

『解析演習』第4章 §4 の問題解答の詳細

問題 4.1 以下、密度は 1 と考えて、図形の面積を質量の記号 M で表す。また、問題の図形を D で表す。

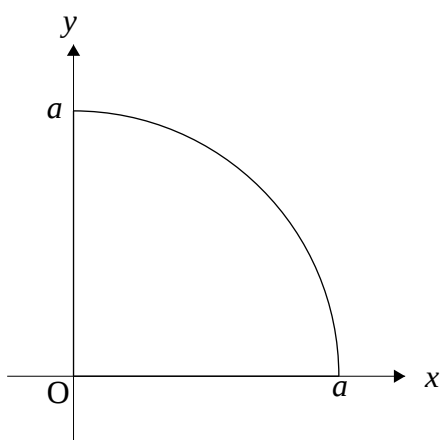
(1)

$$M = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0} dx dy = \frac{\pi}{4} a^2$$

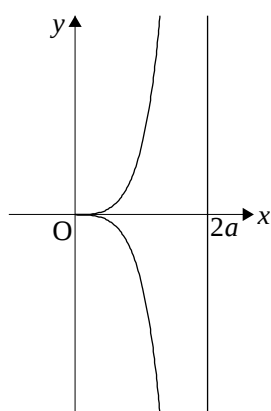
は積分を使わなくても常識で既知としてよいだろう。また、

$$\begin{aligned} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0} x dx dy &= \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} x dx = \int_0^a dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} = \int_0^a \frac{a^2 - y^2}{2} dy \\ &= \left[\frac{a^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^a = \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

対称性により、 y の積分も同じ値になるので、重心の座標はこれらを M で割った $(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi})$ となる。



問題 4.1 (1) の図



問題 4.1 (2) の図

(2) 無限図形になるが同じようにやればよい。 $(2a - x)y^2 = x^3$ を y について解けば

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}, \quad y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}} = x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

よってまず

$$M = 2 \int_0^{2a} x \sqrt{\frac{x}{2a - x}} dx$$

を計算する。 $\sqrt{\frac{x}{2a - x}} = t$ と置くと

$$x = \frac{2at^2}{1 + t^2} = 2a - x = \frac{2a}{1 + t^2}, \quad \text{従って} \quad dx = \frac{4at}{(1 + t^2)^2} dt$$

となるから、

$$M = 2 \int_0^\infty \frac{2at^2}{1 + t^2} t \frac{4at}{(1 + t^2)^2} dt = 16a^2 \int_0^\infty \frac{t^4}{(1 + t^2)^3} dt$$

この被積分関数は、 t^2 を缶詰にすると比較的容易に部分分数分解できる。例えば Taylor 級数を用いると

$$\frac{t^4}{(1 + t^2)^3} = \frac{(1 + t^2 - 1)^2}{(1 + t^2)^3} = \frac{(1 + t^2)^2 - 2(1 + t^2) + 1}{(1 + t^2)^3} = \frac{1}{1 + t^2} - 2 \frac{1}{(1 + t^2)^2} + \frac{1}{(1 + t^2)^3}$$

このそれぞれを積分すると,

$$\int_0^\infty \frac{1}{a+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arctan} \infty = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$$

両辺を a で微分して

$$-\int_0^\infty \frac{1}{(a+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \frac{\pi}{2a^{3/2}}, \quad 2 \int_0^\infty \frac{1}{(a+t^2)^3} dt = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{\pi}{2a^{5/2}}$$

よって $a=1$ として

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^3} dt = \frac{3\pi}{16}$$

以上を上に入代入すると

$$M = 16a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16} \right) = 3\pi a^2$$

次に, 上と同じ変数変換を用いて,

$$2 \int_0^{2a} xy dx = 2 \int_0^{2a} x \cdot x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx = 2 \int_0^\infty \left(\frac{2at^2}{1+t^2} \right)^2 t \frac{4at}{(1+t^2)^2} dt = 32a^3 \int_0^\infty \frac{t^6}{(1+t^2)^3} dt$$

この被積分関数も, 上と同様に部分分数分解して

$$\frac{t^6}{(1+t^2)^4} = \frac{(1+t^2-1)^3}{(1+t^2)^4} = \frac{(1+t^2)^3 - 3(1+t^2)^2 + 3(1+t^2) - 1}{(1+t^2)^4} = \frac{1}{1+t^2} - 3\frac{1}{(1+t^2)^2} + 3\frac{1}{(1+t^2)^3} - \frac{1}{(1+t^2)^4}$$

最後の項の積分は, 上の a による微分の計算をもう 1 回行って

$$-6 \int_0^\infty \frac{1}{(a+t^2)^4} dt = -\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{\pi}{2a^{7/2}}, \quad \therefore \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^4} dt = \frac{5}{32} \pi.$$

よって, 上の積分は

$$= 32a^3 \left(\frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{4} + 3\frac{3\pi}{16} - \frac{5}{32}\pi \right) = 5\pi a^3.$$

故に, 重心の x 座標はこれを M で割った $\frac{5}{3}a$ となる. y 座標の方は対称性により 0. よって重心は $(\frac{5}{3}a, 0)$.

なお, 上の t の有理関数の積分は $t = \tan \theta$ という置換でも計算でき, その方がいくらか簡単である. これは最初に $x = 2a \sin^2 \theta$ という置換を行うのと同様であり, この計算法が最も簡単であろう.

(3) サイクロイドにパラメータ表示の方程式

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

を積分計算の変数変換に用いる.

$$\begin{aligned} M &= \iint_D dx dy = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) \cdot a(1 - \cos \theta) d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

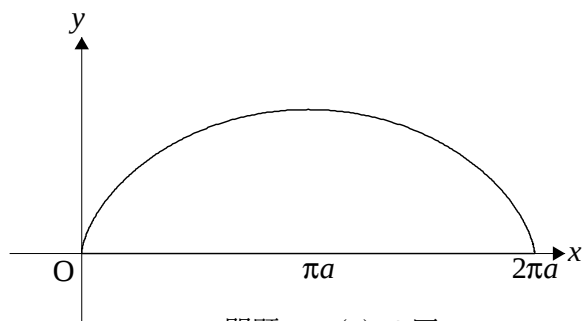
ここで最後の計算は周期性を用いて消せるものは消した. 次に

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y y dy = \int_0^{2\pi a} \frac{y^2}{2} dx = \frac{1}{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos \theta + 3\cos^2 \theta - \cos^3 \theta) d\theta \end{aligned}$$

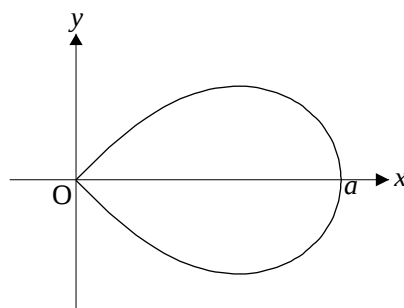
ここで $\cos \theta$ の奇数冪の 1 周期に渡る積分は正負が打ち消し合って消えるので、上と同様の計算で

$$= \frac{1}{2}a^3 \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{3}{2}(1 + \cos 2\theta) \right\} d\theta = \frac{5}{4}a^3 \cdot 2\pi = \frac{5}{2}\pi a^3$$

よって重心の y 座標はこれを M で割った $\frac{5}{6}a$ となる. x 座標の方は対称性により、サイクロイド一山分の中央の位置 πa である. 故に重心は $(\pi a, \frac{5}{6}a)$.



問題 4.1 (3) の図



問題 4.1 (4) の図

(4) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ より, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ であり, このとき $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ を変数変換に用いると, まず極座標での面積の公式により,

$$M = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{r^2}{2} d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{a^2 \cos 2\theta}{2} d\theta = a^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}a^2.$$

次に, 2次元極座標での重積分の変数変換により

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r \cos \theta r dr = 2 \int_0^{\pi/4} \cos \theta \frac{(a\sqrt{\cos 2\theta})^3}{3} d\theta = \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\theta}^3 \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - 2\sin^2 \theta}^3 d\sin \theta \end{aligned}$$

ここで, $\sin \theta = t$, 次いで $\sqrt{2}t = \sin \varphi$ と変数変換すると

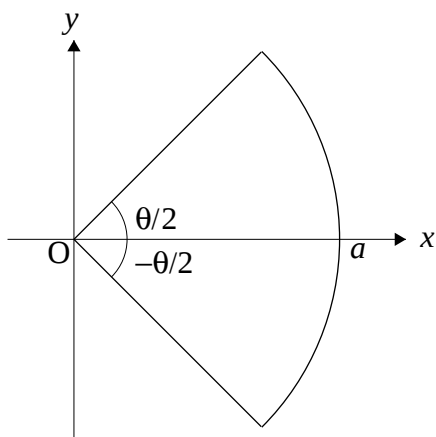
$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3}a^3 \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1 - 2t^2}^3 dt = \frac{2}{3}a^3 \int_0^1 \sqrt{1 - 2t^2}^3 dt = \frac{2}{3}a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos 2\varphi)^2}{4} d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}) d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16}\pi a^3. \end{aligned}$$

よって重心の x 座標は, これを M で割った $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a$ である. y 座標の方は対称性により 0 なので, 求める重心は $(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a, 0)$

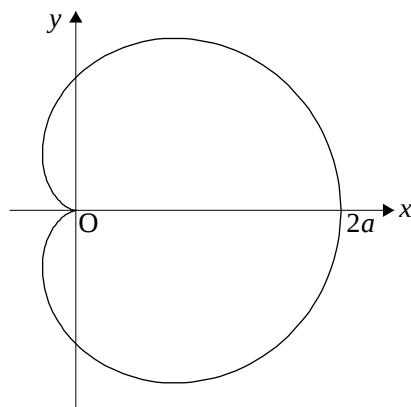
(5) $M = \pi a^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{a^2}{2}\theta$ は計算するまでもないだろう. 以下, 扇形を図の位置として計算する.

$$\iint_D x dx dy = \int_{-\theta/2}^{\theta/2} d\varphi \int_0^a r \cos \varphi \cdot r dr = \frac{a^3}{3} 2 \int_0^{\theta/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3}a^3 \sin \frac{\theta}{3}.$$

よって, 重心の x 座標は $\frac{4}{3}a \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\theta}$ となる. y 座標は対称性により 0 である. 問題の図形は座標位置を指定されていないので, 最後の解答は座標に依存しない形で与えると, 重心は中心角の 2 等分線を成す半径上, 中心から $\frac{4}{3}a \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\theta}$ だけ離れた点と言うことになる.



