『数理基礎論講義』の問の解答

(©Akira KANEKO)

本文書は『数理基礎論講義』の読者サービスとして，同書の問題の解答を掲載したものです．これから充実してゆく予定ですが，まだ進行中です．解答が揃うまでにもうしばらくお待ちください．

第２章

問題 2.3 (6) 直積の定義により

$$(x,y) \in (A \setminus B) \times C \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \setminus B, \text{かつ}\ y \in C.$$

他方, 集合差の定義により

$$\begin{aligned}
&(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \\
&\qquad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in A \times C, \text{かつ}\ (x,y) \notin B \times C \\
&\qquad \Longleftrightarrow \quad x \in A, \text{かつ}\ y \in C, \text{かつ}\ (x \notin B, \text{または}\ y \notin C)
\end{aligned}$$

$y \in C$ なので, 最後の括弧内は $x \notin B$ の方が成り立たねばならない．よって

$$\Longleftrightarrow \quad x \in A, \text{かつ}\ y \in C, \text{かつ}\ x \notin B$$

これは最初の条件と一致する．

第３章

問題 3.8 (3) $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 1 = n^2$ が自然数 $n \neq 0$ と同値になる．

問題 3.10 まず，全員に, こちらの道は町に行く道か？と尋ねる．次に，君はアリスかボブのどちらかか？と全員に尋ねる．二つの問いの回答は

	最初の道が正しい道なら			道が間違っていれば		
	A	B	C	A	B	C
(1)	Y	N	?	N	Y	?
(2)	Y	N	?	Y	N	?

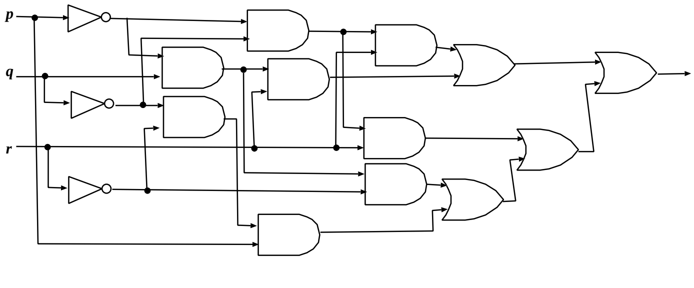
このとき，キャロルがどう答えても，二つの回答パターンを同じにはできないので，YY NN という答が有ったときは道は正しい，そうでなければ他の道だと分かる．

第４章

問題 4.1 (3) 一般的処方により

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

このまま描いた回路図は,



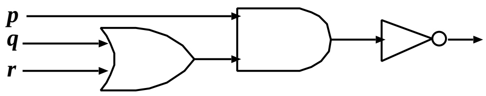
というひどいものになります．この図では，黒丸が描いてないところの線は交差していてもまたいでいるものとしており，面倒なのでまたぐ印は使っていません．これでは大変なので，上の論理式を等価変形すると，

$$\iff ((\neg p \wedge \neg q \wedge (\neg r \vee r)) \vee ((\neg p \wedge q \wedge (\neg r \vee r)) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \iff (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$
$$\iff (\neg p \wedge (\neg q \vee q)) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \iff \neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \iff (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r))$$
$$\iff \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$$

別解： 上の真理値表は 0 の方が少ないので，真偽を反転した論理式の論理和標準形を作り，その否定を以て答とすることを考えると，

$$\neg((p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)) \iff \neg((p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge (\neg r \vee r))) \iff \neg((p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q$$
$$\iff \neg(p \wedge (\neg q \wedge r \vee q)) \iff \neg(p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (r \vee q)) \iff \neg(p \wedge (r \vee q)) \iff \neg p \vee \neg(q \vee r) \iff \neg p \vee \neg q \wedge \neg r$$

図は $\neg(p \wedge (q \vee r))$ を描くのが最も単純でしょう．

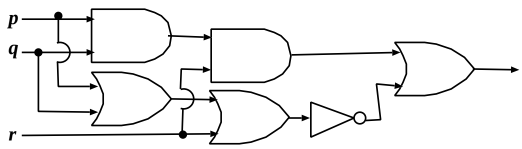


慣れてくると，上の論理式の変形に相当することが直接真理値表から読み取れるようになります．例えば，最初の二つの因子は真理値表の最初の 2 行 0,0,0 と 0,0,1 から来ているので $\neg p \wedge \neg q$ とまとめられろことは明らかですね．そのような答の書き方でももちろん結構ですが，それで間違えると部分点のあげようがないことがあるので，この場合は用いた考え方を併せて書くようにしましょう．

