどう取っても成り立たないが、 $n = 1$  のときは

$$(R - r + \varepsilon)^2 < (R-r)R, \quad \text{すなわち} \quad \varepsilon < \sqrt{(R-r)R} - (R-r) = \sqrt{R-r}(\sqrt{R} - \sqrt{R-r})$$

で成り立つので、このとき  $n \geq 2$  でも成り立つ。

なお逆に、例えば  $\varepsilon > r$  としてしまうと、いつでも (4.19) の評価の方が良くなるので。実はこちらの関数一つだけでも優劣が関数依存なことが分かる。

**[p.251, 問 5.5-2 (3) の解答への補遺]** この解答は計算が長いので、別解を一つ示す。  $0 \leq a < 1$  をパラメータとして積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 - 2az + 1} dz$  を考えると、分母の零点が  $z = a \pm \sqrt{a^2 - 1} = a \pm \sqrt{1 - a^2}i$  で + の方だけが上半平面に有るので、積分路を上方にずらすとこれは留数計算で

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 - 2az + 1} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a+\sqrt{1-a^2}i} \frac{1}{z^2 - 2az + 1} = \frac{2\pi i}{a + \sqrt{1-a^2}i - (a - \sqrt{1-a^2}i)} \\ &= \frac{2\pi i}{2\sqrt{1-a^2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}$$

と求まる。この最左辺と最右辺を  $a$  で 2 回微分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8z^2}{(z^2 - 2az + 1)^3} dz = \frac{d}{da} \left( \frac{a\pi}{(1-a^2)^{3/2}} \right) = \frac{\pi}{(1-a^2)^{3/2}} + a\pi \frac{d}{da} \left( \frac{1}{(1-a^2)^{3/2}} \right)$$



となるので,  $a = 0$  と置けば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8z^2}{(z^2+1)^3} dz = \pi, \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)^3} dz = \frac{\pi}{8}.$$

右辺の  $a$  に関する微分は実質的にほぼ 1 回で済んでいることに注意せよ. 従ってこの方が少し楽であろう.

**[p.252, 問 5.5-4 (3) の解答への補遺]** 本書中で述べた解法はいかにもダサい気がするのので, もう少しエレガントな解法を載せておく. 問 5.5-5 (5) の結果  $\int_0^{\infty} \frac{x^q}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{q}{2}\pi}$  の両辺を  $q$  で 2 回微分すると

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2 x^q}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} \frac{d}{dq} \left( \frac{\pi \sin \frac{q}{2}\pi}{2 \cos^2 \frac{q}{2}\pi} \right) = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos \frac{q}{2}\pi} + \sin \frac{q}{2}\pi \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{\cos^2 \frac{q}{2}\pi} \right) \right\}.$$

ここで  $q = 0$  と置けば

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2+1} dx = \left( \frac{\pi}{2} \right)^3 = \frac{\pi^3}{8}.$$

この方法だと一般の冪についても形式的に

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^n}{x^2+1} dx = \frac{d^n}{dq^n} \left( \frac{1}{\cos \frac{q}{2}\pi} \right) \Big|_{q \rightarrow 0}$$

と表すことができる. ただし, 具体的な  $n$  についてこれを求めるのは, 微分計算の途中では  $q = 0$  と置けないので,  $n$  に関する漸化式を求めるのもやっかいは似たようなものとなる.

**[p.259, 問 7.3-4 (ii) の解答への補遺]**  $r = \sqrt{\varepsilon^2(\cos \theta + \sin \theta)^2 + 1 + 2\varepsilon - \varepsilon(\cos \theta + \sin \theta)}$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  で  $|\frac{1}{r}e^{i\theta} + \varepsilon(1-i)|^2 - 2\varepsilon^2 \leq 1 + 2\varepsilon$  を満たすことの確認.

上の  $r$  の値は “分子の有理化” により

$$r = \frac{1 + 2\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2(\cos \theta + \sin \theta)^2 + 1 + 2\varepsilon + \varepsilon(\cos \theta + \sin \theta)}}$$

と書き直される. また, 確認すべき不等式の左辺は

$$\left( \frac{1}{r} \cos \theta + \varepsilon \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \sin \theta - \varepsilon \right)^2 - 2\varepsilon^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r} \varepsilon (\cos \theta - \sin \theta)$$