問題 4.1 (5) の図



問題 4.1 (6) の図

(6) $r = a(1 + \cos \theta)$ を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1 + \cos \theta)^2}{2} d\theta = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}) d\theta = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

ここで周期性により消える項は積分計算を略した. 同様に,

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos \theta)} r \cos \theta \cdot r dr = a^3 \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^3}{3} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi} (\cos \theta + 3\cos^2 \theta + 3\cos^3 \theta + \cos^4 \theta) d\theta \end{aligned}$$

ここで, $\cos \theta$ の奇数乗の周期に渡る積分は消えるので,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi} (3\cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d\theta = \frac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{3}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{(1 + \cos 2\theta)^2}{4} \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{3}a^3 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \cos 4\theta}{8} \right\} d\theta = \frac{1}{3}a^3 \cdot \frac{15}{8} \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi a^3. \end{aligned}$$

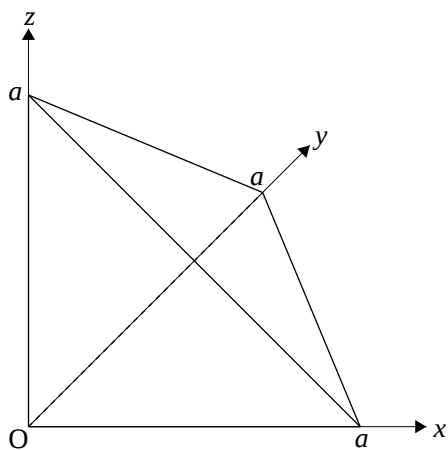
よって, 重心の x 座標は $\frac{5}{4}\pi a^3 \div \frac{3}{2}\pi a^2 = \frac{5}{6}a$. y 座標は対称性により 0 なので, 重心は $(\frac{5}{6}a, 0)$ となる.

問題 4.2 前問と同様, 図形の体積を質量の記号 M で, また問題の図形を D で表す.

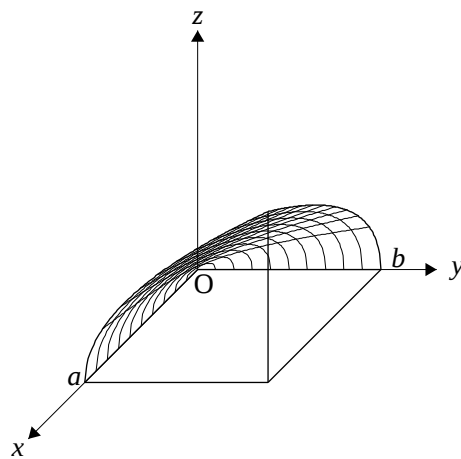
(1) $M = \frac{1}{6}a^3$ は計算しなくてもよいだろう.

$$\iiint_D x dx dy dz = \int_0^a dz \int_0^{a-z} dy \int_0^{a-y-z} x dx = \int_0^a dz \int_0^{a-z} \frac{(a-y-z)^2}{2} dy = \int_0^a \frac{(a-z)^3}{6} dz = \frac{a^4}{24}.$$

よって重心の x 座標はこれを M で割った $\frac{a}{4}$. 対称性により他の座標も同じ値となるので, 重心は $(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4})$.



問題 4.2 (1) の図



問題 4.2 (2) の図

(2) まず

$$M = \iiint_D dx dy dz = \iint_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} \sqrt{xy} dx dy = \int_0^a \sqrt{x} dx \int_0^b \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} \sqrt{a^3} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{b^3} = \frac{4}{9} \sqrt{ab^3}.$$

次に,

$$\iiint_D x dx dy dz = \iint_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} x \sqrt{xy} dx dy = \int_0^a \sqrt{x^3} dx \int_0^b \sqrt{y} dy = \frac{2}{5} \sqrt{a^5} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{b^3}.$$

よって重心の x 座標は $\frac{3}{5}a$ である. 対称性により重心の y 座標は $\frac{3}{5}b$ となる. 最後に z 座標は

$$\iiint_D z dx dy dz = \iint_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} dx dy \int_0^{\sqrt{xy}} z dz = \iint_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} \frac{xy}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^a x dx \int_0^b y dy = \frac{1}{8} a^2 b^2.$$

よって重心の z 座標は $\frac{1}{8} a^2 b^2 \div \frac{4}{9} \sqrt{ab^3} = \frac{9}{32} \sqrt{ab}$. 以上により重心は $(\frac{3}{5}a, \frac{3}{5}b, \frac{9}{32} \sqrt{ab})$.

(3) まず

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{\frac{y^2}{2a} \leq x \leq \frac{a}{2}} \frac{x^2}{2a} dx dy = \int_{-a}^a dy \left[\frac{x^3}{6a} \right]_{\frac{y^2}{2a}}^{\frac{a}{2}} \\ &= 2 \int_0^a \left(\frac{a^2}{48} - \frac{y^6}{48a^4} \right) dy = 2 \left(\frac{a^3}{48} - \frac{a^7}{48 \cdot 7a^4} \right) = \frac{6a^3}{24 \cdot 7} = \frac{1}{28} a^3. \end{aligned}$$

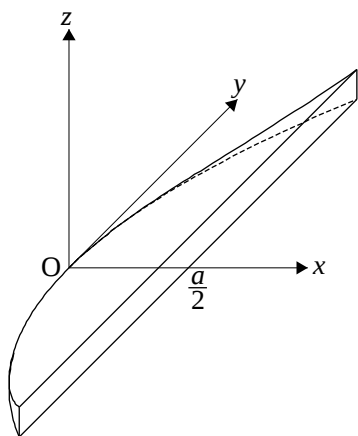
次に,

$$\begin{aligned} \iiint_D x dx dy dz &= \iint_{\frac{y^2}{2a} \leq x \leq \frac{a}{2}} \frac{x^3}{2a} dx dy = \int_{-a}^a dy \left[\frac{x^4}{8a} \right]_{\frac{y^2}{2a}}^{\frac{a}{2}} \\ &= 2 \int_0^a \left(\frac{a^3}{128} - \frac{y^8}{128a^5} \right) dy = 2 \left(\frac{a^4}{128} - \frac{a^9}{128 \cdot 9a^5} \right) = \frac{8a^4}{64 \cdot 9} = \frac{1}{72} a^4. \end{aligned}$$

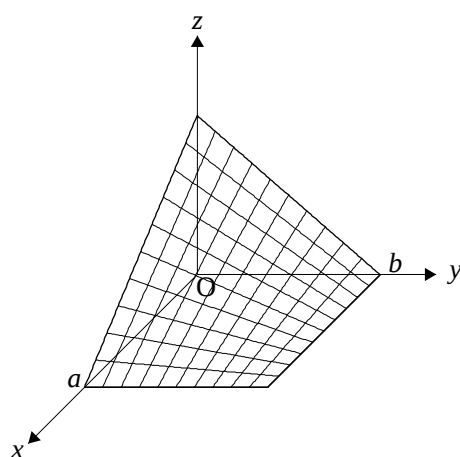
よって重心の x 座標は $\frac{7}{18}a$. 重心の y 座標は対称性により 0 である. 最後に,

$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \iint_{\frac{y^2}{2a} \leq x \leq \frac{a}{2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{x^{2/2a}} dx dy = \int_{-a}^a dy \int_{y^{2/2a}}^{a/2} \frac{x^4}{8a^2} dx = \int_{-a}^a dy \left[\frac{x^5}{40a^2} \right]_{y^{2/2a}}^{a/2} \\ &= 2 \int_0^a \left(\frac{a^5}{1280a^2} - \frac{y^{10}}{1280a^7} \right) dy = \frac{10a^4}{640 \cdot 11} = \frac{1}{64 \cdot 11} a^4. \end{aligned}$$

よって, z 座標は $\frac{7}{176}a$. 以上により重心は $(\frac{7}{18}a, 0, \frac{7}{176}a)$.



問題 4.2 (3) の図



問題 4.2 (4) の図

(4) まず

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} c \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) dx dy = c \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \int_0^b \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy \\ &= c \left(a - \frac{a^2}{2a}\right) \left(b - \frac{b^2}{2b}\right) = \frac{abc}{4}. \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned} \iiint_D x dx dy dz &= \iint_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} cx \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) dx dy = c \int_0^a x \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \int_0^b \left(1 - \frac{y}{b}\right) dy \\ &= c \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3a}\right) \left(b - \frac{b^2}{2b}\right) = \frac{a^2 bc}{12} \end{aligned}$$

よって重心の x 座標は $\frac{1}{3}a$. 対称性により y 座標は $\frac{1}{3}b$. 最後に

$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \iint_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{c(1-\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b})} dx dy = \frac{c^2}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx \int_0^b \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 dy \\ &= \frac{c^2}{2} \left[-\frac{a}{3} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3\right]_0^a \left[-\frac{b}{3} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^3\right]_0^b = \frac{abc^2}{18}. \end{aligned}$$

よって z 座標は $\frac{2}{9}c$. 以上により 重心は $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b, \frac{2}{9}c)$.