問題 4.2 (2)　意味を考えて，$p = q = r = 1$ のときと $p = q = r = 0$ のときだけ 1 になるような回路ということなので，

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \qquad \text{あるいは} \qquad (p \wedge q \wedge r) \vee \neg(p \vee \neg q \vee \neg r)$$

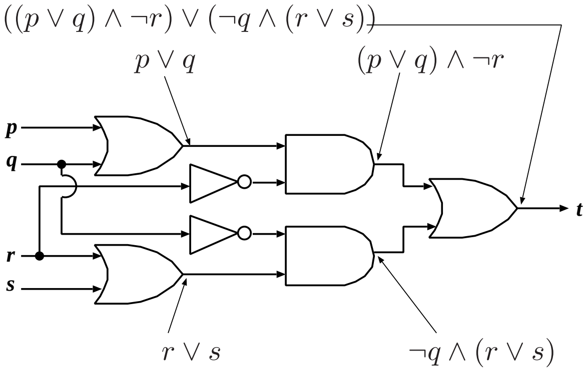
という論理式を実現すれば良い．



この問題は入力線が 3 本の AND や OR ゲートを使うとすっきり書けます．世の中では実際にそういう記号もよく使われますが，ここではやはり基本的な入力線が 2 本のものだけで表現する練習をしましょう．

問題 4.3 (1)　(1)　真理値表は右，論理式は

$((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge (r \vee s))$



p	q	r	s	t
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

回路が表現する論理式の求め方は, 入口の方から順に, 回路の各ゲートの出力位置に, そこでの値を表現する論理式を書き込んでゆくと分かり易い. 真理値表の丈が短い解答をしてしまう人がいますが, 独立な論理変数が 4 個あるので, それらの真理値の組合せは $2^4 = 16$ 通り必要なことを押さえて解答しましょう.

問題 4.8 (1)　ヒントに従いベン図を用いて発見的考察をする. p, q, r が真となる領域をそれぞれ円の内部で図示する (図 4.8a). 同じくヒントに従い, $f(p,q,r) = p \wedge q \vee q \wedge r \vee r \wedge p$ と置けば, $\neg f$, $g = \neg f \wedge p \vee \neg f \wedge q \vee \neg f \wedge r \vee p \wedge q \wedge r$, $\neg g$ が真となる領域はそれぞれ図の斜線部ようになる.

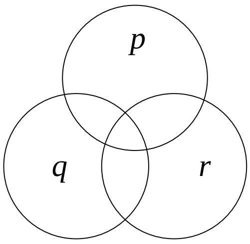


図 4.8a　f

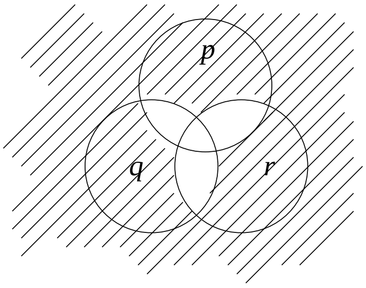


図 4.8b　$\neg f$

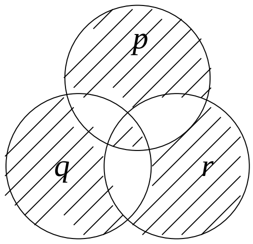


図 4.8c　g

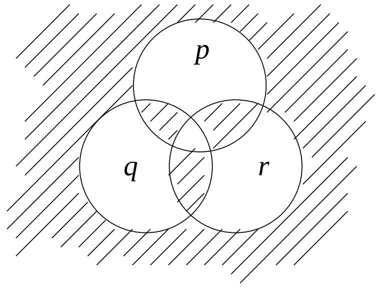


図 4.8d　$\neg g$

他方, $\neg f \wedge p$ は基本的な集合であるが, $\neg g \wedge p \wedge q$ がなかなか思いつかない部品となる. また $\neg f \wedge \neg g$ は背景となる.

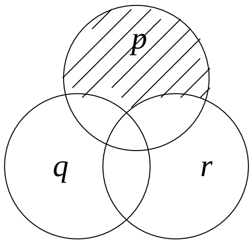


図 4.8e　$\neg f \wedge p$

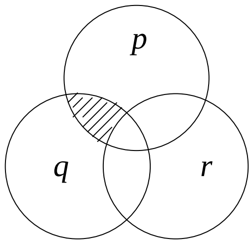


図 4.8f　$\neg g \wedge p \wedge q$

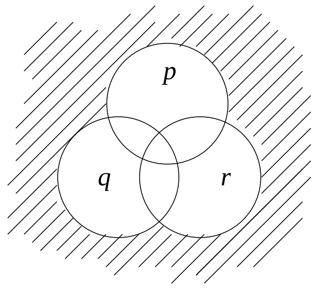


図 4.8g　$\neg f \wedge \neg g$

これで必要な部品は揃ったので, 貼り合わせる. 図から想像されるように, $\neg r$ が次のようにして作れる. $\neg p$, $\neg q$ も同様に作れる.