となる. これに上の  $r$  を代入すると

$$\frac{1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2(\cos \theta + \sin \theta)^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(\cos \theta + \sin \theta)^2}(\cos \theta + \sin \theta)}{(1 + 2\varepsilon)^2} + \frac{\{\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(\cos \theta + \sin \theta)^2} + \varepsilon(\cos \theta + \sin \theta)\}\{2\varepsilon(\cos \theta - \sin \theta)\}}{1 + 2\varepsilon} \leq 1 + 2\varepsilon$$

を見ればよい. 分母を払って,  $(\cos \theta + \sin \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$  に注意すると

$$1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2(1 + \sin 2\theta) + 2\varepsilon\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)}(\cos \theta + \sin \theta) + 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)\{\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} + \varepsilon(\cos \theta + \sin \theta)\}(\cos \theta - \sin \theta) \leq (1 + 2\varepsilon)^3 \quad (\text{W.14})$$

を見ればよい. 右辺から左辺を引いたものの数値実験による値を図 A.12 で用いた  $\varepsilon = 0.2$  のとき  $\theta$  の 1 度刻みで下の表に示したが, これを見ると左辺は単調減少するようである.  $\theta = 0$  のときは左辺は

$$1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2} + 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)\{\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2} + \varepsilon\} \\ = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon(1 + \varepsilon) + 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)(1 + 2\varepsilon) = (1 + 2\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)^2 = (1 + 2\varepsilon)^3$$

となり，右辺と一致する（数表の先頭の値にマイナスが付いているのは数値計算のゴミのせいである）ので，左辺の  $\theta$  に関する導関数が非正であることを確かめればよい．導関数は

$$\begin{aligned}
& 4\varepsilon^2 \cos 2\theta + 2\varepsilon(\cos \theta - \sin \theta)\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} + 2\varepsilon(\cos \theta + \sin \theta)\frac{2\varepsilon^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)}} \\
& - 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)(\sin \theta + \cos \theta)\{\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} + \varepsilon(\sin \theta + \cos \theta)\} \\
& + 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon)(\cos \theta - \sin \theta)\left\{\frac{2\varepsilon^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)}} + \varepsilon(\cos \theta - \sin \theta)\right\} \\
= & 4\varepsilon^2 \cos 2\theta - \{4\varepsilon \sin \theta + 4\varepsilon^2(\sin \theta + \cos \theta)\}\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} \\
& - 4\varepsilon^2(1 + 2\varepsilon) \sin 2\theta + 2\varepsilon^3 \frac{(\cos \theta + \sin \theta) \cos 2\theta + (1 + 2\varepsilon)(\cos \theta - \sin \theta) \cos 2\theta}{\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)}}
\end{aligned}$$

非正を見るので全体に  $\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)}$  を掛けると

$$\begin{aligned}
& \{4\varepsilon^2(\cos 2\theta - \sin 2\theta) - 8\varepsilon^3 \sin 2\theta\}\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} \\
& - \{4\varepsilon \sin \theta + 4\varepsilon^2(\sin \theta + \cos \theta)\}\{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)\} \\
& + 4\varepsilon^3 \cos \theta \cos 2\theta + 4\varepsilon^4(\cos \theta - \sin \theta) \cos 2\theta \\
= & \{4\varepsilon^2(\cos 2\theta - \sin 2\theta) - 8\varepsilon^3 \sin 2\theta\}\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} \\
& - 4\varepsilon \sin \theta - 4\varepsilon^2(\cos \theta + 3 \sin \theta) - 4\varepsilon^3(\sin \theta \sin 2\theta + (2 - \cos 2\theta) \cos \theta + 3 \sin \theta) \\
& - 4\varepsilon^4\{(\cos \theta + \sin \theta) \sin 2\theta + (1 - \cos 2\theta) \cos \theta + (1 + \cos 2\theta) \sin \theta\} \\
= & 4\varepsilon^2 \cos^2 \theta \sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} \\
& - (4\varepsilon^2 \sin 2\theta + 8\varepsilon^3 \sin 2\theta)\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} \\
& - 4\varepsilon \sin \theta - 4\varepsilon^2(\cos \theta + 3 \sin \theta) - 4\varepsilon^3(\sin \theta \sin 2\theta + (2 - \cos 2\theta) \cos \theta + 3 \sin \theta) \\
& - 4\varepsilon^4\{(\cos \theta + \sin \theta) \sin 2\theta + (1 - \cos 2\theta) \cos \theta + (1 + \cos 2\theta) \sin \theta\}
\end{aligned}$$

