第２章

問題 2.3 (6)　直積の定義により

$$(x,y) \in (A \setminus B) \times C \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \setminus B, \text{かつ } y \in C.$$

他方, 集合差の定義により

$$\begin{aligned} &(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \\ &\qquad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in A \times C, \text{かつ } (x,y) \notin B \times C \\ &\qquad \Longleftrightarrow \quad x \in A, \text{かつ } y \in C, \text{かつ } (x \notin B, \text{または } y \notin C) \end{aligned}$$

$y \in C$ なので, 最後の括弧内は $x \notin B$ の方が成り立たねばならない．よって

$$\Longleftrightarrow \quad x \in A, \text{かつ } y \in C, \text{かつ } x \notin B$$

これは最初の条件と一致する.

第３章

問題 3.8 (3)　$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 1 = n^2$ が自然数 $n \neq 0$ と同値になる.

問題 3.10　まず，全員に, こちらの道は町に行く道か？と尋ねる．次に，君はアリスかボブのどちらかか？と全員に尋ねる．二つの問いの回答は

	最初の道が正しい道なら			道が間違っていれば		
	A	B	C	A	B	C
(1)	Y	N	?	N	Y	?
(2)	Y	N	?	Y	N	?

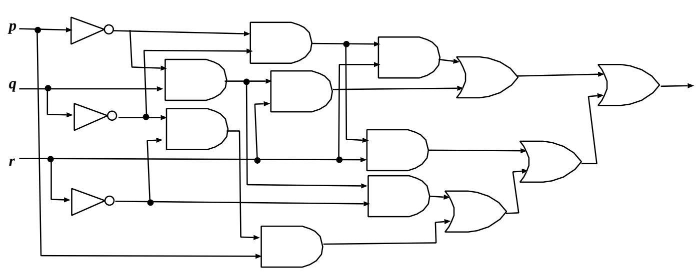
このとき，キャロルがどう答えても，二つの回答パターンを同じにはできないので，YY NN という答が有ったときは道は正しい，そうでなければ他の道だと分かる.

第４章

問題 4.1 (3)　一般的処方により

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

このまま描いた回路図は,



というひどいものになります．この図では, 黒丸が描いてないところの線は交差していてもまたいでいるものとしており, 面倒なのでまたぐ印は使っていません．これでは大変なので, 上の論理式を等価変形すると,

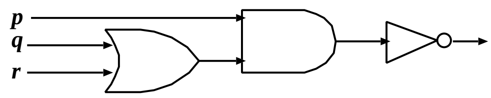
$$\Longleftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q \wedge (\neg r \vee r)) \vee ((\neg p \wedge q \wedge (\neg r \vee r)) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$
$$\Longleftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Longleftrightarrow \neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Longleftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r))$$
$$\Longleftrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

別解： 上の真理値表は 0 の方が少ないので, 真偽を反転した論理式の論理和標準形を作り, その否定を以て答とすることを考えると,

$$\neg((p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)) \Longleftrightarrow \neg((p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge (\neg r \vee r))) \Longleftrightarrow \neg((p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q$$

$$\Longleftrightarrow \neg(p \wedge (\neg q \wedge r \vee q)) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (r \vee q)) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge (r \vee q)) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg(q \vee r) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q \wedge \neg r$$

図は $\neg(p \wedge (q \vee r))$ を描くのが最も単純でしょう.

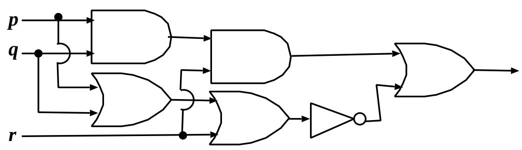


慣れてくると, 上の論理式の変形に相当することが直接真理値表から読み取れるようになります. 例えば, 最初の二つの因子は真理値表の最初の 2 行 0,0,0 と 0,0,1 から来ているので $\neg p \wedge \neg q$ とまとめられろことは明らかですね. そのような答の書き方でももちろん結構ですが, それで間違えると部分点のあげようがないことがあるので, この場合は用いた考え方を併せて書くようにしましょう.

問題 4.2 (2) 意味を考えて, $p = q = r = 1$ のときと $p = q = r = 0$ のときだけ 1 になるような回路ということなので,

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \qquad \text{あるいは} \qquad (p \wedge q \wedge r) \vee \neg(p \vee \neg q \vee \neg r)$$

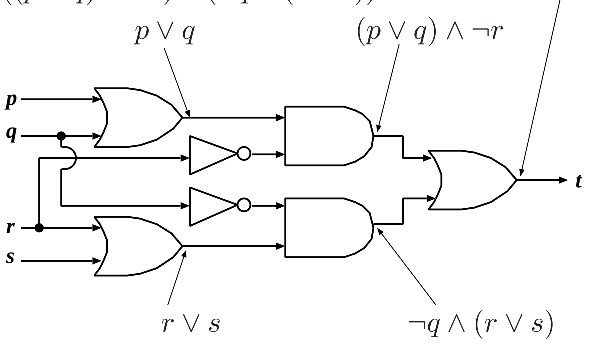
という論理式を実現すれば良い.



この問題は入力線が 3 本の AND や OR ゲートを使うとすっきり書けます. 世の中では実際にそういう記号もよく使われますが, ここではやはり基本的な入力線が 2 本のものだけで表現する練習をしましょう.

問題 4.3 (1) (1) 真理値表は右, 論理式は

$((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge (r \vee s))$



p	q	r	s	t
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

回路が表現する論理式の求め方は, 入口の方から順に, 回路の各ゲートの出力位置に, そこでの値を表現する論理式を書き込んでゆくと分かり易い. 真理値表の丈が短い解答をしてしまう人がいますが, 独立な論理変数が 4 個あるので, それらの真理値の組合せは $2^4 = 16$ 通り必要なことを押さえて解答しましょう.

問題 4.8 (1) ヒントに従いベン図を用いて発見的考察をする. p, q, r が真となる領域をそれぞれ円の内部で図示する (図 4.8a). 同じくヒントに従い, $f(p,q,r) = p \wedge q \vee q \wedge r \vee r \wedge p$ と置けば, $\neg f$, $g = \neg f \wedge p \vee \neg f \wedge q \vee \neg f \wedge r \vee p \wedge q \wedge r$, $\neg g$ が真となる領域はそれぞれ図の斜線部ようになる.