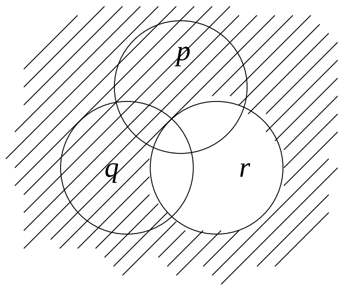


図 4.8h　$(\neg f \wedge \neg g) \vee (\neg f \wedge p) \vee (\neg f \wedge q) \vee \neg g \wedge p \wedge q = \neg r$

NOT ゲート 2 個だけで回路を作るには, f は缶詰に入れてもよいが, g の中には $\neg$ が含まれているので, これを缶詰にして複製することはできない. よって, 例えば次のように設計する. (コンパクトにするため, 3 線以上の入力を持つ OR ゲートを用いた.)

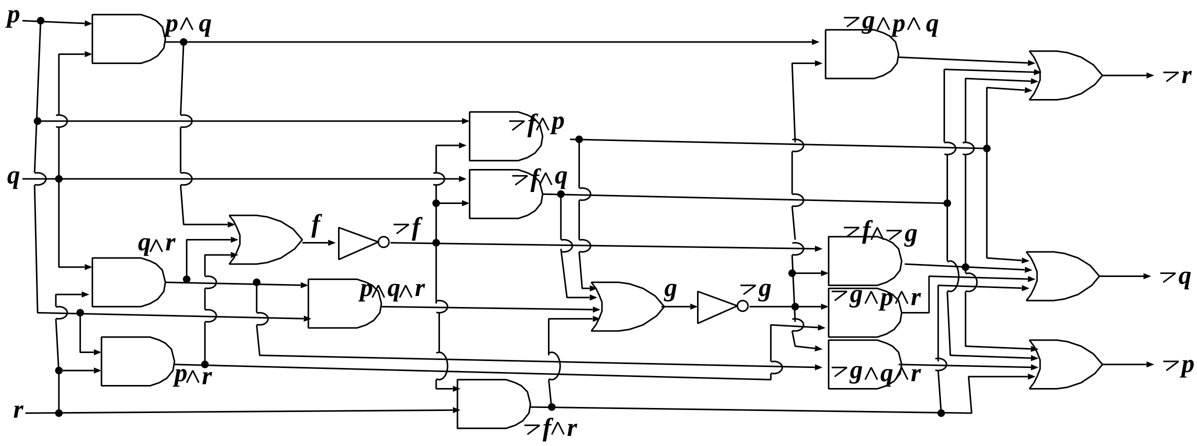
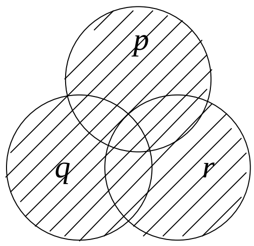


図 4.8i 回路図

(2) 不可能．問題を取り違えて命題変数３個の場合に解答を作ってしまったので，まずそれを記す．２個の場合は後に述べる．

不可能な理由をまず直感的に説明する．(1) で用いたのと同じベン図を使うと，もし可能であれば，すべての部分区画が得られることに注意せよ．ところでまず $\neg$ を含まない式に対応する領域は次図左の部分集合で，従って有限集合である．



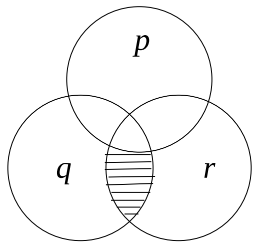
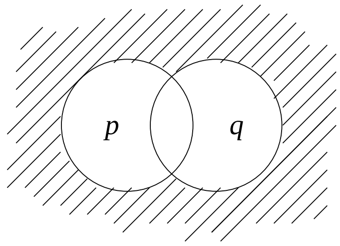