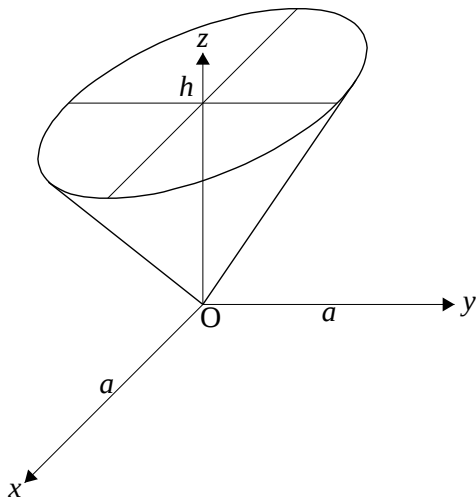
(5) M は普通に重積分で求めてもよいが, z 軸に関する回転体で, 切り口は半径 $\frac{az}{h}$ の円盤になっているので,

$$M = \int_0^h \pi \frac{a^2 z^2}{h^2} dz = \pi \frac{a^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{\pi}{3} a^2 h$$

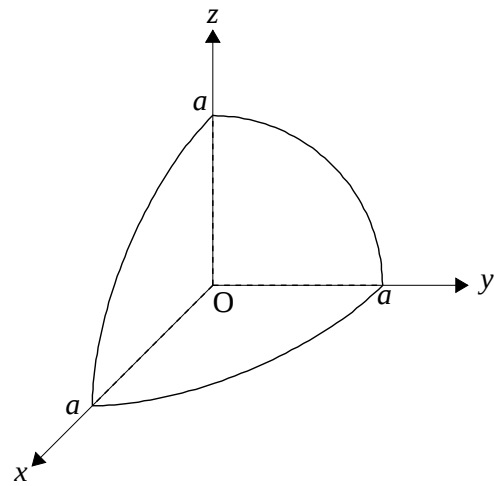
と簡単に求まる. 同様に

$$\iiint_D z dx dy dz = \int_0^h \pi z \frac{a^2 z^2}{h^2} dz = \frac{a^2}{h^2} \frac{h^4}{4} = \frac{a^2 h^2}{4}.$$

従って重心の z 座標は $\frac{3}{4}h$. 対称性により 重心は z 軸上に存在するので $(0, 0, \frac{3}{4}h)$.



問題 4.2 (5) の図



問題 4.2 (6) の図

(6) これは球の $\frac{1}{8}$ なので, $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \times \frac{1}{8} = \frac{\pi a^3}{6}$. 次に, 四半円の面積の値を用いて

$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \int_0^a z dz \iint_{x^2+y^2 \leq a^2-z^2, x \geq 0, y \geq 0} dx dy = \int_0^a z \cdot \frac{\pi}{4}(a^2 - z^2) dz \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^a (a^2 - z^2) d(z^2) = \frac{\pi}{8} \left[a^2 z^2 - \frac{1}{2} z^4 \right]_0^a = \frac{\pi}{16} a^4. \end{aligned}$$

故に重心の z 座標は $\frac{3}{8}a$. 対称性により x, y 座標も同じ値となるので, 重心は $(\frac{3}{8}a, \frac{3}{8}a, \frac{3}{8}a)$.

この問題は極座標を用いてそう面倒でなく普通に計算することもできる.

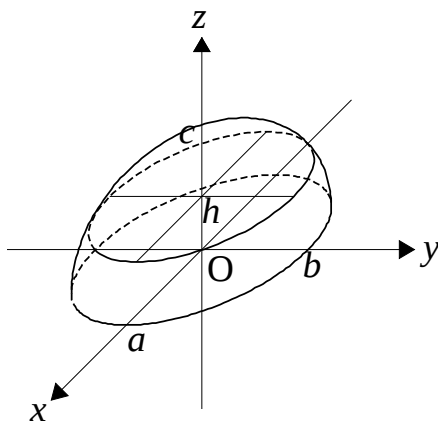
(7) これも回転体なので

$$M = \int_h^a \pi(a^2 - z^2) dz = \left[a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_h^a = \pi \left(\frac{2}{3} a^3 - a^2 h + \frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi}{3} (a - h)^2 (2a + h).$$

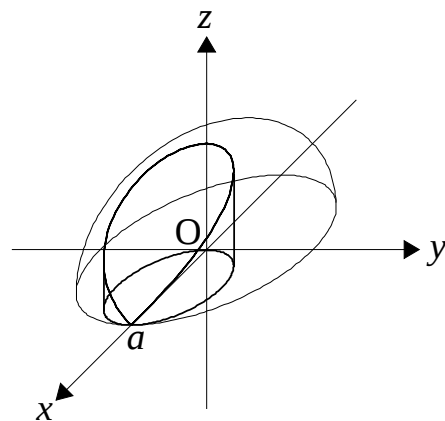
同様に,

$$\iiint_D z dx dy dz = \int_h^a \pi(a^2 - z^2) z dz = \pi \left[a^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_h^a = \pi \left(\frac{a^4}{4} - \frac{1}{2} a^2 h^2 + \frac{h^4}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (a^2 - h^2)^2.$$

よって重心の z 座標は $\frac{3}{4} \frac{(a+h)^2}{2a+h}$. 重心は z 軸上にあるから, $(0, 0, \frac{3}{4} \frac{(a+h)^2}{2a+h})$.



問題 4.2 (7) の図



問題 4.2 (8) の図

(8) 軸がずれた円柱による球の相貫なので、体積も計算するしかない． xy 平面で通常の極座標を用いると、 $x^2 + y^2 \leq ax \iff r \leq a \cos \theta$ に注意して

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_D dx dy dz = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} dx dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy \\
&= 2 \iint_{r \leq a \cos \theta} \sqrt{a^2-r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2-r^2} \frac{1}{2} d(r^2) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{2}{3} \sqrt{a^2-r^2}^3 \right]_0^{a \cos \theta} \\
&= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (a^3 - a^3 \sin^3 \theta) d\theta = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta) \right\} d\theta = \frac{4}{3} a^3 \left[\theta + \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{12} \cos 3\theta \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{12} \right) = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} \right) a^3 = \frac{2}{9} (3\pi - 4) a^3.
\end{aligned}$$

(ここで対称性を用いて θ の積分範囲をさっさと半分にしたが、もしこれを $[-\pi/2, \pi/2]$ のままでやるときは $\sqrt{1-\cos^2 \theta} = |\sin \theta|$ と絶対値を付けるのを忘れないようにせよ．)

次に、

$$\begin{aligned}
\iiint_D x dx dy dz &= 2 \iint_{r \leq a \cos \theta} r \cos \theta \sqrt{a^2-r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^a \sqrt{a^2-r^2} r^2 dr \int_0^{\arccos \frac{r}{a}} \cos \theta d\theta \\
&= 4 \int_0^a \sqrt{a^2-r^2} r^2 dr \sin \arccos \frac{r}{a} = 4 \int_0^a \sqrt{a^2-r^2} r^2 dr \sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} = \frac{4}{a} \int_0^a (a^2-r^2) r^2 dr \\
&= \frac{4}{a} \left[\frac{a^2 r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^a = \frac{4}{a} \frac{2}{15} a^5 = \frac{8}{15} a^4.
\end{aligned}$$

よって重心の x 座標は $\frac{12}{5(3\pi-4)}a$. 他の座標は対称性により 0 なので、重心は $(\frac{12}{5(3\pi-4)}a, 0, 0)$.

二つ目の重積分は r を先にしてももちろんできるが、 $r = \sin t$ などの置換積分が必要となり、計算がほんの少し面倒になる．

(9) これは回転放物面を斜めに切り落とした図形であり、 x, y について対称性がある． $x^2 + y^2 \leq z \leq -x - y$ なので、

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq -x-y} (-x-y-x^2-y^2) dx dy \\
&= \iint_{(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - (x+\frac{1}{2})^2 - (y+\frac{1}{2})^2 \right\} dx dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

ここで $x = r \cos \theta - \frac{1}{2}$, $y = r \sin \theta - \frac{1}{2}$ である．次に、

$$\begin{aligned}
\iiint_D x dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq -x-y} x(-x-y-x^2-y^2) dx dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r \cos \theta - \frac{1}{2}) \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{1}{2} M.
\end{aligned}$$

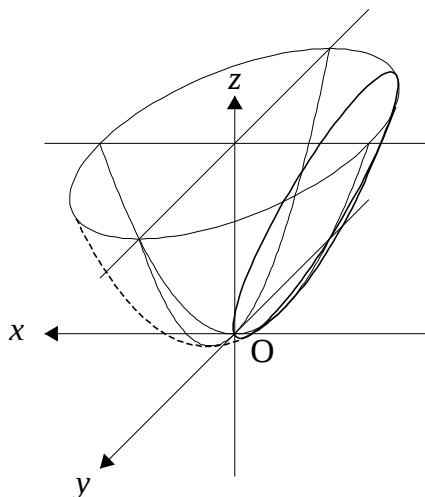
ここで $\cos \theta$ の 1 周期に渡る積分は 0 であることを用いた．よって重心の x 座標は $-\frac{1}{2}$. 対称性により y 座標も同じ値となる．最後に、

$$\begin{aligned}
\iiint_D z dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq -x-y} dx dy \int_{x^2+y^2}^{-x-y} z dz = \iint_{x^2+y^2 \leq -x-y} \frac{1}{2} \{ (x+y)^2 - (x^2+y^2)^2 \} dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr \int_0^{2\pi} [(r \cos \theta + r \sin \theta - 1)^2 - \{ (r \cos \theta - \frac{1}{2})^2 + (r \sin \theta - \frac{1}{2})^2 \}^2] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr \int_0^{2\pi} [r^2 + 2r^2 \cos \theta \sin \theta - 2r(\cos \theta + \sin \theta) + 1 - \{ r^2 - r(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{2} \}^2] d\theta
\end{aligned}$$