ここで正の項は第 1 項のみであるが，これは  $\sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{2}$  という初等的な不等式を使うと

$$\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2(1 + \sin 2\theta)} = (1 + \varepsilon)\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 \sin 2\theta}{(1 + \varepsilon)^2}} \leq (1 + \varepsilon)\left(1 + \frac{\varepsilon^2 \sin 2\theta}{2(1 + \varepsilon)^2}\right)$$

と見積もられる．よって問題の正の項は

$$\leq 4\varepsilon^2 \cos^2 \theta + 4\varepsilon^3 \cos^2 \theta + \frac{4\varepsilon^4 \sin 2\theta}{2(1 + \varepsilon)} \leq 4\varepsilon^2 \cos^2 \theta + 4\varepsilon^3 \cos^2 \theta + 2\varepsilon^4 \cos^2 \theta \sin 2\theta$$

と評価される．最後の辺の第 1 項は  $-e\varepsilon^2 \cos \theta$  で打ち消される．第 2 項は  $-4\varepsilon^3(2 - \cos 2\theta) \cos \theta \leq -4\varepsilon^3 \cos \theta$  で打ち消される．最後に第 4 項は  $-4\varepsilon^4 \cos \theta \sin 2\theta$  で打ち消される．よって導関数が  $\leq 0$  であることが示された．

0 ~ 29°	30 ~ 59°	60 ~ 89°
-0.0000000000000000	0.115446864535032	0.426579555767743
0.000125529090212	0.123154742067944	0.438959101031937
0.000503257148070	0.131088738180562	0.451403198906976
0.001134783231982	0.139245272152374	0.463905315108349
0.002021554254943	0.147620600880236	0.476458902453165
0.003164861802195	0.156210821795726	0.489057406924544
0.004565839108684	0.165011875979230	0.501694273717719
0.006225458202250	0.174019551466680	0.514362953259293
0.008144527218268	0.183229486744599	0.527056907191056
0.010323687891126	0.192637174428777	0.539769614309913
0.012763413227702	0.202237965121601	0.552494576455510
0.015464005367632	0.212027071442830	0.565225324337264
0.018425593634925	0.221999572228251	0.577955423292624
0.021648132785100	0.232150416890478	0.590678478968479
0.025131401451761	0.242474429935815	0.603388142917827
0.028875000796128	0.252966315630913	0.616078118103924
0.032878353362786	0.263620662812704	0.628742164304330
0.037140702144492	0.274431949834835	0.641374103407452
0.041661109858595	0.285394549643682	0.653967824594364
0.046438458437249	0.296502734976731	0.666517289398921
0.051471448733237	0.307750683676004	0.679016536639377
0.056758600442908	0.319132484108974	0.691459687214993
0.062298252247309	0.330642140689276	0.703840948761328
0.068088562172305	0.342273579489335	0.716154620158203
0.074127508168063	0.354020653936939	0.728395095884580
0.080412888907949	0.365877150587601	0.740556870214888
0.086942324806524	0.377836794964465	0.752634541251637
0.093713259255953	0.389893257457430	0.764622814789437
0.100722960079799	0.402040159273020	0.776516508005889
0.107968521202820	0.414271078426514	0.788310552975108

**[p.263, 問 8.2-5 の解答への注]**

この計算は暗算で確認しようとする著者も悩ましく感じるのですが、スペースの関係で詳しく書けなかった  
ので、ここで補っておきます。

$$\begin{aligned}
g_N(z) &:= z \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) = z \prod_{n=1}^N \left(\frac{n\pi + z}{n\pi} \frac{n\pi - z}{n\pi}\right) \\
&\mapsto (z + 2\pi) \prod_{n=1}^N \left(\frac{(n+2)\pi + z}{n\pi} \frac{(n-2)\pi - z}{n\pi}\right) \\
&= (z + 2\pi) \prod_{n=1}^{N-2} \left(\frac{(n+2)\pi + z}{n\pi} \frac{(n-2)\pi - z}{n\pi}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{(N+1)\pi + z}{(N-1)\pi} \frac{(N-3)\pi - z}{(N-1)\pi}\right) \times \left(\frac{(N+2)\pi + z}{N\pi} \frac{(N-2)\pi - z}{N\pi}\right) \\
&= z \prod_{n=1}^{N-2} \left(\frac{n\pi + z}{n\pi} \frac{n\pi - z}{n\pi}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{(N+1)\pi + z}{(N-1)\pi} \frac{(N-1)\pi + z}{(N-1)\pi}\right) \times \left(\frac{(N+2)\pi + z}{N\pi} \frac{N\pi + z}{N\pi}\right) \\
&= z \prod_{n=1}^{N-2} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) \times \left(1 + \frac{z+2\pi}{(N-1)\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{(N-1)\pi}\right) \times \left(1 + \frac{z+2\pi}{N\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{N\pi}\right)
\end{aligned}$$