図 4.8j　**図 4.8k**

従って，無限集合を得るには $\neg$ が必要である．$\neg$ を含む論理式を f とし，これと元の p, q, r を $\wedge$ と $\vee$ だけでつないで残るすべての区画を作らねばならないが，f を用いないものはすべて上の図の部分集合となり，そのようなものを $\wedge$ で組み込めばたちまち有限集合となるので，無限集合の他のパターンを作るには，これらを $\vee$ するしかない．すると結果は f より必ず (包含関係の意味で) 大きな集合になるので，f は無限領域の中で一番小さい, 図 4.8g の形をしていなければならない．すると, 図 4.8j の部分集合である有限区画を作るには，もはや f は使っても無意味となるので，例えば図 4.8k のような集合を p, q, r と $\wedge, \vee$ だけで作らねばならなくなる．もし p を使うとこの集合は必ず図 4.8e の区画を含むことになるので，q と r だけで作らねばならなくなるが，組合せ論的にこれでできる区画は $q, r, q \vee r, q \wedge r$ に相当する４個のみなので，不可能である．以上の議論を真理値の分布に置き換えて記述すれば解答となる．

p, q ２個の場合も全く同様で，まず, $\neg$ を含む論理式 f は無限領域で下図 4.8l のようでなければならないことに注意し，次いで p, q と $\wedge, \vee$ だけでは下図 4.8m が作れないことを示せばよい．



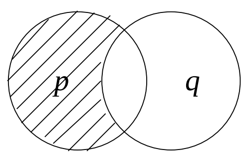


図 4.8l　**図 4.8m**

第８章

問題 8.5 ヒントに従い, $A+A'=1$ の両辺に φ を施すと，左辺の方は (8.3) を用いて $\varphi(A+A')=\varphi(A)+\varphi(A)'$ となるので，この値は 1 である．よって右辺 $\varphi(1)$ も 1 に等しい．すると $\varphi(9)=\varphi(1')=\varphi(1)'=1'=0$ も従う.

第１２章

問題 12.1 $x,y>0$ として証明すればよいので，両辺を xy で割り，

$$\frac{x^{p-1}}{py}+\frac{y^{q-1}}{qx}\geq 1$$

を示せばよい．仮定 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ から $p-1=\frac{p}{q}$, $q-1=\frac{q}{p}$ が従うことに注意して，$\frac{x^p}{y^q}=t$ と置くと，上の左辺は

$$f(t):=\frac{t^{1/q}}{p}+\frac{1}{qt^{1/p}}$$

となる．この関数は $t\to 0$ でも $t\to\infty$ でも $+\infty$ になるので，微分可能な t の有限な範囲で最小値を持ち，それは $f'(t)=0$ から特定できるはずである．

$$f'(t)=\frac{1}{pq}t^{1/q-1}-\frac{1}{pq}\frac{1}{t^{1/p+1}}=0$$

より，$t^{1/p+1/q}=1$, すなわち，$t=1$ とただ一つ値が定まるので，これが最小値 $f(1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ を与える．よって不等式は成立し，かつ $t=1$ のとき等号となる．元の変数では，これは $x^p=y^q$ に相当する．

問題 12.2 $p=1$ の場合，ミンコフスキーの不等式は

$$|x_1+y_1|+\cdots+|x_n+y_n|\leq|x_1|+\cdots+|x_n|+|y_1|+\cdots+|y_n|$$

となるので，成分ごとに実数に対する三角不等式を適用すれば出てくる．$p=\infty$ の場合，ミンコフスキーの不等式は

$$\max\{|x_1+y_1|,\ldots,|x_n+y_n|\}\leq\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}+\max\{|y_1|,\ldots,|y_n|\}$$

となるので，任意の i について

$$|x_i+y_i|\leq|x_i|+|y_i|\leq\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}+\max\{|y_1|,\ldots,|y_n|\}$$

が成り立つことから，左辺の i に関する max をとれば得られる．

問題 12.3 くだんの関数を $d(P,Q)$ で表そう．正値性と対称性は明かに成り立っているが，三角不等式は成り立たない．実際，点 P として $(x_1,y_1,z_1)=(0,1,0)$, 点 Q として原点 $(0,0,0)$, 点 R として $(x_1,y_1,z_1)=(0,-1,0)$ を取ってみると，明かに $d(P,Q)=1$, $d(Q,R)=1$ だが,

$$d(P,R)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|^2+|z_1-z_2|^3=0+2^2+0=4$$

なので，$d(P,Q)+d(Q,R)$ より大きくなっている．

問題 12.7 開集合は (1), (2), (7); 閉集合は (3), (4), (6); 残りはどちらでもない．

問題 12.10 $P_n\to P$ ならば，収束の定義により $\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ s.t. $n\geq n_\varepsilon\Longrightarrow \mathrm{dis}\,(P_n,P)<\varepsilon$. このとき，同じ n_ε について，三角不等式より $n,m\geq n_\varepsilon\Longrightarrow\mathrm{dis}\,(P_n,P_m)\leq\mathrm{dis}\,(P_n,P)+\mathrm{dis}\,(P,P_m)<2\varepsilon$ となる．これ