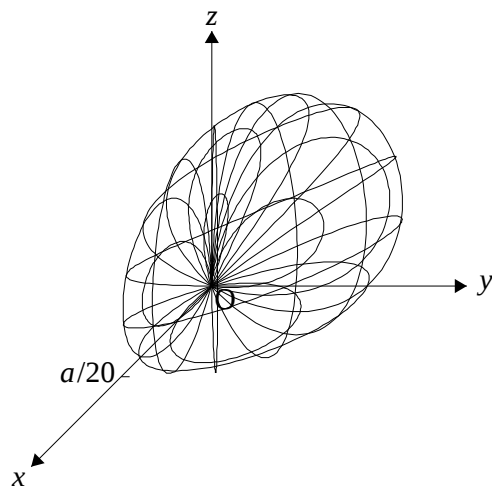
ここで, $\cos \theta, \sin \theta$ の 1 周期に渡る積分は消失することに注意して展開計算においてこれらを省略すれば

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr \int_0^{2\pi} \{r^2 + 2r^2 \cos \theta \sin \theta + 1 - \{r^4 + r^2(1 + 2 \cos \theta \sin \theta) + \frac{1}{4} + r^2\}\} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr \int_0^{2\pi} (r^2 + 1 - r^4 - 2r^2 - \frac{1}{4}) d\theta = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\frac{3}{4} - r^2 - r^4) r dr \\
 &= \pi \left[\frac{3}{4} \frac{r^2}{2} - \frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pi \left(\frac{3}{4} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{16} (3 - 1 - \frac{1}{3}) = \frac{5}{48} \pi.
 \end{aligned}$$

($\cos \theta \sin \theta$ の積分も 0 であることが容易に分かるが, 実はこの項はキャンセルして最終的には被積分函数に残らない.) よって重心の z 座標は $\frac{5}{6}$. 以上により重心は $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$.



問題 4.2 (9) の図



問題 4.2 (10) の図

(10) 3次元極座標 $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ を用いると, 図形の範囲は $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq axyz$
 $\iff r \leq a \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi, x \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0 \iff 0 \leq \varphi \leq \pi$, 従って合わせると $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,
 また $z \leq 0 \iff 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 従って

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi} r^2 \sin \theta dr \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{(a \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi)^3}{3} \sin \theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta (1 - \sin^2 \theta) d(\sin \theta) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) \sin^3 \varphi d(\sin \varphi) \\
 &= \frac{a^3}{3} \left[\frac{1}{8} \sin^8 \theta - \frac{1}{10} \sin^{10} \theta \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} \sin^4 \varphi - \frac{1}{6} \sin^6 \varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{3} \frac{1}{40} \frac{1}{12} = \frac{a^3}{32 \cdot 45} = \frac{a^3}{1440}.
 \end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z dx dy dz &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi} r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \\
 &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{(a \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi)^4}{4} \cos \theta \sin \theta \\
 &= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^9 \theta \cos^5 \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^9 (1 - \cos^2 \theta)^2 d(\sin \theta) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{16} \sin^4 2\varphi d\varphi \\
 &= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} (\sin^9 \theta - 2 \sin^{11} \theta + \sin^{13} \theta) d(\sin \theta) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{64} (1 - \cos 4\varphi)^2 d\varphi \\
 &= \frac{a^4}{4} \left[\frac{1}{10} \sin^{10} \theta - \frac{2}{12} \sin^{12} \theta + \frac{1}{14} \sin^{14} \theta \right]_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{64} (1 - 2 \cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi) d\varphi \\
 &= \frac{a^4}{4} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \right) \frac{1}{64} \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos 4\varphi + \frac{1 + \cos 8\varphi}{2}) d\varphi \\
 &= \frac{a^4}{64 \cdot 8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) \frac{3}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{a^4}{64 \cdot 32 \cdot 35} \pi = \frac{\pi a^4}{71680}.
 \end{aligned}$$

ここで $\cos 4\varphi$ や $\cos 8\varphi$ は $\frac{\pi}{2}$ -周期なので、積分は計算しなくても消えることが分かる. よって重心の z 座標は $\frac{9\pi a}{64 \cdot 7} = \frac{9\pi}{448}a$. 対称性により、他の座標も同じ値となり、重心は $(\frac{9\pi}{448}a, \frac{9\pi}{448}a, \frac{9\pi}{448}a)$.

(11) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^3 z$ は回転体で、 $z^4 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq a^3 z$ より $0 \leq z \leq a$. またこの範囲に z を止めたときの x, y の範囲は $x^2 + y^2 \leq \sqrt{a^3 z} - z^2$ よって

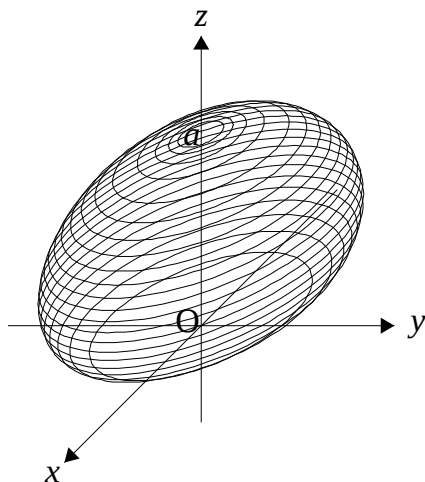
$$M = \iiint_D dx dy dz = \int_0^a \pi(\sqrt{a^3 z} - z^2) dz = \pi \left[\sqrt{a^3} \frac{2}{3} \sqrt{z^3} - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^a = \frac{\pi}{3} a^3.$$

次に

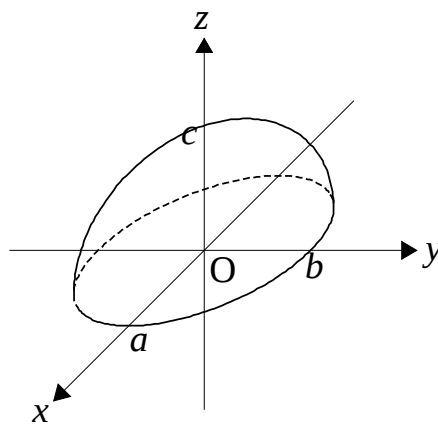
$$\iiint_D z dx dy dz = \int_0^a \pi(\sqrt{a^3 z} - z^2) z dz = \pi \left[\sqrt{a^3} \frac{2}{5} \sqrt{z^5} - \frac{1}{4} z^4 \right]_0^a = \frac{3}{20} \pi a^4.$$

よって重心の z 座標は $\frac{9}{20}a$. 対称性により重心は z 軸上にあるので、 $(0, 0, \frac{9}{20}a)$.

この問題は 3 次元極座標を使っても計算できるが、ひどく面倒になる.



問題 4.2 (11) の図



問題 4.2 (12) の図

(12) この図形は楕円体の半分なので $M = \frac{4}{3}\pi abc \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi abc$. カバリエリの原理と楕円の面積の公式により

$$\begin{aligned}\iiint_D z dx dy dz &= \int_0^c z dz \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}} dx dy = \int_0^c \pi a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} z dz \\ &= \pi ab \int_0^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z dz = \pi ab \left[-\frac{c^2}{4} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \right]_0^c = \frac{\pi}{4} abc^2.\end{aligned}$$

よって重心の z 座標は $\frac{3}{8}c$. 対称性により重心は z 軸上にあるので, $(0, 0, \frac{3}{8}c)$ となる. この答は当然ながら (7) で $h = 0$ としたもの的一致する.