ここではみ出した因子のうち、 $\left(1 + \frac{z}{(N-1)\pi}\right)$  と  $\left(1 + \frac{z}{N\pi}\right)$  はもとの  $g_N(z)$  にも含まれるので、結局

$$\frac{g_N(z+2\pi)}{g_N(z)} = \frac{\left(1 + \frac{z+2\pi}{(N-1)\pi}\right) \left(1 + \frac{z+2\pi}{N\pi}\right)}{\left(1 - \frac{z}{(N-1)\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{N\pi}\right)}$$

となる。

【p.265, 問 9.1-1 の解答の続き】

【p.265, 問 9.2-1 の解答の続き】

2重級数の収束に慣れていない人のために少し解説すると、2重級数の収束の定義は、添え字の範囲を有界集合にしたときの有限和の、この有界集合を全平面に広げていったときの極限であるが、添字が一個の普通の級数と異なり、有界集合の取り方にはいろいろあり、それによって和の値が変わることもある。代表的なものとしては

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_{mn} \quad (\text{正方形}), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N \sum_{m+n=k} a_{mn} \quad (\text{直角三角形})$$

などがある。(有限級数の和は順序が自由にえられるので、どう書いてもよい。)ただし、絶対収束する場合、すなわち  $|a_{mn}|$  の和が収束する場合には、任意の有界集合を含むような極限を取れば結果はすべて一致することが示せる。かつ収束の判定は絶対値を取ったものの遠くの方の和(これも任意の元がやがて含まれなくなるような任意の極限でよい)が零に近づけばよい。これは絶対値の部分積和が上に有界なことと同値である。この最後の条件を確かめるのに添え字が一つの級数でもよく用いられる積分による評価がしばしば有効である。この問でも、一般に  $k \geq 3$  のとき、

$$\frac{1}{|m+in|^k} = \frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}} \leq \iint_{m-1 \leq x \leq m, n-1 \leq y \leq n} \frac{1}{(x^2+y^2)^{k/2}} dx dy$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} \sum_{|m+in| \geq N} \frac{1}{|m+in|^k} &\leq \sum_{\sqrt{m^2+n^2} \geq N} \iint_{m-1 \leq x \leq m, n-1 \leq y \leq n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^k} dx dy \leq \iint_{\sqrt{x^2+y^2} \geq N-2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^k} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{N-2}^{\infty} \frac{1}{r^k} r dr = 2\pi \int_{N-2}^{\infty} \frac{1}{r^{k-1}} dr \end{aligned}$$

となり、 $k-1 > 1$  ならこれは有限となることから  $\sum_{|m+in| \geq N} \frac{1}{|m+in|^k}$  の収束が言える。

(9.8) の広義一様収束の証明

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-m-in)^2} - \frac{1}{(m+in)^2} &= \frac{(m+in)^2 - (z-m-in)^2}{(z-m-in)^2(m+in)^2} = \frac{2(m+in)z - z^2}{(z-m-in)^2(m+in)^2} \\ &= \frac{2z}{(z-m-in)^2(m+in)} - \frac{z^2}{(z-m-in)^2(m+in)^2} \end{aligned}$$

において、(9.7) の証明と同様、 $|z| \leq M$  とし、 $N = 2M$  に選べば、 $|m+in| \geq N$  なる項に対して

$$|z-m-in| \geq |m+in| - |z| = \frac{1}{2}|m+in| + \frac{1}{2}|m+in| - |z| \geq \frac{1}{2}|m+in| + \frac{1}{2}N - M = \frac{1}{2}|m+in|$$