で証明終わりとしてよいが，最後を Cauchy 列の定義通りに $<\varepsilon$ としたければ，n_ε の代わりに $n_{\varepsilon/2}$ をとればよい．

問題 12.11 (1) 閉包は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\geq 1\}$, 開核は自分自身と一致，境界は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2=1\}$.
(2) 閉包は $\{(x,y)\,;\,x\geq 0,|y|\leq 2\}$, 開核は自分自身と一致，境界は $\{(x,y)\,;\,x=0,|y|\leq 2\}\cup\{(x,y)\,;\,x>0,|y|=2\}$. 和集合を使った表記が計算途上のように見える人は，$\{(x,y)\,;\,(x=0,|y|\leq 2)$ または $(x>0,|y|=2)\}$ と書いてもよい．数学の試験にはなじまないが，$\{(x,y)\,;\,x=0\wedge|y|\leq 2\vee x>0\wedge|y|=2\}$ と書けばあいまいさは無い．
(3) 閉包は自分自身と一致，開核は $\emptyset$ (空集合), 境界は自分自身と一致.
(4) 閉包は自分自身と一致，開核は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2<1\}$, 境界は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2=1\}$.
(5) 閉包は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\leq 1,y\geq 0\}$, 開核は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2<1,y>0\}$, 境界は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\leq 1,y=0\}\cup\{(x,y)\,;\,x^2+y^2=1,y>0\}$.
(6) 閉包は自分自身と一致，開核は $\emptyset$ (空集合), 境界は自分自身と一致．なおこの集合は実質的には 2 点 $\{(1,1),(-1,-1)\}$ より成るので，そのように書き換えてもよい．
(7) 閉包は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\leq 1\}$, 開核は自分自身と一致, 境界は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2=1\}\cup\{(0,0)\}$.
(8) 閉包は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\leq 1$ または $x^2+y^2\geq 2\}$, 開核は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2<1$ または $x^2+y^2>2\}$, 境界は $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2=1$ または $x^2+y^2=2\}$.

問題 12.12 $p=q$ なら $c_{p,q}=1$ は明らかなので，$p<q$ とする．まず $q<\infty$ のときを考える．図 12.2 を見ると分かるように，両者の差が最も大きくなるのは $x_1=\cdots=x_n=a$ のところと推測され，その場合は

$$(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}=n^{1/p}a,\qquad (|x_1|^q\cdots+|x_n|^q)^{1/q}=n^{1/q}a,$$

となるので，不等式 $\|x\|\leq c_{p,q}\|x\|_q$ を成り立たせるには，これに上の値を代入して $c_{p,q}\geq n^{1/p-1/q}$ なるを要することが分かる．逆に，$c_{p,q}=n^{1/p-1/q}$ でこの不等式が成り立つことを見よう．$b=q/p>1$ に対して，$1/b+1/b'=1$ を満たす b' をとるとき, ヘルダーの不等式により

$$\begin{aligned}|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p&=|x_1|^p\cdot 1+\cdots+|x_n|^p\cdot 1\\&\leq(|x_1|^{pb}+\cdots+|x_n|^{pb})^{1/b}\cdot(1^{b'}+\cdots+1^{b'})^{1/b'}=(|x_1|^q+\cdots+|x_n|^q)^{p/q}\cdot n^{1/b'}\end{aligned}$$

よって両辺の p 乗根をとると, $1/b'=1-1/b=1-p/q$ に注意して，

$$\|x\|_p\leq\|x\|_q\cdot n^{1/pb'}=\|x\|_q\cdot n^{1/p-1/q}$$

$q=\infty$ のときは，単に

$$(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}\leq(n\max_{1\leq i\leq n}|x_i|^p)^{1/p}=n^{1/p}\max_{1\leq i\leq n}|x_i|=n^{1/p}\|x\|_\infty$$

よって，いずれの場合も最良定数は最終的には $n^{1/p-1/q}$ という一つの式にまとめることができる．

問題 12.13 正値性と対称性は明らか．3 角不等式を確かめよう．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{F}_2^n$ とする．$x_i\neq z_i$ なら，$x_i\neq y_i$, $y_i\neq z_i$ の少なくとも一方は成り立つ．実際，両方とも成り立たなかったら $x_i=y_i=z_i$ となってしまうから．従って $\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=k$ のとき, k に加わる各 1 は $\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ の少なくとも一方に $+1$ の寄与をするから，$\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\geq\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ でなければならない．