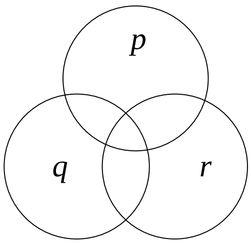


図 **4.8a**　f

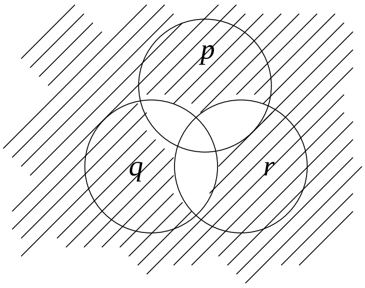


図 **4.8b**　$\neg f$

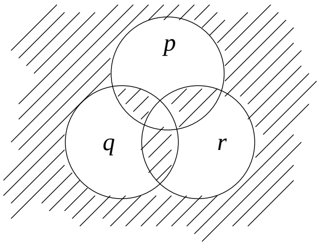


図 **4.8c**　g

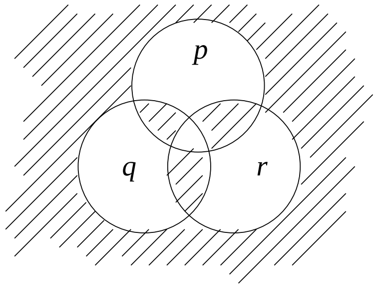


図 **4.8d**　$\neg g$

他方，$\neg f \wedge p$ は基本的な集合であるが, $\neg g \wedge p \wedge q$ がなかなか思いつかない部品となる．また $\neg f \wedge \neg g$ は背景となる．

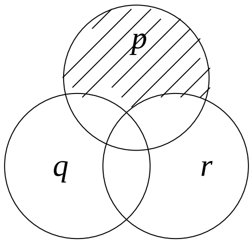


図 **4.8e**　$\neg f \wedge p$

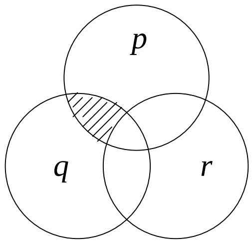


図 **4.8f**　$\neg g \wedge p \wedge q$

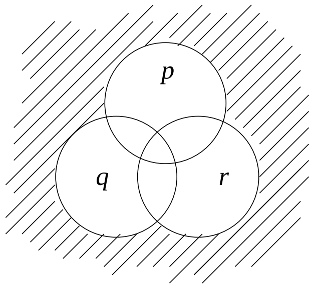


図 **4.8g**　$\neg f \wedge \neg g$

これで必要な部品は揃ったので，貼り合わせる．図から想像されるように，$\neg r$ が次のようにして作れる．$\neg p$, $\neg q$ も同様に作れる．

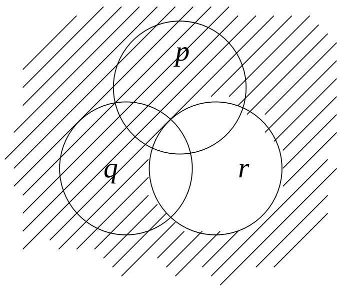


図 **4.8h**　$(\neg f \wedge \neg g) \vee (\neg f \wedge p) \vee (\neg f \wedge q) \vee \neg g \wedge p \wedge q = \neg r$

NOT ゲート 2 個だけで回路を作るには，f は缶詰に入れてもよいが, g の中には $\neg$ が含まれているので，これを缶詰にして複製することはできない．よって, 例えば次のように設計する．(コンパクトにするため，3 線以上の入力を持つ OR ゲートを用いた．)

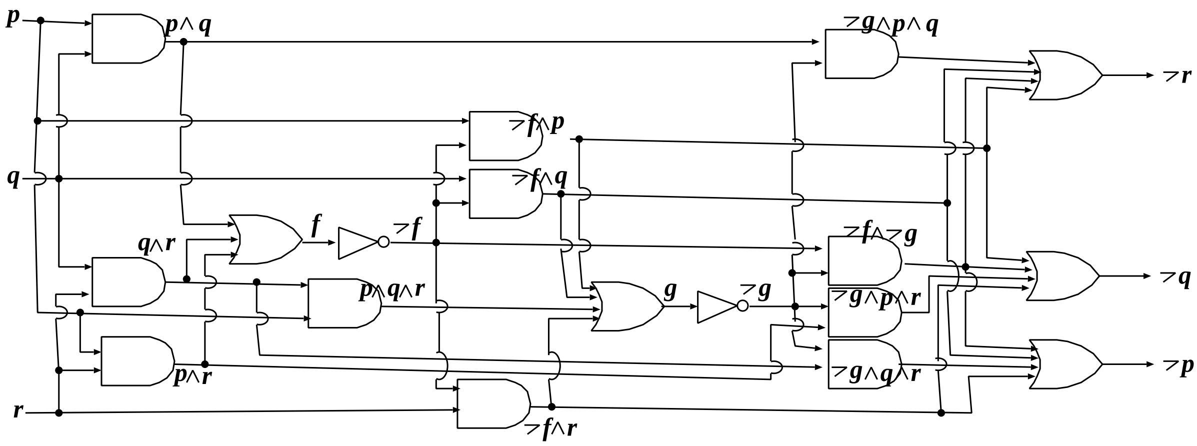
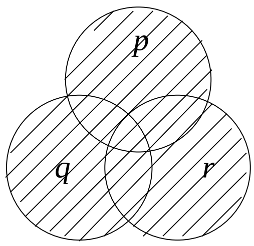


図 **4.8i** 回路図

(2) 不可能．問題を取り違えて命題変数３個の場合に解答を作ってしまったので，まずそれを記す．２個の場合は後に述べる．

　不可能な理由をまず直感的に説明する．(1) で用いたのと同じベン図を使うと，もし可能であれば，すべての部分区画が得られることに注意せよ．ところでまず $\neg$ を含まない式に対応する領域は次図左の部分集合で，従って有限集合である．



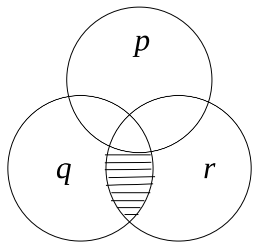
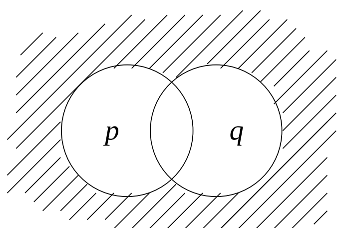


図 **4.8j**　　図 **4.8k**

従って，無限集合を得るには $\neg$ が必要である．$\neg$ を含む論理式を f とし，これと元の p, q, r を $\wedge$ と $\vee$ だけでつないで残るすべての区画を作らねばならないが，f を用いないものはすべて上の図の部分集合となり，そのようなものを $\wedge$ で組み込めばたちまち有限集合となるので，無限集合の他のパターンを作るには，これらを $\vee$ するしかない．すると結果は f より必ず (包含関係の意味で) 大きな集合になるので，f は無限領域の中で一番小さい, 図 4.8g の形をしていなければならない．すると, 図 4.8j の部分集合である有限区画を作るには，もはや f は使っても無意味となるので，例えば図 4.8k のような集合を p, q, r と $\wedge, \vee$ だけで作らねばならなくなる．もし p を使うとこの集合は必ず図 4.8e の区画を含むことになるので，q と r だけで作らねばならなくなるが，組合せ論的にこれでできる区画は $q, r, q \vee r, q \wedge r$ に相当する４個のみなので，不可能である．以上の議論を真理値の分布に置き換えて記述すれば解答となる．

　p, q ２個の場合も全く同様で，まず, $\neg$ を含む論理式 f は無限領域で下図 4.8l のようでなければならないことに注意し，次いで p, q と $\wedge, \vee$ だけでは下図 4.8m が作れないことを示せばよい．



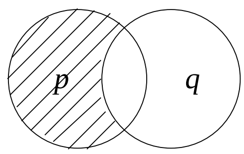


図 **4.8l**　　図 **4.8m**

第８章

問題 8.5 ヒントに従い, $A + A' = 1$ の両辺に φ を施すと，左辺の方は (8.3) を用いて $\varphi(A + A') = \varphi(A) + \varphi(A)'$ となるので，この値は 1 である．よって右辺 $\varphi(1)$ も 1 に等しい．すると $\varphi(9) = \varphi(1') = \varphi(1)' = 1' = 0$ も従う．