となるから、上の最後の辺の第1項は、この範囲の  $m, n$  について

$$\left| \frac{2z}{(z-m-in)^2(m+in)} \right| \leq \frac{8M}{|m+in|^3}$$

という評価を満たす。また第2項も

$$\left| \frac{z^2}{(z-m-in)^2(m+in)^2} \right| \leq \frac{4M^2}{|m+in|^4}$$

を満たす。よってこれらの  $|m + in| \geq N$  に対する和は  $|z| \leq M$  について一様に絶対収束する。

(9.9) の広義一様収束の証明

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{z - m - in} + \frac{1}{m + in} \right) - \left( \frac{1}{z - \alpha - m - in} + \frac{1}{\alpha + m + in} \right) \\
 &= \frac{z}{(z - m - in)(m + in)} - \frac{z}{(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in)} \\
 &= z \frac{(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in) - (z - m - in)(m + in)}{(z - m - in)(m + in)(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in)} \\
 &= z \frac{\alpha z + (m + in)^2 - (\alpha + m + in)^2}{(z - m - in)(m + in)(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in)} \\
 &= z \frac{\alpha z - \alpha^2 - 2\alpha(m + in)}{(z - m - in)(m + in)(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in)} \\
 &= \frac{\alpha z^2 - \alpha^2 z}{(z - m - in)(m + in)(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in)} - \frac{2\alpha z}{(z - m - in)(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in)}.
 \end{aligned}$$

ここで、 $|z| \leq M$ ,  $|z - \alpha| \leq M$  のとき  $|m + in| \geq N = 2M + 2|\alpha|$  なる  $m, n$  に対しては、(9.8) のときと同様に

$$\begin{aligned}
 |z - m - in| &\geq |m + in| - |z| \geq \frac{1}{2}|m + in|, \\
 |z - \alpha - m - in| &\geq |m + in| - |z - \alpha| \geq \frac{1}{2}|m + in|, \\
 |\alpha + m + in| &\geq |m + in| - |\alpha| \geq \frac{1}{2}|m + in|
 \end{aligned}$$

が成り立つので、上の式の最後の辺の第 1 項は

$$\left| \frac{\alpha z^2 - \alpha^2 z}{(z - m - in)(m + in)(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in)} \right| \leq \frac{8|\alpha z^2 - \alpha^2 z|}{|m + in|^4},$$

また、第 2 項は

$$\left| \frac{2\alpha z}{(z - m - in)(z - \alpha - m - in)(\alpha + m + in)} \right| \leq \frac{16|\alpha z|}{|m + in|^3}$$

となるので、やはり  $z$  について一様に絶対収束する。

**[p.265, 問 9.2-2 の解答の続き]**  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), R(x_3, y_3)$  とすると、まず  $P + Q$  の  $x, y$  座標は、

$$\lambda_1 := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \nu_1 := y_1 - \lambda_1 x_1 = y_2 - \lambda_1 x_2$$

として、

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda_1^2 - x_1 - x_2 - a, \\
 y &= -\lambda_1 x - \nu_1 = -\lambda_1^3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + a) - \nu_1.
 \end{aligned}$$

ここで  $\lambda_1, \nu_1$  は添え字の 1, 2 の交換で不変なことに注意せよ。従って、 $x, y$  もこの交換で不変である。加法の可換性  $P + Q = Q + P$  は幾何学的定義からは明らかだが、この不変性からそれが代数的にも確認できる。

さて、 $(P + Q) + R = R + (P + Q)$  の  $x, y$  座標成分  $X, Y$  は上の表現において  $(x_1, y_1) \mapsto (x_3, y_3), (x_2, y_2) \mapsto (x, y)$  と取り替えたものに上の表現を代入すれば

$$\begin{aligned}
 \lambda &:= \frac{y - y_3}{x - x_3}, \quad \nu = y_3 - \lambda x_3, \\
 X &= \lambda^2 - x - x_3 - a = \lambda^2 - (\lambda_1^2 - x_1 - x_2 - a) - x_3 - a = \lambda^2 - \lambda_1^2 + x_1 + x_2 - x_3, \\
 Y &= -\lambda X - \nu = -\lambda^3 + \lambda(\lambda_1^2 - x_1 - x_2 + x_3) + \lambda x_3 - y_3 = -\lambda^3 + \lambda(\lambda_1^2 - x_1 - x_2 + 2x_3) - y_3.
 \end{aligned}$$

この  $X, Y$  が添え字の  $1, 2, 3$  について対称になっていれば, 結果が和の順序に依存しないこと, 従って特に結合律が成り立つことが確かめられる. まず  $\lambda$  を計算すると,  $A := x_1 + x_2 + x_3 + a$  が対称式であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-\lambda_1^3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + a) - \nu_1 - y_3}{\lambda_1^2 - x_1 - x_2 - a - x_3} = \frac{-\lambda_1^3 + \lambda_1 A - \lambda_1 x_3 - y_3 - \nu_1}{\lambda_1^2 - A} \\ &= -\lambda_1 - \frac{\lambda_1 x_3 + y_3 + \nu_1}{\lambda_1^2 - A}.\end{aligned}$$