この距離が $\boldsymbol{F}_2^n$ に定める位相は離散位相である．実際，$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{F}_2^n$ に対して, $\boldsymbol{x}$ の $\frac{1}{2}$-近傍は $\boldsymbol{x}$ 自身しか含まないので，点 $\boldsymbol{x}$ 自身が自分の開近傍となっている．

問題 12.14 全空間 X から高々有限個の点を除いたものと空集合より成る集合族を $\mathcal{O}$ で表わそう．この定義は一つも除かない場合を含むので，全空間自身は定義により $\mathcal{O}$ の元となる．$\emptyset$ はこの方法では得られないが,

最初から $\mathcal{O}$ に含めてある．二つの有限集合を合併しても有限集合なので，補集合を取れば $\mathcal{O}$ の二つの元の共通部分もまた $\mathcal{O}$ に属する．また，有限集合の無限個の共通部分は有限集合なので，補集合を取って， $\mathcal{O}$ の無限個の元の合併もまた $\mathcal{O}$ の元となる．以上で $\mathcal{O}$ が開集合族の公理を満たしていることが分かった．

問題 12.15 開集合族の基底で数え上げるとよい．以下 $\emptyset$ と全体は略す．また，i, j, k, l, m はすべて $1, 2, 3, 4, 5$ を動き，記号が違えば異なる値を取るものとする．略記号として i は部分集合 $\{i\}$ を, ijk は部分集合 $\{i, j, k\}$ を表す等々である．

(1-$\langle\ \rangle$) (密着位相 1 個)
(2-i) (5 個)
(3-i, jk) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(4-i, jk, lm) (${}_5C_1 \times {}_4C_2/2 = 15$ 個)
(5-i, jk, ilm) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(6-i, jk, jkl) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(7-i, jk, jkl, jkm) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(8-$i, jk, jkl, jklm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(9-$i, jk, jkl, ijkm$) ($55 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(10-$i, jk, jklm$) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(11-$i, jk, ijkl$) ($5 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(12-$i, jk, ijkl, ijkm$) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(13-i, jkl) ($5 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(14-$i, jkl, jklm$) ($5 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(15-$i, jklm$) (5 個)
(16-i, ij) ($5 \times {}_4C_1 = 20$ 個)
(17-i, ij, klm) ($5 \times {}_4C_1 = 20$ 個)
(18-i, ij, kl) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(19-i, ij, kl, klm) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(20-i, ij, kl, ijm) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(21-$i, ij, kl, iklm$) ($5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(22-i, ij, ik) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(23-i, ij, ik, lm) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(24-i, ij, ik, ijl) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個)
(25-i, ij, ik, ijl, ikm) ($5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)
(26-i, ij, ik, ijl, ijm) ($5 \times 4 \times 3 = 60$ 個)
(27-$i, ij, ik, ijl, ijlm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(28-$i, ij, ik, ijl, ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(29-$i, ij, ik, ijlm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(30-$i, ij, ik, ijkl$) ($5 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(31-$i, ij, ik, ijkl, ijkm$) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(32-i, ij, ik, il) (${}_5C_1 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(33-i, ij, ik, ilm) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(34-i, ij, ik, il, im) (5 個)
(35-i, ij, ik, il, ijm) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(36-$i, ij, ik, il, ijkm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個)

(37-i, ij, ikl) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(38-$i, ij, ikl, iklm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(39-$i, ij, iklm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 = 20$ 個)
(40-i, ij, ijk) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(41-i, ij, ijk, ilm) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(42-i, ij, ijk, ijl) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(43-i, ij, ijk, ijl, ijm) ($5 \times 4 = 20$ 個)
(44-$i, ij, ijk, ijl, ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(45-$i, ij, ijk, ijlm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(46-$i, ij, ijk, ijkl$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個)
(47-$i, ij, ijk, ijkl, ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 = 60$ 個)
(48-$i, ij, ijkl$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(49-i, ijk) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(50-$i, ijk, ijkl$) ($5 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(51-$i, ijk, ijkl, ijkm$) ($5 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(52-i, ijk, ilm) ($5 \times {}_4C_2/2 = 15$ 個)
(53-$i, ijkl$) ($5 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(54-i, j) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(55-i, j, kl) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(56-i, j, kl, klm) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(57-$i, j, kl, iklm$) ($5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個)
(58-i, j, kl, ijm) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(59-i, j, ik) ($5 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(60-i, j, ik, ilm) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(61-i, j, ik, ijl) ($5 \times 4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個)
(62-i, j, ik, ijl, ikm) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(63-i, j, ik, ijl, ijm) ($5 \times 4 \times 3 = 60$ 個)
(64-$i, j, ik, ijl, ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(65-$i, j, ik, ijl, ijlm$) ($5 \times 4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個)
(66-i, j, ik, ikl) ($5 \times 4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個)
(67-i, j, ik, ikl, ikm) ($5 \times 4 \times 3 = 60$ 個)
(68-$i, j, ik, ikl, ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(69-$i, j, ik, ikl, iklm$) ($5 \times 4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個)
(70-$i, j, ik, ijkl$) ($5 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 120$ 個)
(71-$i, j, ik, ijkl, ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 = 60$ 個)
(72-i, j, ik, lm) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(73-$i, j, ik, iklm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(74-$i, j, ik, ijlm$) (${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個)
(75-i, j, ik, jl) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(76-i, j, ik, jl, ikm) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)
(77-i, j, ik, jl, ijm) (${}_5C_2 \times 3 \times 2 = 60$ 個)
(78-$i, j, ik, jl, ijkm$) ($5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個)