第１０章

問題 10.1 (1) 濃度は $\aleph_0$. 証明は次の通り：3 の倍数が自然数の場合は，$\boldsymbol{N} \ni n \mapsto 3n \in 3\boldsymbol{N}$ で一対一対応が付く．符号付き整数の場合は，$\boldsymbol{Z} \ni n \mapsto 3n \in 3\boldsymbol{Z}$ で一対一対応が付く．よって濃度は $\boldsymbol{N}$ や $\boldsymbol{Z}$ のそれと等しく，$\aleph_0$ となる．

(2) 濃度は $\aleph_0$. 実際，例 10.4 により有理数 $\boldsymbol{Q}$ は濃度 $\aleph_0$ の集合なので，平面の有理点の集合はその直積 $\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}$ だから，補題 10.10 (2) によりこの濃度も $\aleph_0$. (補題 10.10 は証明がないじゃないかと言われたら，例 10.4 によりまず $\boldsymbol{Q}\simeq\boldsymbol{N}$ を具体的に作り，この対応の直積写像で $\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\simeq\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ を作り，最後に例 10.5 でこれと $\boldsymbol{N}$ の一対一対応を作ればよい．)

(3) 濃度は $\aleph_0$. 証明は次の通り：n 次の整数係数多項式は，最高次の係数で割り算すれば，最高次の係数が 1 の有理数係数の多項式となる．この全体は $\boldsymbol{Q}^n$ と同一視できる．これは n 個の根を持つから，これらの根の集合 $\mathcal{R}_n$ は高々 $\aleph_0$ である．これらの n に関する和集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}_n$ は $\#\boldsymbol{N}\times\aleph_0=\aleph_0\times\aleph_0$ の濃度となるが，これは $\aleph_0$ に等しい．実際，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{N}$ へは $\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{N}$ からの全射な写像が有るが，後者は $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ と同一視できるので，補題 10.8 により前者の濃度は後者の濃度 $\aleph_0$ 以下である.（代数方程式が共通因子を持つ場合は根として同じ数が繰り返しカウントされるが，上からの評価としては $\leq\aleph_0$ は変わらない.）

他方，$m\in\boldsymbol{N}$ に対して $x^2-m=0$ という代数方程式を考えると，m が平方数でなければ根は無理数となる.（高校の教科書に載っている $\sqrt{2}$ の無理数性の証明と同じ.） よって自然数から平方数を除いたものが $\aleph_0$ の濃度を持つことを言えば，下からの評価 $\geq\aleph_0$ も言えて濃度 $\aleph_0$ が確定する．n^2+1 は平方数ではないので，平方数でない自然数の濃度が自然数と同濃度存在することも明らかである.（以上で用いた議論は濃度の相等性の定義 10.4 によるが，両方向きの不等号だけ示せば実際に一対一対応を作って見せる必要が無いことは Bernstein の定理 10.9 で保証されているのであった.）

(4) 濃度は $\aleph_0$. 実際，長さ n のビット列は 2^n 個存在するので，これらの和集合は可算集合となり，従って濃度は $\aleph_0$ である．別解として，ビット列は非負整数の二進法による表現とみなせる．ただし，最上位から 0 が並ぶものは，それを除いたものと同じ整数を表すので，すぐには $\geq\aleph_0$ しか分からない．そこで，ビット列の最上位にさらに 1 を追加する写像を考えると，この像は自然数の集合から 1 を除いたものと一対一対応する（ビット列には空集合は含まれないものとしている）．よって $\leq\aleph_0$ も言える．

(5) 濃度は $\aleph$. 証明は次の通り：無限ビット列は，区間 $[0,1]$ の実数の二進小数表示とみなせるので，$\geq\aleph$ の濃度を持つ．ただし小数点以下 $n+1$ 桁から先のすべてが 1 となるビット列は，それを 0 にして n 桁目に 1 を加えたものと同じ実数を表すので，そのまま一対一対応にはなっていない．これらは有限ビット列と同じだけ存在するので，前問により $\aleph_0$ だけの重複が有る．$\aleph$ の濃度を持つ集合から $\aleph_0$ の濃度の部分集合を差し引いても残りは $\aleph$ の濃度である.（例えば実数の集合 $\boldsymbol{R}$ から自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ を除いた残りは実数全体と等濃度の開区間 $(-1,0)$ を含むから，濃度 $\aleph$ 以上である．この証明は任意の例でやれば十分であることに注意.）

(6) 濃度は $\aleph$. 実際，$f(t):\boldsymbol{R}\ni t\mapsto(\cos t,\sin t)\in\boldsymbol{S}^1:=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,;\,x^2+y^2=1\}$ という写像は一対一で，従ってこの像を部分集合として含む $\boldsymbol{S}^1$ の濃度は $\geq\aleph$ である．他方，$\boldsymbol{S}^1$ は，$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合なので，その濃度は $\leq\aleph$.

(7) 濃度は $\aleph$. 実際，これは $\boldsymbol{R}\sqcup\boldsymbol{R}$ なので，一般論により $\boldsymbol{R}$ と等濃度になる．あるいは，$\boldsymbol{R}^2$ に含まれるから $\leq\aleph$ で，$\boldsymbol{R}$ を含むから $\geq\aleph$ と言ってもよい．

(8) 濃度は $\aleph$. 実際，平面の円は中心の位置 (a,b) と半径 $r>0$ の三つ組 (a,b,r) でパラメータ付けられるから，その全体は $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^+$ と一対一対応するからである．なお，これを更に円の点と考えると，二つの円の交点を一つと考えれば結局 $\boldsymbol{R}^2$ と同じになり，やはり $\aleph$ だが，異なる円上の点は別物と考えても，一つの円上の点は (6) により濃度 $\aleph$ の集合を成すので，上記の円の集合の濃度に $\aleph$ が掛かるだけで，やはり濃度は $\aleph$ から変わらない．

(9) 濃度は $\aleph$. その説明は次の通り：連続性を仮定しない $[0,1]$ 上の実数値関数の全体は $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{R}}$ で濃度は $\geq 2^{\aleph}>\aleph$ と連続の濃度より大きくなってしまう（後出の定理 10.13）だが，連続関数は区間 $[0,1]$ 内の有理数での値から一意に定まるので，実は $\aleph^{\#([0,1]\cap\boldsymbol{Q})}=\aleph^{\aleph_0}$ 以下の濃度しか無い．よって後はこの集合の濃度が $\leq\aleph$ であることを示せば良い．$\aleph^{\aleph_0}$ は結局集合 $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ の濃度であるが，これは各 $n\in\boldsymbol{N}$ に実数 $a_n\in\boldsymbol{R}$ を与えるものなので，(11) の前半と同じになる．重複するのでこの続きはそちらを見られたい．

逆向きの不等号は，$\forall a\in\boldsymbol{R}$ について定数値の連続関数 $f(x)\equiv a$ が存在することから直ちに分かる．

(10) 濃度は $\aleph$. 証明は以下の通り：自然数の長さ n の列は $\boldsymbol{N}^n$ と同一視される．これらすべてを集めたも

の $\bigsqcup_{n\in\boldsymbol{N}}\boldsymbol{N}^n$ は $\boldsymbol{N}^n\cong\boldsymbol{N}$ に注意すれば $\bigsqcup_{n\in\boldsymbol{N}}\boldsymbol{N}$ と一対一に対応し，従って $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ と一対一に対応するから，結局 $\boldsymbol{N}$ と一対一に対応する．