(13) 楕円体から楕円錐が切り取る部分である.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

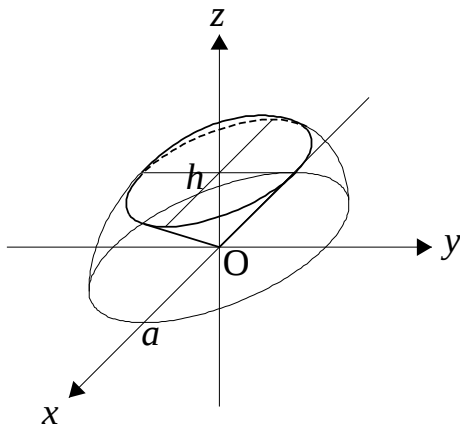
なので, $\frac{z^2}{c^2} \leq \frac{1}{2}$ では前者の範囲, $\frac{z^2}{c^2} \geq \frac{1}{2}$ では後者の範囲となるから,

$$\begin{aligned}M &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^{c/\sqrt{2}} \pi ab \frac{z^2}{c^2} dz + \int_{c/\sqrt{2}}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab \left[\frac{z^3}{3c^2} \right]_0^{c/\sqrt{2}} + \pi ab \left[z - \frac{z^3}{3c^2} \right]_{c/\sqrt{2}}^c \\ &= \frac{\pi abc}{6\sqrt{2}} + \pi ab \left(c - \frac{c}{3} - \frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{3\sqrt{2}} (\sqrt{2} - 1) \pi abc = \frac{2 - \sqrt{2}}{3} \pi abc.\end{aligned}$$

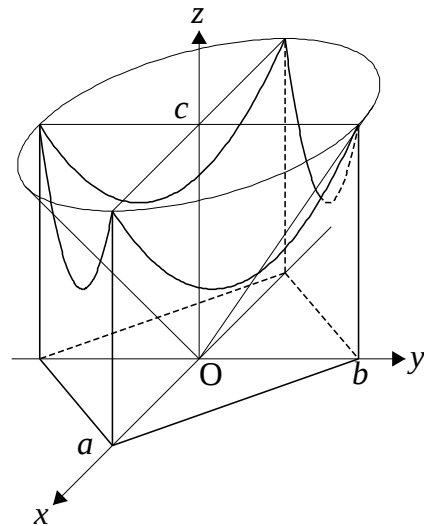
次に,

$$\begin{aligned}\iiint_D z dx dy dz &= \int_0^{c/\sqrt{2}} \pi ab \frac{z^2}{c^2} z dz + \int_{c/\sqrt{2}}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z dz = \pi ab \left[\frac{z^4}{4c^2} \right]_0^{c/\sqrt{2}} + \pi ab \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4c^2} \right]_{c/\sqrt{2}}^c \\ &= \frac{\pi abc^2}{16} + \pi ab \left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{16} \right) = \frac{\pi abc^2}{8}.\end{aligned}$$

よって重心の z 座標は $\frac{3}{8(2 - \sqrt{2})}c = \frac{3(2 + \sqrt{2})}{16}c$. この重心も z 軸上にあるので $(0, 0, \frac{6 + 3\sqrt{2}}{16}c)$.



問題 4.2 (13) の図



問題 4.2 (14) の図

(14) x, y の積分に変数変換

$$\begin{aligned}M &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{-1 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, -1 \leq \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \leq 1} dx dy \int_0^{c(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})} dz \\ &= \iint_{-1 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, -1 \leq \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \leq 1} c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy\end{aligned}$$

ここで，変数変換

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \xi, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \eta, \quad \text{従って} \quad \frac{x}{a} = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\xi - \eta}{2}$$

を使うと，

$$\begin{aligned} &= \iint_{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1} \frac{c}{4} \{(\xi + \eta)^2 + (\xi - \eta)^2\} \frac{ab}{2} d\xi d\eta = \frac{abc}{4} \iint_{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1} (\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta \\ &= \frac{abc}{4} \cdot 2 \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi d\eta = \frac{abc}{4} 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2abc}{3}. \end{aligned}$$

同様の計算で，

$$\begin{aligned} \iiint_D z dx dy dz &= \iint_{-1 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, -1 \leq \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \leq 1} dx dy \int_0^{c(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})} z dz \\ &= \iint_{-1 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, -1 \leq \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \leq 1} \frac{c^2}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 dx dy \\ &= \iint_{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1} \frac{c^2}{8} \{(\xi + \eta)^2 + (\xi - \eta)^2\}^2 \frac{ab}{2} d\xi d\eta \\ &= \frac{abc^2}{8} \iint_{-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1} (\xi^4 + 2\xi^2\eta^2 + \eta^4) d\xi d\eta \\ &= \frac{abc^2}{8} \left(2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi^4 d\xi d\eta + 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi^2 \eta^2 d\xi d\eta \right) = \frac{abc^2}{8} \left(2 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{7abc^2}{45}. \end{aligned}$$

ここで対称性により展開後の二つの積分をまとめた．よって重心の z 座標は $\frac{7}{30}c$ ．重心は z 軸上にあるので， $(0, 0, \frac{7}{30}c)$ ．

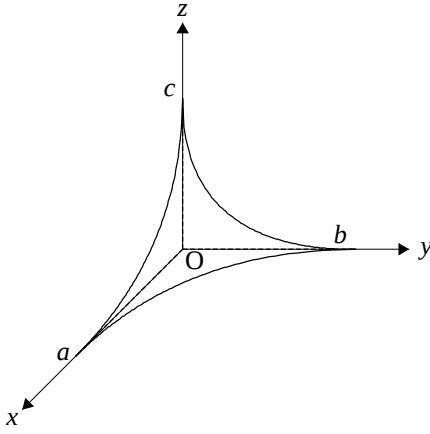
(15) $\sqrt{\frac{x}{a}} = \xi, \sqrt{\frac{y}{b}} = \eta, \sqrt{\frac{z}{c}} = \zeta$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{\xi + \eta + \zeta \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0} 8abc \xi \eta \zeta d\xi d\eta d\zeta \\ &= 8abc \iint_{\xi + \eta \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0} \xi \eta d\xi d\eta \int_0^{1-\xi-\eta} \zeta d\zeta = 8abc \iint_{\xi + \eta \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0} \xi \eta \frac{(1-\xi-\eta)^2}{2} d\xi d\eta \\ &= 4abc \int_0^1 \xi d\xi \int_0^{1-\xi} (1-\xi-\eta)^2 \eta d\eta = 4abc \int_0^1 \xi d\xi \int_0^{1-\xi} \{(1-\xi)^2\eta - 2(1-\xi)\eta^2 + \eta^3\} d\eta \\ &= 4abc \int_0^1 \{(1-(1-\xi))\} d\xi \left[(1-\xi)^2 \frac{\eta^2}{2} - 2(1-\xi) \frac{\eta^3}{3} + \frac{\eta^4}{4} \right]_0^{1-\xi} \\ &= 4abc \int_0^1 \left\{ \frac{(1-\xi)^4}{2} - \frac{2(1-\xi)^4}{3} + \frac{(1-\xi)^4}{4} - \frac{(1-\xi)^5}{2} + \frac{2(1-\xi)^5}{3} - \frac{(1-\xi)^5}{4} \right\} d\xi \\ &= \frac{1}{3} abc \left[-\frac{(1-\xi)^5}{5} + \frac{(1-\xi)^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{90} abc. \end{aligned}$$

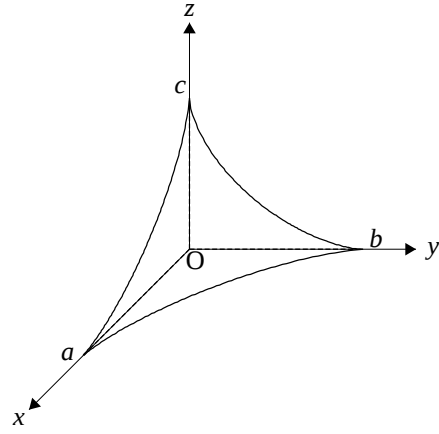
同様に

$$\begin{aligned}
\iiint_D z dx dy dz &= \iiint_{\xi+\eta+\zeta \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0} 8abc \xi \eta \zeta c^2 d\xi d\eta d\zeta \\
&= 8abc^2 \iint_{\xi+\eta \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0} \xi \eta d\xi d\eta \int_0^{1-\xi-\eta} \zeta^3 d\zeta = 8abc^2 \iint_{\xi+\eta \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0} \xi \eta \frac{(1-\xi-\eta)^4}{4} d\xi d\eta \\
&= 2abc^2 \int_0^1 \xi d\xi \int_0^{1-\xi} (1-\xi-\eta)^4 d\eta \\
&= 2abc^2 \int_0^1 \xi d\xi \int_0^{1-\xi} \{(1-\xi)^4 \eta - 4(1-\xi)^3 \eta^2 + 6(1-\xi)^2 \eta^3 - 4(1-\xi) \eta^4 + \eta^5\} d\eta \\
&= 2abc^2 \int_0^1 \{1 - (1-\xi)\} d\xi \left[(1-\xi)^4 \frac{\eta^2}{2} - 4(1-\xi)^3 \frac{\eta^3}{3} + 6(1-\xi)^2 \frac{\eta^4}{4} - 4(1-\xi) \frac{\eta^5}{5} + \frac{\eta^6}{6} \right]_0^{1-\xi} \\
&= 2abc^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \right) \int_0^1 \{(1-\xi)^6 - (1-\xi)^7\} d\xi = \frac{1}{15} abc^2 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{15 \cdot 8 \cdot 7} abc^2 = \frac{1}{840} abc^2
\end{aligned}$$

よって重心の z 座標は $\frac{3}{28}c$. 他の座標は対称性により c を a, b に替えて求まり, 重心は $(\frac{3a}{28}, \frac{3b}{28}, \frac{3c}{28})$ となる.



問題 4.2 (15) の図



問題 4.2 (16) の図

(16) $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} = \xi, \left(\frac{y}{b}\right)^{1/3} = \eta, \left(\frac{z}{c}\right)^{1/3} = \zeta$, 次いで $\xi = r \sin \theta \cos \varphi, \eta = r \sin \theta \sin \varphi, \zeta = r \cos \theta$ と極座標に変換すると,

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0} 27abc \xi^2 \eta^2 \zeta^2 d\xi d\eta d\zeta \\
&= 27abc \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^6 \cdot r^2 dr \\
&= 27abc \cdot \frac{1}{9} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} -(1 - \cos^2 \theta)^2 \cos^2 \theta d(\cos \theta) \\
&= \frac{3}{4} abc \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} + 2\frac{\cos^5 \theta}{5} - \frac{\cos^7 \theta}{7} \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3}{4} abc \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{8}{105} = \frac{\pi}{70} abc.
\end{aligned}$$

同様に, φ に関する積分値は流用して

$$\begin{aligned}
 \iiint_D z dx dy dz &= \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0} 27abc^2 \xi^2 \eta^2 \zeta^5 d\xi d\eta d\zeta \\
 &= 27abc^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^5 \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^9 \cdot r^2 dr \\
 &= \frac{27}{12} abc^2 \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right)^5 d\theta \\
 &= \frac{9}{64} \pi abc^2 \cdot \frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{2} (1 - \cos^2 2\theta)^2 d \cos 2\theta \\
 &= \frac{9}{64 \cdot 32} \pi abc^2 \cdot \frac{1}{2} \left[-\cos 2\theta + \frac{2}{3} \cos^3 2\theta - \frac{1}{5} \cos^5 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{9}{64 \cdot 32} \pi abc^2 \cdot \frac{1}{2} 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{9}{64 \cdot 32} \pi abc^2 \frac{8}{15} = \frac{3}{1280} \pi abc^2
 \end{aligned}$$

よって重心の z 座標は $\frac{21}{128}c$. 他の座標は対称性により c を a, b に替えて求まり, 重心は $(\frac{21}{128}a, \frac{21}{128}b, \frac{21}{128}c)$ となる.