$(79\text{-}i, j, ik, jlm)$ $(5 \times 4 \times 3 = 60$ 個$)$

$(80\text{-}i, j, ik, il)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(81\text{-}i, j, ik, il, ikm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

$(82\text{-}i, j, ik, il, iklm)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(83\text{-}i, j, ik, il, ijm)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(84\text{-}i, j, ik, il, ijkm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

$(85\text{-}i, j, ik, il, jm)$ $(5 \times 4 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(86\text{-}i, j, ik, il, im)$ $(5 \times 4 = 20$ 個$)$

$(87\text{-}i, j, klm)$ $({}_5C_2 = 10$ 個$)$

$(88\text{-}i, j, ikl)$ $(5 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(89\text{-}i, j, ikl, iklm)$ $(5 \times {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 60$ 個$)$

$(90\text{-}i, j, ijk)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個$)$

$(91\text{-}i, j, ijk, ilm)$ $(5 \times 4 \times 3 = 60)$

$(92\text{-}i, j, ijk, ijl)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個$)$

$(93\text{-}i, j, ijk, ijl, ijm)$ $({}_5C_2 = 10$ 個$)$

$(94\text{-}i, j, ijk, ijl, ijkm)$ $({}_5C_2 \times 3 \times 2 = 60$ 個$)$

$(95\text{-}i, j, ijk, ijlm)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個$)$

$(96\text{-}i, j, ijk, ijkl)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個$)$

$(97\text{-}i, j, ijk, ijkl, ijkm)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個$)$

$(98\text{-}i, j, iklm)$ $({}_5C_2 \times {}_2C_1 = 20$ 個$)$

$(99\text{-}i, j, ijkl)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個$)$

$(100\text{-}i, j, k)$ $({}_5C_3 = 10$ 個$)$

$(101\text{-}i, j, k, lm)$ $({}_5C_3 = 10$ 個$)$

$(102\text{-}i, j, k, il)$ $({}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 60$ 個$)$

$(103\text{-}i, j, k, il, jm)$ $({}_5C_3 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個$)$

$(104\text{-}i, j, k, il, jkm)$ $(5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個$)$

$(105\text{-}i, j, k, il, im)$ $(5 \times {}_4C_2 = 30$ 個$)$

$(106\text{-}i, j, k, il, ilm)$ $(5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個$)$

$(107\text{-}i, j, k, il, ijm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

$(108\text{-}i, j, k, il, ijlm)$ $(5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 個$)$

$(109\text{-}i, j, k, il, ijkm)$ $(5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個$)$

$(110\text{-}i, j, k, ilm)$ $({}_5C_3 \times {}_3C_1 = 30$ 個$)$

$(111\text{-}i, j, k, ijl)$ $({}_5C_3 \times {}_3C_2 \times {}_2C_1 = 60$ 個$)$

$(112\text{-}i, j, k, ijl, ikm)$ $(5 \times {}_4C_2 \times 2 = 60$ 個$)$

$(113\text{-}i, j, k, ijl, ijm)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個$)$

$(114\text{-}i, j, k, ijl, ijkm)$ $({}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個$)$