> 【補充問題】 (10) の後半に以下を追加する：
> また，自然数の無限列の集合の濃度を求めよ．
> 【解答】 自然数の集合は左シフトにより $\{0\}\cup\boldsymbol{N}$ と一対一に対応するので，以下後者の無限列を考える．このとき数列の各項をビット列にふくまれる 1 の連の長さと解釈することにより，この集合は区間 $[0,1[$ の実数の二進展開と一対一に対応する．よって (12) によりその濃度は $\aleph$ である．

(11) 濃度はどちらも $\aleph$．前半の証明：実数列の全体は $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ という集合とみなせる．今，R を開区間 $]0,1$ と同一視しておき，後者の元 a_n を $0.a_{n1}a_{n2}\cdots$ と二進小数展開し，これを縦に並べれば 0 と 1 から成る右方と下方に無限の表ができる．この表の元を．左上から順に a_{11}, a_{21},a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13},... のように辿れば，一つの 0, 1 の列ができ，これは新たな $]0,1[$ の元の二進展開と思える．こうして，実数列に一つの実数を対応させられるので，実数列の全体は実数全体と一対一に対応する．なおこの対応法だと有限で切れるところで一対一がくずれるが，それは (5) の解答中で注意したのと同様，濃度 $\aleph$ の集合で濃度 $\aleph_0$ の部分集合を増減させるだけなので，濃度を変えない．

後半の収束実数列は前半で考察した全実数列の部分集合となるので濃度は $\leq\aleph$ であるが，$\forall a\in\boldsymbol{R}$ に対して定数列 $a_n=a$ が含まれ，この濃度は α なので，間に挟まれたこの集合の濃度も α となる．

(12) 濃度はいずれも $\aleph$. 実際，これらはすべて $\boldsymbol{R}$ の部分集合なので，濃度 $\leq\aleph$ は明らかであり，他方 $]0,1[$ は例えば $y=\tan(x-\frac{1}{2})\pi$ という写像で $\boldsymbol{R}$ と一対一対応するので濃度 $=\aleph$ であり，他の二つはこれを部分集合として含むので，濃度 $\geq\aleph$. となるから，結局すべて等号となる．

【補足】 なお，この問題の下の図 10.7 にクイズとして書かれているように，これらの集合の間の一対一対応を示すのはそう自明ではない．問題の解答とは直接関係無いが，ここに答の例を与えておく．以下，$X=[0,1]$, $Y=[0,1[$, $Z=]0,1[$ と置く．数列 $a_n=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})$, $n=1,2,\ldots$ と置き，$f:X\to Y$ を，$X\setminus\{a_n\}$ に対しては恒等写像として，また a_n には a_{n+1} を対応させると，これは X と Y の一対一対応を与える．同様に，$b_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$, $n=1,2,\ldots$ と置き，$g:Y\to Z$ を，$Y\setminus\{b_n\}$ に対しては恒等写像，b_n には b_{n+1} を対応させると，これは Y と Z の一対一対応を与える．これらを合成すれば X と Z の一対一対応となる．

問題 10.2 濃度は $\aleph$. その証明は次の通り：例 10.6 の構成法を見ると，まず最初に除かれた中央の長さ $\frac{1}{3}$ の区間で，$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$ なる実数が居なくなるが，これはこの区間の実数を三進法の小数で表したとき，最初の桁が 1 となるものすべてに相当する．例外的に $\frac{1}{3}$, すなわち 0.1 は残るが，これは 0.0222· で代用できるので，0.1 も省くことにする．次のステップで左の長さ $\frac{1}{3}$ の区間を三等分した中央から除かれるのは，$0.01\cdots$ の形の小数，また左の長さ $\frac{1}{3}$ の区間を三等分した中央から除かれるのは，$0.21\cdots$ の形の小数のすべてである．以下同様にして，どこかに 1 を含む三進小数のすべてが除かれる．従ってカントル集合は小数点以下に 0 と 2 だけが並ぶ三進小数の集合と一致する．ここで 2 を一斉に 1 に変えても集合の濃度は不変だが，結果は区間 $[0,1]$ の実数の二進小数展開（ただし有限で切れるものを省く）となるので，その濃度は $\aleph$ となる．

問題 10.3 (i) 積の定義は公理 P5 の数学的帰納法による．
(1) $x\in\boldsymbol{N}$ に対し，$x\times1=x$ と定める．
(2) $x,y\in\boldsymbol{N}$ に対し，$y>1$ なら $x\times y=x\times(y-1)+x$ と定める．これで同公理により，固定された x に対して $x\times y$ が定義できるような $y\in\boldsymbol{N}$ の集合 M が $\boldsymbol{N}$ 全体と一致することが分かる．x は任意だから，これで積 $x\times y$ が定義できた．

(ii) 積の可換性は定理 10.16 の 2 重帰納法を用いる．$x\times y=y\times x$ という命題を $P(x,y)$ で表す．
(1) $1\times x$ は $x=1$ のときは $x\times1$ と等しいことは自明．$x>1$ なら積の定義により $1\times x=1\times(x-1)+1$ なので帰納法の仮定により，これは $=(x-1)\times1=x$ に等しく，従って積の定義により $=x\times1$ となる．以上により $\forall x\in\boldsymbol{N}$ に対して $x\times1=1\times x$ が成り立つ．よって $P(x,1)$, $P(1,y)$ は全ての x,y について真である．

(2) 積の定義により $(x+1)\times(y+1)=(x+1)\times y+x+1$．他方 $P(x+1,y)$ より $(x+1)\times y=y\times(x+1)$, でこれは積の定義により $=y\times x+y$ となる．以上により $(x+1)\times(y+1)=(y\times x+y)+(x+1)$ となる．全く同様にして，$(x+1)\times(y+1)=(x\times y+x)+(y+1)$ を得る．ここで，仮定 $P(x,y)$ より $x\times y=y\times x$ であることと，加法の可換律および結合律を用いれば，両者が等しいことが分かり，$P(x+1,y+1)$ が示されて 2 重帰納法が進む．

(iii) 分配律を先に示す．これは固定した x に対して y,z に関する 2 重帰納法による．正確には命題

$$P(y,z)=\text{“}x(y+z)=xy+xz\text{”}$$

と置くのである．$P(1,1)$ は，積の定義から

$$\text{左辺が}\ \ x\times(1+1)=x\times 1+x=x+x,\quad \text{右辺が}\ \ x\times 1+x\times 1=x+x$$

で成立．今，$P(y,z)$, $P(y+1,z)$, $P(y,z+1)$ が成立しているとして $P(y+1,z+1)$ を示す．積の帰納的定義と仮定 $P(y,z)$ (他の二つの仮定はここでは不要) により

$$\begin{aligned}x(y+1+z+1)&=x((y+z+1)+1)=x(y+z+1)+x=x(y+z)+x+x=xy+xz+x+x\\&=(xy+x)+(xz+x)=x(y+1)+x(z+1).\end{aligned}$$

(iv) 積の結合律 $(xy)z=x(yz)$ は，z に関する帰納法で示す．$z=1$ のときは，$(xy)1=xy=x(y1)$ で自明．今 $(xy)(z-1)=x(y(z-1))$ が成り立つとすれば，分配律と帰納法の第 1 段を用いて

$$\begin{aligned}(xy)z&=(xy)(z-1+1)=(xy)(z-1)+xy=x(y(z-1))+xy=x(y(z-1)+y)\\&=x(y(z-1+1))=x(yz).\end{aligned}$$