問題 4.3 以下, 対象となる平板を xy 平面の閉領域 D とする.

(1)

$$\iint_D x^2 dx dy = \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy = 4b \int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} x^2 dx$$

ここで $x = a \sin \theta$ なる置換で

$$\begin{aligned}
 I &= 4b \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot a^2 \sin^2 \theta \cdot a \cos \theta d\theta = 4a^3 b \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = a^3 b \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta \\
 &= a^3 b \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{4} a^3 b.
 \end{aligned}$$

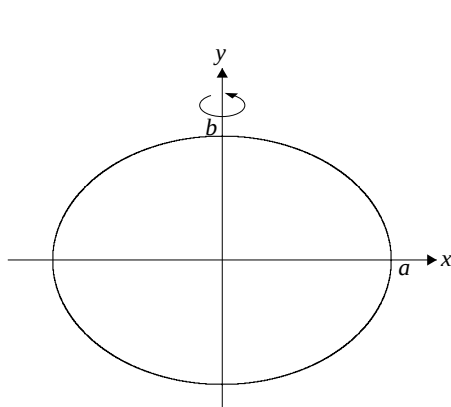
(慣性モーメントは物理でいわゆるディメンションが長さの 4 乗となっていることに注意せよ.)

(2) 直角三角形を図のように置く. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$ なので

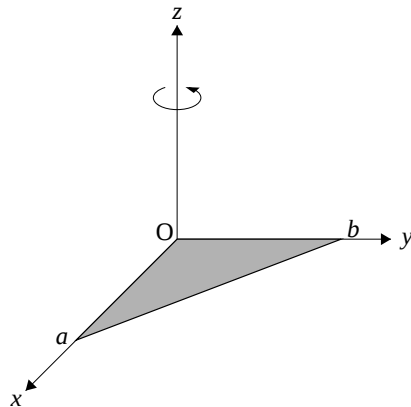
$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^b dy \int_0^{a(1-y/b)} (x^2 + y^2) dx = \int_0^b dy \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_0^{a(1-y/b)} \\
 &= \int_0^b \left\{ \frac{a^3}{3} \left(1 - \frac{y}{b} \right)^3 + ay^2 \left(1 - \frac{y}{b} \right) \right\} dy = \left[-\frac{a^3 b}{12} \left(1 - \frac{y}{b} \right)^4 + \frac{ay^3}{3} - \frac{ay^4}{4b} \right]_0^b \\
 &= \frac{ab^3}{3} - \frac{ab^3}{4} + \frac{a^3 b}{12} = \frac{ab}{12} (a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

(3) 円盤を $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2, z=0$, また回転軸を z 軸とし, 平面極座標を用いると,

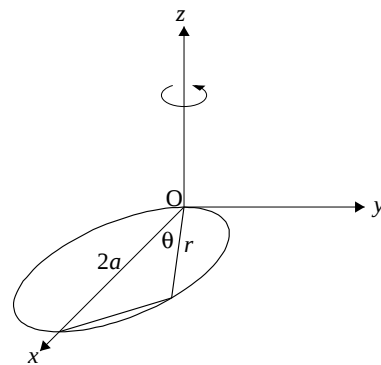
$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^2 \cdot r dr = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{16}{4} a^4 \cos^4 \theta d\theta \\
 &= 8a^4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta)^2 d\theta = 2a^4 \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\
 &= 2a^4 \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \right) d\theta = 2a^4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi a^4.
 \end{aligned}$$



問題 4.3 (1) の図



問題 4.3 (2) の図



問題 4.3 (3) の図

(4) $y^2 = 4px$ と $x + y = 3p$ の第 1 象限内の交点は $y^2 = 4p(3p - y)$ より $y = 2p, x = p$. 従つて

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 dx dy = \int_0^{2p} dy \int_{y^2/4p}^{3p-y} x^2 dx = \int_0^{2p} \left(\frac{(3p-y)^3}{3} - \frac{(y^2/4p)^3}{3} \right) dy \\ &= \left[-\frac{(3p-y)^4}{12} - \frac{y^7}{7 \cdot 3 \cdot 64p^3} \right]_0^{2p} = -\frac{1}{12}p^4 + \frac{81}{12}p^4 - \frac{128p^7}{21 \cdot 64p^3} = \frac{140-2}{21}p^4 = \frac{138}{21}p^4 = \frac{46}{7}p^4. \end{aligned}$$

(5) この正 n 角形を構成する 3 角形の一つを $\frac{1}{n}D$ で表すとき, これを x 軸について線対称の位置に置けば, 慣性モーメントの加法性により

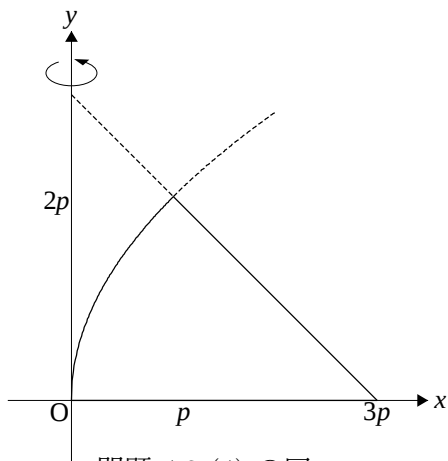
$$\begin{aligned} \frac{1}{n}I &= \iint_{\frac{1}{n}D} (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^{R \cos \frac{\pi}{n}} dx \int_0^{x \tan \frac{\pi}{n}} (x^2 + y^2) dy = 2 \int_0^{R \cos \frac{\pi}{n}} dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{x \tan \frac{\pi}{n}} \\ &= 2 \int_0^{R \cos \frac{\pi}{n}} \left(x^3 \tan \frac{\pi}{n} + \frac{x^3}{3} \tan^3 \frac{\pi}{n} \right) dx = 2 \left(\tan \frac{\pi}{n} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\pi}{n} \right) \frac{1}{4} R^4 \cos^4 \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{R^4}{6} (3 \cos^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n}) \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{R^4}{6} (2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + 1) \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{R^4}{12} (2 + \cos \frac{2\pi}{n}) \sin \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

よつて,

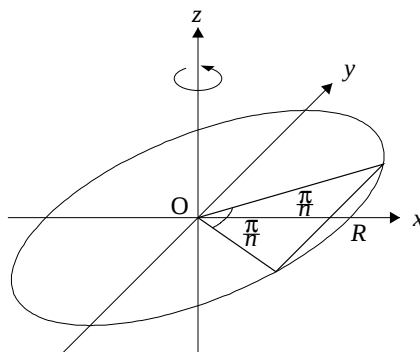
$$I = \frac{nR^4}{6} (2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + 1) \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{nR^4}{12} (2 + \cos \frac{2\pi}{n}) \sin \frac{2\pi}{n}.$$

(6) 対称性により

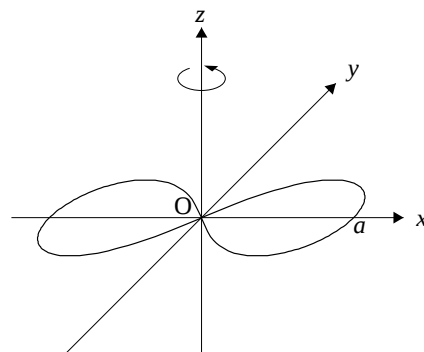
$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 \cdot r dr = a^4 \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \\ &= a^4 \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta = a^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} a^4. \end{aligned}$$



問題 4.3 (4) の図



問題 4.3 (5) の図



問題 4.3 (6) の図

問題 4.4 (1)

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz = c \int_0^a dx \int_0^b (x^2 + y^2) dy = c \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^b dx \\ &= c \left[\frac{x^3 b}{3} + \frac{b^3}{3} x \right]_0^a = c \left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{a b^3}{3} \right) = \frac{abc}{3} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

(2) 普通の平面極座標を用いると, x, y の範囲 $x^2 + y^2 \leq ax$ は, $0 \leq r \leq a \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ となるので,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq ax} (x^2 + y^2) \sqrt{2ax} dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r^2 \sqrt{2ar \cos \theta} r dr \\ &= 2\sqrt{2a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r^{7/2} dr = 2\sqrt{2a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \theta} \frac{2}{9} (a \cos \theta)^{9/2} d\theta \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{9} a^5 \int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta d\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9} a^5 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^2 d(\sin \theta) = \frac{4\sqrt{2}}{9} a^5 \left[\sin \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta + \frac{1}{5} \sin^5 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{9} a^5 \times \frac{8}{15} = \frac{32\sqrt{2}}{135} a^5. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy \int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^h dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left(h - \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2) dx dy = 2\pi \int_0^a \left(h - \frac{h}{a} r \right) r^2 \cdot r dr \\ &= 2\pi \left[\frac{hr^4}{4} - \frac{h}{a} \frac{r^5}{5} \right]_0^a = 2\pi \left(\frac{ha^4}{4} - \frac{ha^4}{5} \right) = \frac{\pi}{10} ha^4. \end{aligned}$$

(4) $x + y \leq \sqrt{2}a - z \leq \sqrt{2}a$ であるが, $x^2 + y^2 \leq a^2$ のとき $x + y \leq \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}a$ より, 最初の条件はこれから従う. よって, x, y の範囲としては後者だけ考えれば良く,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy \int_0^{\sqrt{2}a-x-y} dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2)(\sqrt{2}a - x - y) dx dy \end{aligned}$$

ここで平面極座標を用いると,

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \{ \sqrt{2}a - r(\cos \theta + \sin \theta) \} r dr = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{a^4}{4} \sqrt{2}a - \frac{a^5}{5} (\cos \theta + \sin \theta) \right\} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} a^5 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} a^5. \end{aligned}$$

ここで, 三角関数の周期に渡る積分は消えた.