すると  $X$  については,

$$\begin{aligned}X &= \lambda^2 - \lambda_1^2 + x_1 + x_2 - x_3 = \lambda^2 - \lambda_1^2 + A - 2x_3 - a \\ &= \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \frac{\lambda_1 x_3 + y_3 + \nu_1}{\lambda_1^2 - A} + \frac{(\lambda_1 x_3 + y_3 + \nu_1)^2}{(\lambda_1^2 - A)^2} - \lambda_1^2 - 2x_3 + A - a \\ &= \frac{2\lambda_1(\lambda_1 x_3 + y_3 + \nu_1)}{\lambda_1^2 - A} - 2x_3 + \frac{(\lambda_1 x_3 + y_3 + \nu_1)^2}{(\lambda_1^2 - A)^2} + A - a \\ &= 2 \frac{\lambda_1(y_3 + \nu_1) + x_3 A}{\lambda_1^2 - A} + \frac{(\lambda_1 x_3 + y_3 + \nu_1)^2}{(\lambda_1^2 - A)^2} + A - a\end{aligned}\tag{W.15}$$

ここで添え字の  $1$  と  $3$  を交換すれば  $(Q + R) + P$  の  $x$  座標が得られるので, 最後の辺の先頭の二つの項の和がこの変換で不変なことを言えば  $X$  が括り方に依らないことが分かる. この変換で  $\lambda_1 \mapsto \lambda_3 := \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}$ , 及び  $\nu_1 = y_1 - \lambda_1 x_1 \mapsto y_3 - \lambda_3 x_3 =: \nu_3$  となることに注意し, まず第 1 項の因子  $2$  を省略したものについて, 変換後ともとのものとの差を見ると,

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda_3(y_1 + \nu_3) + x_1 A}{\lambda_3^2 - A} - \frac{\lambda_1(y_3 + \nu_1) + x_3 A}{\lambda_1^2 - A} \\ &= \frac{\lambda_1^2 \lambda_3 (y_1 + \nu_3) + (\lambda_1^2 x_1 - \lambda_3 y_1 - \lambda_3 \nu_3) A - x_1 A^2 - \lambda_3^2 \lambda_1 (y_3 + \nu_1) + (\lambda_1 y_3 + \lambda_1 \nu_1 - \lambda_3^2 x_3) A + x_3 A^2}{(\lambda_1^2 - A)(\lambda_3^2 - A)} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 y_1 + \lambda_1 \nu_3 - \lambda_3 y_3 - \lambda_3 \nu_1) + (\lambda_1^2 x_1 - \lambda_3^2 x_3 + \lambda_1 y_3 - \lambda_3 y_1 + \lambda_1 \nu_1 - \lambda_3 \nu_3) A + (x_3 - x_1) A^2}{(\lambda_1^2 - A)(\lambda_3^2 - A)}.\end{aligned}\tag{W.16}$$

以下分子だけを見ると, まず  $A$  を含まない項については

$$\begin{aligned}\lambda_1 y_1 + \lambda_1 \nu_3 - \lambda_3 y_3 - \lambda_3 \nu_1 &= \lambda_1 y_1 + \lambda_1 (y_3 - \lambda_3 x_3) - \lambda_3 y_3 - \lambda_3 (y_1 - \lambda_1 x_1) \\ &= \lambda_1 y_1 - \lambda_3 y_3 + \lambda_1 y_3 - \lambda_3 y_1 - \lambda_1 \lambda_3 (x_3 - x_1) = (\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3) - \lambda_1 \lambda_3 (x_3 - x_1).\end{aligned}$$

また,  $A$  の係数は,

$$\begin{aligned}&\lambda_1^2 x_1 - \lambda_3^2 x_3 + \lambda_1 y_3 - \lambda_3 y_1 + \lambda_1 \nu_1 - \lambda_3 \nu_3 \\ &= \lambda_1^2 x_1 - \lambda_3^2 x_3 + \lambda_1 y_3 - \lambda_3 y_1 + \lambda_1 (y_1 - \lambda_1 x_1) - \lambda_3 (y_3 - \lambda_3 x_3) \\ &= \lambda_1 y_3 - \lambda_3 y_1 + \lambda_1 y_1 - \lambda_3 y_3 = (\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3).\end{aligned}$$