問題 10.4 (i) $\forall x,y\in\boldsymbol{N}$ を固定し z に関する帰納法を用いる．$z=1$ のとき， $x\le y\Rightarrow x+1\le y+1$ となることは補題 10.17 の証明中で既に示されている．今 $x\le y\Rightarrow x+(z-1)\le y+(z-1)$ となるとき，帰納法の初段の主張から $(x+(z-1))+1\le(y+(z-1))+1$ が得られるが，この両辺は加法の結合律を用いれば $x+z\le y+z$ に帰着する．よって証明された．

(ii) $x=y$ のときは自明なので $x<y$ とする．このとき定義 10.10 により $\exists a\in\boldsymbol{N}$ について $y=x+a$ となる．この両辺に z を掛けると，分配律により $yz=xz+az$ となるが，これは再び同定義により $xz<yz$ であることを意味する．

問題 10.5 (i) $x+y$ の定義は x をパラメータとして $f(x,y)=x+y$ を定義する．
(1) $f(x,0)=x=g(x)$,
(2) $f(x,S(y))=S(f(x,y))=h(x,y,f(x,y))$
となるべきなので，$h(x,y,z)=S(z)$ ととればよい．

(ii) xy の定義も x をパラメータとして，$f(x,y)=xy$ を定義する．
(1) $f(x,0)=0=g(x)$,
(2) $f(x,S(y))=f(x,y)+x=h(x,y,f(x,y))$
は $h(x,y,z)=z+x$ と，既に定義した加法の関数で書けている．

(iii) $x!$ の定義 はプログラミングで最初に書かされる再帰関数である．パラメータは無く，
(1) $f(0)=1$,
(2) $f(S(y))=S(y)\times f(y)=h(y,f(y))$
は既に定義された積の関数で書かれているので，原始帰納的関数の定義 II (4) により原始帰納的関数である．

(iv) x^y の定義 は x をパラメータとして $f(x,y)$ とするとき，
(1) $f(x,0)=1=g(x)$,

(2) $f(x,S(y))=f(x,y)\times x=h(x,y,f(x,y))$.
これは指数法則 $x^{y+1}=x^y\times x$ を利用した定義であるが，この h は既に定義された積の関数で書けている．

(v) $S^{-1}(y)$ の定義 残りの問題を解くため，まず successor S の逆 S^{-1} を定義する．これは $f(y)=y-1$ に相当する．$y=0$ のときは解が無いのでエラー $\perp$ を返したいのだが，このような記号は原始帰納的関数の定義で許されていないので 0 を返すことにする．従って S と異なり S^{-1} は 0, 1 で一対一でなくなるので，使用の際には注意が必要である．
(1) $f(0)=0=g(0)$ とする．
(2) $f(S(y))=y=h(y)$.
で確かに原始帰納的関数である．

(vi) $\mathrm{Pos}(y)$ の定義 次に，同じく準備として，ここだけの記号として positive の頭文字を取った関数

$$\mathrm{Pos}(y)=\begin{cases}1, & y>0\ \text{のとき},\\ 0, & y=0\ \text{のとき},\end{cases}$$

を原始帰納的関数として定義する．
(1) $\mathrm{Pos}(0)=0=g(y)$.
(2) $\mathrm{Pos}(S(y))=1=h(y,\mathrm{Pos}(y))$.
でこれは定数関数で定義されている．

(vii) $\mathrm{RestSub}(x,y)$ の定義 これも問題には含まれていないが，準備として $f(x,y)=x-y$ を定義する．これは $y+f(x,y)=x$ を満たすような関数である．ただしこの関数は $x<y$ のときはエラー $\perp$ を返したいのだが，これもできないので代わりに 0 を返すことにする．従ってこの関数の値が 0 となったときは状況に対する注意が必要である．これを制限減法 (restricted subtraction) と言う．
(1) $f(x,0)=x$ と定める．これは既に注意したように原始帰納的である．
(2) $f(x,S(y))=S^{-1}(f(x,y))=h(x,y,f(x,y))$ は，$h(x,y,z)=S^{-1}(z)$ で実現されている．
(2) の意は，$x-(y+1)=(x-y)-1$ である．これは $y\leq x-1$ までは問題無いが，$y=x$ のときは，$S(y)>x$ となるので，$x-S(y)=0$ となってくれないと困るが，このとき右辺は $f(x,y)=f(x,x)=0$ なので $S^{-1}(f(x,y))=S^{-1}(0)=0$ で確かに大丈夫である．これ以後の y に対しては $f(x,y)$ には $f(x,x)=0$ の値がコピーされてゆく．

(vii) $\mathrm{GT}(x,y)$ の定義 更に準備として，greater than の頭文字を取った関数

$$\mathrm{GT}(x,y):=\begin{cases}1, & x>y\ \text{のとき},\\ 0, & \text{それ以外のとき},\end{cases}$$

を原始帰納的関数として定義する．と言ってもこれは，今までに定義した関数の合成関数

$$\mathrm{GT}(x,y)=\mathrm{Pos}(x-y)$$

であっさり実現できる．同様にして，次も原始帰納的関数となる．

$$\mathrm{LT}(x,y):=\begin{cases}1, & x<y\ \text{のとき},\\ 0, & \text{それ以外のとき},\end{cases}=\mathrm{GT}(y,x),$$

$$\mathrm{GE}(x,y):=\begin{cases}1, & x\geq y\ \text{のとき},\\ 0, & \text{それ以外のとき},\end{cases}=1-\mathrm{LT}(x,y)$$

$$\mathrm{LE}(x,y):=\begin{cases}1, & x\leq y\ \text{のとき},\\ 0, & \text{それ以外のとき},\end{cases}=\mathrm{GT}(y,x).$$

(viii) $\max(x,y)$, $\min(x,y)$ の定義 以上で定義した関数を用いると，

$$\max(x,y)=x\times\mathrm{GT}(x,y)+y\times(1-\mathrm{GT}(x,y)),$$
$$\min(x,y)=x\times(1-\mathrm{GT}(x,y))+y\times\mathrm{GT}(x,y)$$

で定義できる．ここで，$1 - 0$, および $1 - 1$ は既に定義した制限減法に含まれる．このような工夫は，if 文による結論の選択を原始帰納的関数として表現するのに応用できる．

(ix) GCD(x, y) は通常は Euclid の互除法を用いて計算する．すなわち，mod 関数を用いて x と y を入れ替えながら，どちらかが 0 になるまで続けたときの他方が答となる．しかしこれを原始帰納的関数として表すには二つの壁が存在する．一つは，原始帰納的関数の定義では，パラメータの値を変化させられず，またパラメータと主変数 y の交換も許されないことである．もう一つの壁は，原始帰納的関数の定義では，$f(x_1, \ldots, x_n, S(y))$ を定義するのに $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ は使えるが，$f(x_1, \ldots, x_n, z)$, $z = 1, 2, \ldots, y - 1$ は使えないことである．通常の数学的帰納法ではこれらが許されるので，原始帰納的関数もこれらが使えるように拡張すれば良いのだが，問題の解答としては重くなりすぎる．そこで，ここでは方針を変えて，小学校の算数で用いたアルゴリズムである，"見つかった因子で順番に割っていく方法" をとる．ただし，素数だけで割るための Eratosthenes の篩法の実装も重いので，ここでは無駄を承知で，すべての y で割ってみることにする．この方針を実現するため，補助として割り算に関する原始帰納的関数を追加準備する．

まず $f(x_1, y_1, y)$ で x_1 から x_2 が y 回引けたときは値 y を返し，もう引けなかったときは，最後に引けた回数を返す関数を準備する．

(1) $f(x_1, x_2, 0) = 0$,

(2) $f(x_1, x_2, S(y)) = f(x_1, x_2, y)$
$+ \mathrm{GE}(\mathrm{RestSub}(x_1, x_2 \times y), x_2) \times \mathrm{Pos}(x_2)$.