(5) 極座標を使うと, 図形の範囲は $z \geq 0$ より $r \leq a(\cos \theta)^{1/3}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ となるので,

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a(\cos \theta)^{1/3}} r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= 2\pi \frac{a^5}{5} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{5/3} \cdot \sin^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

ここで θ の積分は $\cos \theta = t$ と変換すると

$$\int_0^1 t^{5/3} (1 - t^2) dt = \int_0^1 (t^{5/3} - t^{11/3}) dt = \frac{3}{8} - \frac{3}{14} = \frac{3}{2} \frac{3}{28}$$

となるので、上は

$$= \frac{2}{5}\pi a^5 \cdot \frac{3}{2} \frac{3}{28} = \frac{9}{140}\pi a^5.$$

(6) これも D の範囲は $z \geq 0$ に含まれ、極座標では $r \leq a(\cos \theta)^{1/5}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ となるので、

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a(\cos \theta)^{1/5}} r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr = 2\pi \frac{a^5}{5} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{5}\pi a^5 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d(\sin \theta) = \frac{2}{5}\pi a^5 \left[\frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{10}\pi a^5 \end{aligned}$$

(7) 今度は D において $x \geq 0$ 従って極座標での範囲は $r \leq a(\cos \theta \sin \theta)^{1/5}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ となり、

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^\pi d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a(\cos \varphi \sin \theta)^{1/5}} r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{a^5}{5} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{a^5}{5} \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^5}{5} \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{20} a^5. \end{aligned}$$

ここで θ に関する積分には例題 4.9.1 の漸化式の公式を用いたが、漸化式が利用できない環境では、高校生式に

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - [\sin 2\theta]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) d\theta \right) = \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

と計算してもよい。

(8) スケール変換した極座標 $x = ar \sin \theta \cos \varphi$, $y = br \sin \theta \sin \varphi$, $z = cr \cos \theta$ により

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta \cdot abcr^4 \sin \theta dr \\ &= \frac{1}{5}abc \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{5}abc \cdot 4(a^2 + b^2) \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15} abc(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

ここで $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}$ を用いた。

(9) 今度は yz -平面に平面極座標を用いて、

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_{y^2+z^2 \leq a^2} dy dz \int_{-h}^h (x^2 + y^2) dx = \int_{y^2+z^2 \leq a^2} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-h}^h dy dz \\ &= \int_{y^2+z^2 \leq a^2} \left(\frac{2h^3}{3} + 2hy^2 \right) dy dz = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{2h^3}{3} + 2hr^2 \sin^2 \theta \right) r d\theta \\ &= \int_0^a \left(2\pi \frac{2h^3}{3} + 2\pi hr^2 \right) r dr = \frac{4\pi}{3} h^3 \frac{a^2}{2} + 2\pi h \frac{a^4}{4} = 2\pi ha^2 \left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4} \right) = \frac{\pi}{6} a^2 h (3a^2 + 4h^2). \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}
\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iint_{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} dx dy \int_0^{c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})} (x^2 + y^2) dz \\
&= \iint_{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} (x^2 + y^2) c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{b(1 - \frac{x}{a})} (x^2 + y^2) c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy \\
&= c \int_0^a dx \int_0^{b(1 - \frac{x}{a})} \left(x^2 - \frac{x^3}{a} - \frac{x^2 y}{b} + y^2 - \frac{xy^2}{a} - \frac{y^3}{b}\right) dy \\
&= c \int_0^a \left[x^2 y - \frac{x^3}{a} y - \frac{x^2 y^2}{2b} + \frac{y^3}{3} - \frac{xy^3}{3a} - \frac{y^4}{4b}\right]_0^{b(1 - \frac{x}{a})} dx \\
&= c \int_0^a \left\{x^2 b \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{x^3}{a} b \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{x^2}{2b} b^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3} b^3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 - \frac{x}{3a} b^3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4b} b^4 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4\right\} dx \\
&= c \int_0^a \left\{bx^2 - \frac{bx^3}{a} - \frac{bx^3}{a} + \frac{bx^4}{a^2} - \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^3}{a} - \frac{bx^4}{2a^2}\right\} dx + c \int_0^a \left\{\frac{b^3}{3} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 - \frac{b^3}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4\right\} dx \\
&= c \left\{\frac{ba^3}{3} - 2\frac{ba^4}{4a} + \frac{ba^5}{5a^2} - \frac{ba^3}{6} + \frac{ba^4}{4a} - \frac{ba^5}{10a^2}\right\} + \frac{b^3 c}{12} \cdot \frac{a}{5} \\
&= \frac{1}{60} a^3 bc + \frac{1}{60} ab^3 c = \frac{1}{60} abc(a^2 + b^2).
\end{aligned}$$

(11) 第1象限の部分だけを計算し、それを8倍すればよい。第1象限では、 $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} = \xi$, $\left(\frac{y}{b}\right)^{1/3} = \eta$, $\left(\frac{z}{c}\right)^{1/3} = \zeta$ と変数変換すると、

$$I : \iiint_{D \cap \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}} (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0} (a^2 \xi^6 + b^2 \eta^6) 27abc \xi^2 \eta^2 \zeta^2 d\xi d\eta d\zeta$$

ここで更に極座標 $\xi = r \cos \varphi \sin \theta$, $\eta = r \sin \varphi \sin \theta$, $\zeta = r \cos \theta$ を用いると

$$\begin{aligned}
&= 27abc \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^{14} (a^2 \cos^6 \varphi + b^2 \sin^6 \varphi) \sin^6 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin^4 \theta \cos^2 \theta \sin \theta dr \\
&= 27abc \frac{1}{15} \int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^6 \varphi + b^2 \sin^6 \varphi) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^{11} (1 - \sin^2 \theta) d\theta
\end{aligned}$$

よって θ と φ の積分を別々に実行すればよい。まず θ の方は、例題 4.9.1 の漸化式 (n が奇数の場合) を用いると

$$= \left(\frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} - \frac{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2}{13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}\right) = \left(1 - \frac{12}{13}\right) \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1}{13} \frac{2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{2^8}{13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7}$$

次に、 φ の方は、対称性を用い $\cos^6 \varphi$ の項と $\sin^6 \varphi$ の項をまとめると、同じく例題 4.9.1 の漸化式 (n が偶数の場合) を用いて

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} (a^2 + b^2) \cos^6 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = (a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \cos^8 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) d\varphi \\
&= (a^2 + b^2) \left(\frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \pi}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4} - \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \pi}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4}\right) = (a^2 + b^2) \frac{1}{10} \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \pi}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4} = (a^2 + b^2) \frac{1}{2} \frac{7}{8 \cdot 2 \cdot 4} \frac{\pi}{4} = (a^2 + b^2) \frac{7}{2^9} \pi
\end{aligned}$$

よって最初の積分は

$$I = 27abc \frac{1}{15} \frac{2^8}{13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7} (a^2 + b^2) \frac{7}{2^9} \pi = \frac{\pi}{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13} abc(a^2 + b^2)$$

となるから、求める慣性モーメントはこの8倍で

$$\frac{4\pi}{5 \cdot 11 \cdot 13} abc(a^2 + b^2) = \frac{4\pi}{715} abc(a^2 + b^2).$$

別解 上で用いた漸化式を使わないと，これらの計算は半角公式でやるのはけっこう面倒なので，別の計算法を示す．

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{D \cap \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}} (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} (x^2 + y^2) \int_0^{c\{1 - (\frac{x}{a})^{2/3} - (\frac{y}{b})^{2/3}\}^{3/2}} dz \\ &= \iint_{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} (x^2 + y^2) c \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} - \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} \right\}^{3/2} dx dy \end{aligned}$$

ここで $x = ar^3 \cos^3 \theta$, $y = br^3 \sin^3 \theta$ と変換すると，変換のヤコビ行列式は

$$\begin{vmatrix} 3ar^2 \cos^3 \theta & -3ar^3 \cos^2 \theta \sin \theta \\ 3br^2 \sin^3 \theta & 3br^3 \sin^2 \theta \cos \theta \end{vmatrix} = 9abr^5 (\cos^4 \theta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^4 \theta) = 9abr^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

となる（この変換は最初の解答のように $\xi = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/3}$, $\eta = \left(\frac{y}{b}\right)^{1/3}$ ，次いで $\xi = r \cos \theta$, $\eta = r \sin \theta$ と二度に分けると，前者のヤコビアンは対角型となり簡単になる）ので，

$$I = 9abc \int_0^1 (1 - r^2)^{3/2} r^{11} dr \int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^6 \theta + b^2 \sin^6 \theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