よって (W.16) の最後の辺の分子は

$$\begin{aligned}&\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3) - \lambda_1^2 \lambda_3^2 (x_3 - x_1) + (\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3) A + (x_3 - x_1) A^2 \\ &= (\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3)(\lambda_1 \lambda_3 + A) - (x_3 - x_1)(\lambda_1^2 \lambda_3^2 - A^2) \\ &= (\lambda_1 \lambda_3 + A) \{ (\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3) - (x_3 - x_1)(\lambda_1 \lambda_3 - A) \}\end{aligned}\tag{W.17}$$

となる。先頭の因子  $\lambda_1\lambda_3 + A$  は添え字 1, 3 について対称であり、一般には零にならないことが確かめられるので、残りの因子を調べる。

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3) - (x_3 - x_1)(\lambda_1\lambda_3 - A) \quad (\text{W.18})$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \right) (y_1 + y_3) - (x_3 - x_1) \left( \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \right) + (x_3 - x_1)A \\ &= \frac{\{(y_1 - y_2)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_1 - x_2)\}(y_1 + y_3) - (x_3 - x_1)(y_1 - y_2)(y_3 - y_2)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} + (x_3 - x_1)A \quad (\text{W.19}) \end{aligned}$$

ここで分数の分子は、

$$\begin{aligned} &\{(x_1 - x_3)y_2 + y_1x_3 - y_3x_1 + (y_3 - y_1)x_2\}(y_1 + y_3) + (x_1 - x_3)\{y_1y_3 + y_2^2 - y_2(y_1 + y_3)\} \\ &= (y_1x_3 - y_3x_1)(y_1 + y_3) + (y_3^2 - y_1^2)x_2 + (x_1 - x_3)(y_1y_3 + y_2^2) \\ &= x_1(-y_1y_3 - y_3^2 + y_1y_3 + y_2^2) + x_3(y_1^2 + y_1y_3 - y_1y_3 - y_2^2) + x_2(y_3^2 - y_1^2) \\ &= x_1(y_2^2 - y_3^2) + x_2(y_3^2 - y_1^2) + x_3(y_1^2 - y_2^2). \end{aligned}$$

これに楕円曲線の方程式

$$y_1^2 = x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c, \quad y_2^2 = x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c, \quad y_3^2 = x_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} &= x_1\{x_2^3 - x_3^3 + a(x_2^2 - x_3^2) + b(x_2 - x_3)\} + x_2\{x_3^3 - x_1^3 + a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1)\} \\ &\quad + x_3\{x_1^3 - x_2^3 + a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)\} \\ &= x_1(x_2^3 - x_3^3) + x_2(x_3^3 - x_1^3) + x_3(x_1^3 - x_2^3) + a\{x_1(x_2^2 - x_3^2) + x_2(x_3^2 - x_1^2) + x_3(x_1^2 - x_2^2)\} + b\{x_1(x_2 - x_3) + x_2(x_3 - x_1) + x_3(x_1 - x_2)\} \end{aligned}$$

これらの因数分解はそれぞれの項が  $x_1, x_2, x_3$  の交代式で、従ってこれらの差積で割り切れ、残った因子は次数が 3 低い対称式となることから目の子で分かる。この結果を (W.19) の分数の分子に代入すると、分数全体は約分されて

$$= -(x_3 - x_1)(x_1 + x_2 + x_3 + a) = -(x_3 - x_1)A$$

が残り、(W.19) の最後の項とキャンセルする。

次に (W.15) の第 2 の分数については、平方する前の量の対称性を見ると、

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_3x_1 + y_1 + \nu_3}{\lambda_3^2 - A} - \frac{\lambda_1x_3 + y_3 + \nu_1}{\lambda_1^2 - A} \\ &= \frac{\lambda_1^2(\lambda_3x_1 + y_1 + \nu_3) - \lambda_3^2(\lambda_1x_3 + y_3 + \nu_1) + \{(\lambda_1x_3 + y_3 + \nu_1) - (\lambda_3x_1 + y_1 + \nu_3)\}A}{(\lambda_1^2 - A)(\lambda_3^2 - A)}. \end{aligned}$$