最後の式は，$x_1 - x_2 \times (y - 1) \geq x_2$ のとき f の値を $+1$ することを意味している．ここのマイナスは制限減法だが，ここが 0 になっても $x_2 > 0$ なら f の値はもう増えないので問題はない．$x_2 = 0$ のときはエラーを返すべきだが，それは原始帰納的関数の定義では許されないので，代わりに 0 を返すことにする．最後に Pos(x_2) が掛けられているのはそのためである．これは少なくとも $y \leq x_1$ では安定化する．

これを使うと，割り算の商（整商）Div(x_1, x_2)，余り Mod(x, y) が次のように定義できる：

$$\mathrm{Div}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_1),$$
$$\mathrm{Mod}(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \times f(x_1, x_2, x_1).$$

これを用いると，x が y で割り切れるかどうかを答える関数 Divisible(x, y) が次で定義できる：

$$\mathrm{Divisible}(x, y) = 1 - \mathrm{Pos}(\mathrm{Mod}(x, y)).$$

次に，x がちょうど y^k で割り切れるとき，その値 y^k を返す関数Factor(x, y) を定義する．そのため補助として，x_1 が x_2^y で割り切れるとき x_2^y を，そうでないとき x_1 が x_2^k で割り切れるような最大の x_2^k $(k < y)$ を返す関数 $f(x_1, x_2, y)$ を準備する．

(1) $f(x_1, x_2, 0) = 1$.

(2) $f(x_1, x_2, S(y)) = f(x_1, x_2, y) \times x_2^{(\mathrm{Divisible}(\mathrm{Div}(x_1, f(x_1, x_2, y)), x_2))}$.

x_1 が x_2^y でちょうど割り切れれば，それより先は y が増えても $f(x_1, x_2, y)$ は一定となる．$x_2 \geq 2$ のとき $x_1 < x_2^{x_1}$ なので，Factor$(x, y) = f(x, y, x)$ とすればよいことになる．ちなみに，$\forall y$ について $f(x_1, 1, y) = 1$ となっているので，Factor$(x, 1) = 1$ である．

(x) GCD(x, y) の定義 以上の準備の下に最後に残った GCD(x, y) を定義する．これは，初等的に $y = 1$ から始めて順番に x_1, x_2 の双方がちょうど y^k で割れるような y^k を取り出し，それらの積を保持する関数 $f(x_1, x_2, y)$ を補助に用いる．

(1) $f(x_1, x_2, 0) = 1$.

(2) $f(x_1, y_1, S(y)) = f(x_1, x_2, y) \times \min(\mathrm{Factor}(\mathrm{Div}(x_1, f(x_1, x_2, y)), S(y)), \mathrm{Factor}(\mathrm{Div}(x_2, f(x_1, x_2, y)), S(y)))$.

この関数は少なくとも $y \leq \min(x_1, x_2)$ までしか値が変化せず，その後は一定となるので，

$$\mathrm{GCD}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \min(x_1, x_2))$$

と置けば良い．

補足　このややこしい関数が本当に $\mathrm{GCD}(x_1, x_2)$ を与えるかを頭だけで確認するのはなかなか大変であろう．そこでこれを実験で確認するため，上に示した関数たちを Python と Julia で実装したプログラム `PrimRecFn.py`, `PrimRecFn.jl` を置いておくので参考にされたい．ただし，非常に非効率なので，$\mathrm{GCD}(8,6)$ でもかなり待たされ，$\mathrm{GCD}(12,8)$ だと長時間待たされることをお断りしておく．これらはあくまで定義が正しいかどうかのチェックのためであり，著者自身もこれらを動かしてみて多くのミスプリを発見できた．

問題 10.6 準備中

第１２章

問題 12.1 $x, y > 0$ として証明すればよいので，両辺を xy で割り，

$$\frac{x^{p-1}}{py} + \frac{y^{q-1}}{qx} \geq 1$$

を示せばよい．仮定 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ から $p - 1 = \frac{p}{q}$, $q - 1 = \frac{q}{p}$ が従うことに注意して，$\frac{x^p}{y^q} = t$ と置くと，上の左辺は

$$f(t) := \frac{t^{1/q}}{p} + \frac{1}{qt^{1/p}}$$

となる．この関数は $t \to 0$ でも $t \to \infty$ でも $+\infty$ になるので，微分可能な t の有限な範囲で最小値を持ち，それは $f'(t) = 0$ から特定できるはずである．

$$f'(t) = \frac{1}{pq} t^{1/q-1} - \frac{1}{pq} \frac{1}{t^{1/p+1}} = 0$$

より，$t^{1/p+1/q} = 1$, すなわち，$t = 1$ とただ一つ値が定まるので，これが最小値 $f(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を与える．よって不等式は成立し，かつ $t = 1$ のとき等号となる．元の変数では，これは $x^p = y^q$ に相当する．

問題 12.2 $p = 1$ の場合，ミンコフスキーの不等式は

$$|x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n| + |y_1| + \cdots + |y_n|$$

となるので，成分ごとに実数に対する三角不等式を適用すれば出てくる．$p = \infty$ の場合，ミンコフスキーの不等式は

$$\max\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$$

となるので，任意の i について

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$$

が成り立つことから，左辺の i に関する max をとれば得られる．

問題 12.3 くだんの関数を $d(P, Q)$ で表そう．正値性と対称性は明かに成り立っているが，三角不等式は成り立たない．実際，点 P として $(x_1, y_1, z_1) = (0, 1, 0)$, 点 Q として原点 $(0, 0, 0)$, 点 R として $(x_1, y_1, z_1) = (0, -1, 0)$ を取ってみると，明かに $d(P, Q) = 1$, $d(Q, R) = 1$ だが,

$$d(P, R) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|^2 + |z_1 - z_2|^3 = 0 + 2^2 + 0 = 4$$

なので，$d(P, Q) + d(Q, R)$ より大きくなっている．

問題 12.7 開集合は (1), (2), (7); 閉集合は (3), (4), (6); 残りはどちらでもない．

問題 12.10 $P_n \to P$ ならば，収束の定義により $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ s.t. $n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \mathrm{dis}\,(P_n, P) < \varepsilon$. このとき，同じ n_ε について，三角不等式より $n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \mathrm{dis}\,(P_n, P_m) \leq \mathrm{dis}\,(P_n, P) + \mathrm{dis}\,(P, P_m) < 2\varepsilon$ となる．これで証明終わりとしてよいが，最後を Cauchy 列の定義通りに $< \varepsilon$ としたければ，n_ε の代わりに $n_{\varepsilon/2}$ をとればよい．