ここで r の積分は $r^2 = s$, 次いで $\sqrt{1-s} = t$ と変換すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^{11} (1 - r^2)^{3/2} dr &= \frac{1}{2} \int_0^1 s^5 (1 - s)^{3/2} ds = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - t^2)^5 t^3 2t dt = \int_0^1 (1 - 5t^2 + 10t^4 - 10t^6 + 5t^8 - t^{10}) t^4 dt \\ &= \int_0^1 (t^4 - 5t^6 + 10t^8 - 10t^{10} + 5t^{12} - t^{14}) dt = \frac{1}{5} - \frac{5}{7} + \frac{10}{9} - \frac{10}{11} + \frac{5}{13} - \frac{1}{15} = \frac{2}{15} - \frac{30}{91} + \frac{20}{99} = \frac{2}{15} - \frac{1150}{91 \cdot 99} \\ &= 2 \frac{33 \cdot 91 - 5 \cdot 575}{5 \cdot 91 \cdot 99} = 2 \frac{128}{5 \cdot 91 \cdot 99} = \frac{256}{5 \cdot 91 \cdot 99}. \end{aligned}$$

次に θ の積分は，対称性により一旦 $\cos^6 \theta$ の方にまとめてから，また戻すと

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^6 \theta + b^2 \sin^6 \theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta &= (a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \cdot \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= (a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \cos^6 \theta + \sin^6 \theta &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^3 - 3(\cos^4 \theta \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^4 \theta) \\ &= 1 - 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta \end{aligned}$$

を使うと，上は

$$\begin{aligned} &= (a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta \right) \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8} (a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 2\theta - \frac{3}{4} \sin^4 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{8} (a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1 - \cos 4\theta}{2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right)^2 \right\} d\theta = \frac{1}{8} (a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{16} (1 + \cos^2 4\theta) \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{8} (a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \left(\frac{5}{16} - \frac{3}{16} \frac{1 + \cos 8\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{8} (a^2 + b^2) \frac{7}{32} \frac{\pi}{2} = \frac{7}{512} (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

となる．よって求める積分は

$$9abc \times \frac{256}{5 \cdot 91 \cdot 99} \times \frac{7}{512} (a^2 + b^2) = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13} abc (a^2 + b^2).$$

となるから，求める慣性モーメントはこの 8 倍で上と同じ値になる．

問題 4.5, 問題 4.6 は本書の章末解答を参照してください.

問題 4.7 変数の定義から $0 \leq x \leq \frac{b}{2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ であるが, 対称性により後者を $0 \leq \theta < \pi$ とみなす. これらの値について, 針が平行線にひつかかるのは, $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$, かつ, $\sin \theta \geq \frac{x}{a} = \frac{2x}{a}$, すなわち, $\text{Arcsin} \frac{2x}{a} \leq \theta \leq \pi - \text{Arcsin} \frac{2x}{a}$ である. 一様分布の仮定から, これらの範囲の全体に対する割合が求める確率となるので

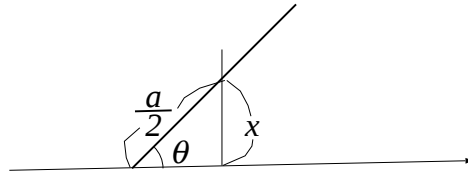
$$P = \frac{1}{\frac{b}{2}\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{\text{Arcsin} \frac{2x}{a}}^{\pi - \text{Arcsin} \frac{2x}{a}} d\theta = \frac{1}{\frac{b}{2}\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\pi - 2 \text{Arcsin} \frac{2x}{a} \right) dx$$

ここで部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{a}{2}} \text{Arcsin} \frac{2x}{a} dx &= \left[x \text{Arcsin} \frac{2x}{a} \right]_0^{\frac{a}{2}} - \int_0^{\frac{a}{2}} x \cdot \frac{2}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2}} dx \\ &= \frac{a}{2} \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2}} d\left(\frac{2x}{a}\right)^2 \\ &= \frac{a\pi}{4} - \frac{a}{4} \left[-2\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a\pi}{4} - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

よって

$$P = \frac{1}{\frac{b}{2}\pi} \left\{ \frac{a\pi}{2} - 2\left(\frac{a\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \right\} = \frac{2a}{b\pi}.$$



☞ $a \geq b$ のときは上の計算は通用しない. 実際 a を大きくしてゆくと, 求めた値は 1 を越えてしまい, 確率であることに矛盾する. この場合は, x が動く範囲は $0 \leq x \leq \frac{b}{2}$ となっているので, x に関する積分の範囲もこれになる. よってこの場合は

$$P = \frac{1}{\frac{b}{2}\pi} \int_0^{\frac{b}{2}} dx \int_{\text{Arcsin} \frac{2x}{a}}^{\pi - \text{Arcsin} \frac{2x}{a}} d\theta = \frac{1}{\frac{b}{2}\pi} \int_0^{\frac{b}{2}} \left(\pi - 2 \text{Arcsin} \frac{2x}{a} \right) dx$$

となり, 上と同様に計算すると

$$\int_0^{\frac{b}{2}} \text{Arcsin} \frac{2x}{a} dx = \frac{b}{2} \text{Arcsin} \frac{b}{a} - \frac{a}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right)$$

よって

$$P = \frac{2}{b\pi} \left\{ b\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin} \frac{b}{a}\right) + a\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right) \right\}$$

この値は $a = b$ で上に求めた表現と連続に繋がり, 常に 1 より小で, かつ $a \rightarrow \infty$ のとき 1 に近づく.

問題 4.8 三角形ができる条件は $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$ である. これは $|a - b| < c < a + b$ とまとめられるが, 絶対値の扱いは面倒なので, 場合に分けて, 排他的な和集合

$$\{(a, b, c); a \geq b, a - b < c < a + b\} \cup \{(a, b, c); a < b, b - a < c < a + b\} \quad (\text{A4.1})$$

としておく.

さて点 (x, y, z) が (a, b, c) を中心とする微小直方体 $\Delta a \Delta b \Delta c$ に落ちる確率は、仮定によりほぼ $e^{-a} \Delta a e^{-b} \Delta b e^{-c} \Delta c = e^{-a-b-c} \Delta a \Delta b \Delta c$ となる．よって点 (x, y, z) が領域 (A4.1) に落ちる確率は、積分

$$\iiint_{\{a \geq b, a-b < c < a+b\}} e^{-a-b-c} da db dc + \iiint_{\{a < b, b-a < c < a+b\}} e^{-a-b-c} da db dc =: I_1 + I_2$$

で求められ、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty e^{-a} da \int_0^a e^{-b} db \int_{a-b}^{a+b} e^{-c} dc = \int_0^\infty e^{-a} da \int_0^a (e^{-(a-b)} - e^{-(a+b)}) e^{-b} db \\ &= \int_0^\infty e^{-a} da \int_0^a (e^{-a} - e^{-(a+2b)}) db = \int_0^\infty \left[be^{-a} + \frac{1}{2} e^{-(a+2b)} \right]_0^a e^{-a} da \\ &= \int_0^\infty (ae^{-a} + \frac{1}{2} e^{-3a} - \frac{1}{2} e^{-a}) e^{-a} da = \int_0^\infty (ae^{-2a} + \frac{1}{2} e^{-4a} - \frac{1}{2} e^{-2a}) da \\ &= \left[-\frac{1}{4} (2a+1) e^{-2a} - \frac{1}{8} e^{-4a} + \frac{1}{4} e^{-2a} \right]_0^\infty = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

同様に、 $I_2 = \frac{1}{8}$ も求まる．(これは a, b に関する対称性により、計算する必要も無く、 I_1 と同じ値になる．境界線の等号の有無は積分値に影響しないのはもちろんである．) よって最終的な答はこれらの和で $\frac{1}{4}$ となる．

問題 4.9 $X_1^2 + \dots + X_n^2$ が $[t, t + \Delta t]$ に落ちる確率を Δt で割って $\Delta t \rightarrow 0$ としたものが点 t での求める確率密度となる．この確率は

$$\int_{t \leq X_1^2 + \dots + X_n^2 \leq t + \Delta t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_1^2 + \dots + X_n^2)} dX_1 \dots dX_n$$

で与えられる．極座標を用いると、 $(X_1, \dots, X_n) = r\omega$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ は単位超球面の座標として、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \int_{\sqrt{t} \leq r \leq \sqrt{t+\Delta t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} r^{n-1} d\omega = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} |S^{n-1}| \int_{\sqrt{t}}^{\sqrt{t+\Delta t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} r^2} r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} |S^{n-1}| e^{-\frac{1}{2\sigma^2} t} t^{(n-1)/2} \frac{1}{2\sqrt{t}} \Delta t + o(\Delta t) = \frac{|S^{n-1}|}{2(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} t} \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta r = \sqrt{t + \Delta t} - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Delta t + o(\Delta t)$ であることを用いた．(この近似式は、 n 次元極座標を用いなくとも、厚さ Δr が非常に薄い球殻の堆積がほぼ超球の表面積 $|S^{n-1}| r^{n-1}$ の Δr 倍に等しいという直感的な考察で十分導ける．) よって、求める密度関数は

$$\frac{|S^{n-1}|}{2(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} t}$$

となる．これに $n-1$ 次元超球面の表面積の値 $|S^{n-1}| = \frac{2\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ (例題 6.8 参照) を代入すれば、

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n \Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} t}.$$