この分子は、

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2(\lambda_3x_1 + y_1 + \nu_3) - \lambda_3^2(\lambda_1x_3 + y_3 + \nu_1) + \{(\lambda_1x_3 + y_3 + \nu_1) - (\lambda_3x_1 + y_1 + \nu_3)\}A \\ &= \lambda_1^2(\lambda_3x_1 + y_1 + y_3 - \lambda_3x_3) - \lambda_3^2(\lambda_1x_3 + y_3 + y_1 - \lambda_1x_1) \\ &\quad + \{(\lambda_1x_3 + y_3 + y_1 - \lambda_1x_1) - (\lambda_3x_1 + y_1 + y_3 - \lambda_3x_3)\}A \\ &= \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3)(x_1 - x_3) + (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(y_1 + y_3) + (\lambda_1 + \lambda_3)(x_3 - x_1)A \\ &= \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3)(x_1 - x_3) + (\lambda_1 - \lambda_3)\{(\lambda_1 + \lambda_3)(y_1 + y_3) + (x_3 - x_1)A\} \end{aligned}$$

ここで (W.18) が零であったから、

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3) - (x_3 - x_1)(\lambda_1\lambda_3 - A) = 0,$$

すなわち,

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(y_1 + y_3) + (x_3 - x_1)A = (x_3 - x_1)\lambda_1\lambda_3.$$

これを上の式に代入すると, それは

$$= \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3)(x_1 - x_3) + (\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1\lambda_3(x_3 - x_1) = 0$$

となる. 以上により  $X$  の添え字 1,3 の互換での不変性が示された.

最後に,

$$Y = -\lambda X - \nu = -\lambda X - y_3 + \lambda x_3 = \left(-\lambda_1 - \frac{\lambda_1 x_3 + y_3 + y_1 - \lambda_1 x_1}{\lambda_1^2 - A}\right)(X - x_3) - y_3$$

については, 添え字の 1 と 3 を交換すると  $X$  と  $A$  は不変なことが既に分かっているが, 図を見ると  $\lambda$  は不変では無いようなので, この不変性はもう一度全体をばらして計算し直さなければ導けないようである. それは大変なので,

$$Y^2 = X^3 + aX^2 + bX + c$$

であることを思い出すと,  $Y^2$  は不変なことが直ちに分かるので, 互換後の  $Y$  は  $\pm Y$  のいずれかと一致する. 互換が定める対応は連続なので,  $Y = 0$ , または  $\infty$  とならない限り符号はどちらか一方を保持するはずである. そこで,  $R$  を連続的に動かして  $P$  の位置まで持って行くと, そこでは  $(P+Q)+R = P+(Q+R)$  は加法の可換性から明らかである. 故に, この変形の途中で  $Y = 0, \infty$  が生じなければ, 符号は +, すなわち, 結合律が成り立っていたと判定される. 図を見ると, 一般の位置にある  $P, Q$  に対してこれが保証されているように見えるし, 実際計算でも,  $(P+Q)+R$  の  $y$  座標が  $\infty$  となる, すなわち  $(P+Q)+R = \mathcal{O}$  となるのは  $R$  が  $P+Q$  と縦線上に並ぶときで, 実では 2 次元曲面である楕円曲線上ではそこを避けて  $R$  を  $Q$  に一致させるところまで連続的に動かすことは可能である. また  $(P+Q)+R$  の  $y$  座標が 0 となるのは, やはり楕円曲線と  $y = 0$  の交点である  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  の 3 根だけなので, これも座標に複素数値を取らせれば迂回できる. この証明は複素数体にしか通用しないが, 関数論の練習問題としてはこれで十分であろう.

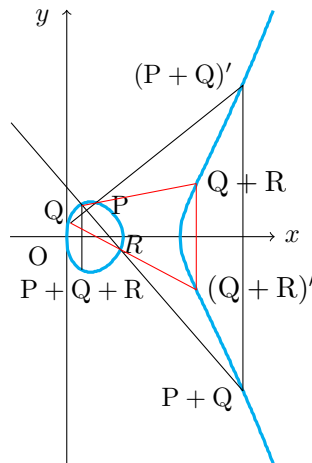


図 W.y 加法の結合律の確認図

**[p.265, 問 9.2-4 の解答の続き]** 符号 (というか平方根の多価性) を気にする人がいるかもしれないが, 根号内が 2 次式のときでも

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin } x, \quad -\int^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arccos } x$$

という微積分での区別は, 関数論では意味が無くなる. 実際, 多価関数としては

$$\text{Arccos } x + \frac{\pi}{2} = \text{Arcsin } x$$



であり、両者は積分定数の差しか無いので、本質的に同じ関数とみなせる。上を  $y$  と置いて逆関数をとれば

$$x = \sin y = \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。