問題 12.11 (1) 閉包は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \geq 1\}$, 開核は自分自身と一致，境界は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 = 1\}$.
(2) 閉包は $\{(x, y)\,;\, x \geq 0, |y| \leq 2\}$, 開核は自分自身と一致，境界は $\{(x, y)\,;\, x = 0, |y| \leq 2\} \cup \{(x, y)\,;\, x > 0, |y| = 2\}$. 和集合を使った表記が計算途上のように見える人は，$\{(x, y)\,;\, (x = 0, |y| \leq 2)$ または $(x > 0, |y| = 2)\}$ と書いてもよい．数学の試験にはなじまないが，$\{(x, y)\,;\, x = 0 \wedge |y| \leq 2 \vee x > 0 \wedge |y| = 2\}$ と書けばあいまいさは無い．
(3) 閉包は自分自身と一致，開核は $\emptyset$ (空集合), 境界は自分自身と一致.
(4) 閉包は自分自身と一致，開核は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 < 1\}$, 境界は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 = 1\}$.
(5) 閉包は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 開核は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$, 境界は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1, y = 0\} \cup \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$.
(6) 閉包は自分自身と一致，開核は $\emptyset$ (空集合), 境界は自分自身と一致．なおこの集合は実質的には 2 点 $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ より成るので，そのように書き換えてもよい．
(7) 閉包は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$, 開核は自分自身と一致, 境界は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$.
(8) 閉包は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1$ または $x^2 + y^2 \geq 2\}$, 開核は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 < 1$ または $x^2 + y^2 > 2\}$, 境界は $\{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 = 1$ または $x^2 + y^2 = 2\}$.

問題 12.12 $p = q$ なら $c_{p,q} = 1$ は明らかなので，$p < q$ とする．まず $q < \infty$ のときを考える．図 12.2 を見ると分かるように，両者の差が最も大きくなるのは $x_1 = \cdots = x_n = a$ のところと推測され，その場合は

$$(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} = n^{1/p}a, \qquad (|x_1|^q \cdots + |x_n|^q)^{1/q} = n^{1/q}a,$$

となるので，不等式 $\|x\| \leq c_{p,q}\|x\|_q$ を成り立たせるには，これに上の値を代入して $c_{p,q} \geq n^{1/p-1/q}$ なるを要することが分かる．逆に，$c_{p,q} = n^{1/p-1/q}$ でこの不等式が成り立つことを見よう．$b = q/p > 1$ に対して，$1/b + 1/b' = 1$ を満たす b' をとるとき, ヘルダーの不等式により

$$\begin{aligned} |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p &= |x_1|^p \cdot 1 + \cdots + |x_n|^p \cdot 1 \\ &\leq (|x_1|^{pb} + \cdots + |x_n|^{pb})^{1/b} \cdot (1^{b'} + \cdots + 1^{b'})^{1/b'} = (|x_1|^q + \cdots + |x_n|^q)^{p/q} \cdot n^{1/b'} \end{aligned}$$

よって両辺の p 乗根をとると, $1/b' = 1 - 1/b = 1 - p/q$ に注意して，

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q \cdot n^{1/pb'} = \|x\|_q \cdot n^{1/p-1/q}$$

$q = \infty$ のときは，単に

$$(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \leq (n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p)^{1/p} = n^{1/p} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = n^{1/p}\|x\|_\infty$$

よって，いずれの場合も最良定数は最終的には $n^{1/p-1/q}$ という一つの式にまとめることができる．

問題 12.13 正値性と対称性は明らか．3 角不等式を確かめよう．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{F}_2^n$ とする．$x_i \neq z_i$ なら，$x_i \neq y_i$, $y_i \neq z_i$ の少なくとも一方は成り立つ．実際，両方とも成り立たなかったら $x_i = y_i = z_i$ となってしまうから．従って $\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = k$ のとき, k に加わる各 1 は $\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ の少なくとも一方に $+1$ の寄与をするから，$\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq \mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ でなければならない．

この距離が $\boldsymbol{F}_2^n$ に定める位相は離散位相である．実際，$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}_2^n$ に対して, $\boldsymbol{x}$ の $\frac{1}{2}$-近傍は $\boldsymbol{x}$ 自身しか含まないので，点 $\boldsymbol{x}$ 自身が自分の開近傍となっている．

問題 12.14 全空間 X から高々有限個の点を除いたものと空集合より成る集合族を $\mathcal{O}$ で表わそう．この定義は一つも除かない場合を含むので，全空間自身は定義により $\mathcal{O}$ の元となる．$\emptyset$ はこの方法では得られないが，最初から $\mathcal{O}$ に含めてある．二つの有限集合を合併しても有限集合なので，補集合を取れば $\mathcal{O}$ の二つの元の共通部分もまた $\mathcal{O}$ に属する．また，有限集合の無限個の共通部分は有限集合なので，補集合を取って，$\mathcal{O}$ の無限個の元の合併もまた $\mathcal{O}$ の元となる．以上で $\mathcal{O}$ が開集合族の公理を満たしていることが分かった．

問題 12.15 開集合族の基底で数え上げるとよい．以下 $\emptyset$ と全体は略す．また，i, j, k, l, m はすべて $1, 2, 3, 4, 5$ を動き，記号が違えば異なる値を取るものとする．略記号として i は部分集合 $\{i\}$ を，ijk は部分集合 $\{i, j, k\}$ を表す等々である．

(1-$\langle\ \rangle$) (密着位相 1 個)
(2-i) (5 個)
(3-i, jk) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(4-i, jk, lm) (${}_5C_1 \times {}_4C_2/2 = 15$ 個)
(5-i, jk, ilm) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(6-i, jk, jkl) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(7-i, jk, jkl, jkm) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(8-$i, jk, jkl, jklm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(9-$i, jk, jkl, ijkm$) ($55 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(10-$i, jk, jklm$) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(11-$i, jk, ijkl$) ($5 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(12-$i, jk, ijkl, ijkm$) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(13-i, jkl) ($5 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(14-$i, jkl, jklm$) ($5 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(15-$i, jklm$) (5 個)
(16-i, ij) ($5 \times {}_4C_1 = 20$ 個)
(17-i, ij, klm) ($5 \times {}_4C_1 = 20$ 個)
(18-i, ij, kl) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(19-i, ij, kl, klm) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(20-i, ij, kl, ijm) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(21-$i, ij, kl, iklm$) ($5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(22-i, ij, ik) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(23-i, ij, ik, lm) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(24-i, ij, ik, ijl) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個)
(25-i, ij, ik, ijl, ikm) ($5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(26-i, ij, ik, ijl, ijm) ($5 \times 4 \times 3 = 60$ 個)
(27-$i, ij, ik, ijl, ijlm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(28-$i, ij, ik, ijl, ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(29-$i, ij, ik, ijlm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(30-$i, ij, ik, ijkl$) ($5 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(31-$i, ij, ik, ijkl, ijkm$) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(32-i, ij, ik, il) (${}_5C_1 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(33-i, ij, ik, ilm) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(34-i, ij, ik, il, im) (5 個)

$(35\text{-}i, ij, ik, il, ijm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(36\text{-}i, ij, ik, il, ijkm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個$)$

$(37\text{-}i, ij, ikl)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(38\text{-}i, ij, ikl, iklm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(39\text{-}i, ij, iklm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 = 20$ 個$)$

$(40\text{-}i, ij, ijk)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個$)$

$(41\text{-}i, ij, ijk, ilm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個$)$

$(42\text{-}i, ij, ijk, ijl)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(43\text{-}i, ij, ijk, ijl, ijm)$ $(5 \times 4 = 20$ 個$)$

$(44\text{-}i, ij, ijk, ijl, ijkm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

$(45\text{-}i, ij, ijk, ijlm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個$)$

$(46\text{-}i, ij, ijk, ijkl)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個$)$