$(115\text{-}i, j, k, ijl, ijlm)$ $({}_5C_2 \times 3 \times 2 = 60$ 個$)$

$(116\text{-}i, j, k, ijlm)$ $({}_5C_3 \times {}_3C_2 = 30$ 個$)$

$(117\text{-}i, j, k, ijkl)$ $({}_5C_3 \times {}_2C_1 = 20$ 個$)$

$(118\text{-}i, j, k, ijkl, ijkm)$ $({}_5C_3 = 10$ 個$)$

$(119\text{-}i, j, k, l)$ $(5$ 個$)$

$(120\text{-}i, j, k, l, im)$ $({}_5C_4 \times {}_4C_1 = 20$ 個$)$

(121-i,j,k,l,ijm) (${}_5C_4 \times {}_4C_2 = 30$ 個)
(122-$i,j,k,l,ijkm$) (${}_5C_4 \times {}_4C_3 = 20$ 個)
(123-$1,2,3,4,5$) 離散位相 (1 個)
(124-ij) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(125-ij,kl) (${}_5C_2 \times {}_3C_2/2 = 15$ 個)
(126-ij,kl,ijm) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(127-ij,klm) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(128-ij,ijk) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(129-ij,ijk,ijl) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(130-ij,ijk,ijl,ijm) (${}_5C_2 = 10$ 個)
(131-$ij,ijk,ijl,ijkm$) (${}_5C_2 \times 3 \times 2 = 60$ 個)
(132-$ij,ijk,ijlm$) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 個)
(133-$ij,ijk,ijkl$) (${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 60$ 個)
(134-$ij,ijk,ijkl,ijkm$) (${}_5C_2 \times 3 = 30$ 個)
(135-$ij,ijkl$) (${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 個)
(136-ijk) (${}_5C_3 = 10$ 個)
(137-$ijk,ijkl$) (${}_5C_3 \times {}_2C_1 = 20$ 個)
(138-$ijk,ijkl,ijkm$) (${}_5C_3 = 10$ 個)
(139-$ijkl$) (${}_5C_4 = 5$ 個)

以上計 6,942 個. なお，参考のため isou5enum.c という C 言語による数え上げプログラムを置いておく．(開集合の基底パターンによる分類のリストも，手作業では数え落としや重複が避けられないので，C 言語のプログラムを作って確認したが，こちらはダーティなので公開しない (*^^*)．)

問題 12.16 (1) 距離になる．正値性と対称性は明らか．3 角不等式を示す．一般に $a,b \geq 0$ に対して $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ が成り立つことは，両辺を 2 乗してみれば直ちに分かる．よって，絶対値に対する 3 角不等式と合わせると，

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sqrt{|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|} \leq \sqrt{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|} + \sqrt{|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|} = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

(2) 距離なので位相を定めるが，その位相は,

$$\sqrt{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < \varepsilon^2$$

により，この位相での点 x の ε-近傍 $= L_1$ 位相での点 x の ε^2-近傍となるので，定まる位相は L_1 と同じである．

問題 14.7 距離の定義により，$d(P,K) = \inf_{Q \in K} d(P,Q)$ なので，K の点列 Q_n で $d(P,Q_n) \to d$ となるものが存在する．定理 14.8 の証明のうち,「コンパクト $\Longrightarrow$ 点列コンパクト」が成り立つための十分条件である第一可算公理と T1 分離公理は距離空間においては明らかに成り立っている (前者は点 P の基本近傍として $\{Q; d(P,Q) < \frac{1}{n}\}$ がとれ，後者は P の $\frac{1}{2}$d(P,Q)) 近傍が P,Q を分離する)．よって K は点列コンパクトなので，Q_n は K 内で収束する部分列を持つ．その極限を Q_∞ とすれば，明らかに $d(P,Q_\infty) = d$ である．

問題 14.8 (1) 位相同型でない．$[0,1]$ はコンパクトだが $\boldsymbol{R}$ はコンパクトでない．それを示す例，例えば有限個に減らせない開被覆 $\{(n - \frac{2}{3}, n + \frac{2}{3}); n \in \boldsymbol{Z}\}$ とか，最大値を達成しない連続関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ などを挙

げればよい．

(2) 位相同型でない．もし位相同型なら，その同型写像で対応する 1 点を除去した残りももとの同型写像をそこに制限すれば位相同型となるはずだが，前者の 1 に対応する後者の点を a とするとき，前者は 1 を取り除いても連結だが，後者は a がどこに有っても非連結となる．

(3) 位相同型である．例えば $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$ という写像は $(0,1)$ を $\boldsymbol{R}$ に位相同型に写す．

(4) 位相同型である．同相写像の例としては，$(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$ などがある．

(5) 位相同型である．同相写像の例としては，$(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x}{1-|x|-|y|}, \dfrac{y}{1-|x|-|y|}\right)$ などがある．

(6) 位相同型でない．もし位相同型なら，その同型写像で前者の原点に対応する後者の点を a とするとき，これらの点を除去した残りももとの同型写像をそこに制限すれば位相同型となるはずだが，前者は原点を取り除いても連結だが，後者は a がどこに有っても連結でない．

(7) 位相同型である．同型写像としては，例えば $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}(1-\sqrt{x^2+y^2})}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(1-\sqrt{x^2+y^2})}\right)$ などがある．