$(47\text{-}i, ij, ijk, ijkl, ijkm)$ $(5 \times 4 \times 3 = 60$ 個$)$

$(48\text{-}i, ij, ijkl)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(49\text{-}i, ijk)$ $(5 \times {}_4C_2 = 30$ 個$)$

$(50\text{-}i, ijk, ijkl)$ $(5 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個$)$

$(51\text{-}i, ijk, ijkl, ijkm)$ $(5 \times {}_4C_2 = 30$ 個$)$

$(52\text{-}i, ijk, ilm)$ $(5 \times {}_4C_2/2 = 15$ 個$)$

$(53\text{-}i, ijkl)$ $(5 \times {}_4C_3 = 20$ 個$)$

$(54\text{-}i, j)$ $({}_5C_2 = 10$ 個$)$

$(55\text{-}i, j, kl)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個$)$

$(56\text{-}i, j, kl, klm)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個$)$

$(57\text{-}i, j, kl, iklm)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(58\text{-}i, j, kl, ijm)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個$)$

$(59\text{-}i, j, ik)$ $(5 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個$)$

$(60\text{-}i, j, ik, ilm)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個$)$

$(61\text{-}i, j, ik, ijl)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個$)$

$(62\text{-}i, j, ik, ijl, ikm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

$(63\text{-}i, j, ik, ijl, ijm)$ $(5 \times 4 \times 3 = 60$ 個$)$

$(64\text{-}i, j, ik, ijl, ijkm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

$(65\text{-}i, j, ik, ijl, ijlm)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個$)$

$(66\text{-}i, j, ik, ikl)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個$)$

$(67\text{-}i, j, ik, ikl, ikm)$ $(5 \times 4 \times 3 = 60$ 個$)$

$(68\text{-}i, j, ik, ikl, ijkm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

$(69\text{-}i, j, ik, ikl, iklm)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個$)$

$(70\text{-}i, j, ik, ijkl)$ $(5 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個$)$

$(71\text{-}i, j, ik, ijkl, ijkm)$ $(5 \times 4 \times 3 = 60$ 個$)$

$(72\text{-}i, j, ik, lm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個$)$

$(73\text{-}i, j, ik, iklm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個$)$

$(74\text{-}i, j, ik, ijlm)$ $({}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個$)$

$(75\text{-}i, j, ik, jl)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個$)$

$(76\text{-}i, j, ik, jl, ikm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

(77-i,j,ik,jl,ijm) (${}_5C_2 \times 3 \times 2 = 60$ 個)
(78-$i,j,ik,jl,ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(79-i,j,ik,jlm) ($5 \times 4 \times 3 = 60$ 個)
(80-i,j,ik,il) ($5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(81-i,j,ik,il,ikm) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(82-$i,j,ik,il,iklm$) ($5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(83-i,j,ik,il,ijm) ($5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(84-$i,j,ik,il,ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(85-i,j,ik,il,jm) ($5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(86-i,j,ik,il,im) ($5 \times 4 = 20$ 個)
(87-i,j,klm) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(88-i,j,ikl) ($5 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(89-$i,j,ikl,iklm$) ($5 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(90-i,j,ijk) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(91-i,j,ijk,ilm) ($5 \times 4 \times 3 = 60$)
(92-i,j,ijk,ijl) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(93-i,j,ijk,ijl,ijm) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(94-$i,j,ijk,ijl,ijkm$) (${}_5C_2 \times 3 \times 2 = 60$ 個)
(95-$i,j,ijk,ijlm$) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(96-$i,j,ijk,ijkl$) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(97-$i,j,ijk,ijkl,ijkm$) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(98-$i,j,iklm$) (${}_5C_2 \times {}_2C_1 = 20$ 個)
(99-$i,j,ijkl$) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(100-i,j,k) (${}_5C_3 = 10$ 個)
(101-i,j,k,lm) (${}_5C_3 = 10$ 個)
(102-i,j,k,il) (${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(103-i,j,k,il,jm) (${}_5C_3 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(104-i,j,k,il,jkm) ($5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(105-i,j,k,il,im) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(106-i,j,k,il,ilm) ($5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(107-i,j,k,il,ijm) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(108-$i,j,k,il,ijlm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(109-$i,j,k,il,ijkm$) ($5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(110-i,j,k,ilm) (${}_5C_3 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(111-i,j,k,ijl) (${}_5C_3 \times {}_3C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(112-i,j,k,ijl,ikm) ($5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(113-i,j,k,ijl,ijm) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(114-$i,j,k,ijl,ijkm$) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(115-$i,j,k,ijl,ijlm$) (${}_5C_2 \times 3 \times 2 = 60$ 個)
(116-$i,j,k,ijlm$) (${}_5C_3 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(117-$i,j,k,ijkl$) (${}_5C_3 \times {}_2C_1 = 20$ 個)
(118-$i,j,k,ijkl,ijkm$) (${}_5C_3 = 10$ 個)

(119-i,j,k,l) (5 個)
(120-i,j,k,l,im) (${}_5C_4 \times {}_4C_1 = 20$ 個)
(121-i,j,k,l,ijm) (${}_5C_4 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(122-$i,j,k,l,ijkm$) (${}_5C_4 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(123-$1,2,3,4,5$) 離散位相 (1 個)
(124-ij) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(125-ij,kl) (${}_5C_2 \times {}_3C_2/2 = 15$ 個)
(126-ij,kl,ijm) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(127-ij,klm) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(128-ij,ijk) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(129-ij,ijk,ijl) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(130-ij,ijk,ijl,ijm) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(131-$ij,ijk,ijl,ijkm$) (${}_5C_2 \times 3 \times 2 = 60$ 個)
(132-$ij,ijk,ijlm$) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(133-$ij,ijk,ijkl$) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(134-$ij,ijk,ijkl,ijkm$) (${}_5C_2 \times 3 = 30$ 個)
(135-$ij,ijkl$) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(136-ijk) (${}_5C_3 = 10$ 個)
(137-$ijk,ijkl$) (${}_5C_3 \times {}_2C_1 = 20$ 個)
(138-$ijk,ijkl,ijkm$) (${}_5C_3 = 10$ 個)
(139-$ijkl$) (${}_5C_4 = 5$ 個)

以上計 6,942 個. なお，参考のため isou5enum.c という C 言語による数え上げプログラムを置いておく．(開集合の基底パターンによる分類のリストも，手作業では数え落としや重複が避けられないので，C 言語のプログラムを作って確認したが，こちらはダーティなので公開しない (*^^*)．)

問題 12.16 (1) 距離になる．正値性と対称性は明らか．3 角不等式を示す．一般に $a,b \geq 0$ に対して $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ が成り立つことは，両辺を 2 乗してみれば直ちに分かる．よって，絶対値に対する 3 角不等式と合わせると，

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sqrt{|x_1-z_1|+|x_2-z_2|} \leq \sqrt{|x_1-y_1|+|y_1-z_1|+|x_2-y_2|+|y_2-z_2|} \\ &\leq \sqrt{|x_1-y_1|+|x_2-y_2|}+\sqrt{|y_1-z_1|+|y_2-z_2|} = d(x,y)+d(y,z). \end{aligned}$$

(2) 距離なので位相を定めるが，その位相は,

$$\sqrt{|x_1-y_1|+|x_2-y_2|} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x_1-y_1|+|x_2-y_2| < \varepsilon^2$$

により，この位相での点 x の ε-近傍 $=$ L_1 位相での点 x の ε^2-近傍となるので，定まる位相は L_1 と同じである．