p.83,【 参考: **Euler-Maclaurin の公式の証明**】 への補遺.

Bernoulli 多項式について　本書で用いたのは岩波数学辞典第4 版, あるいは更に古く，高木貞治の "解析概論" などで採用されている

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n \tag{4.6}$$

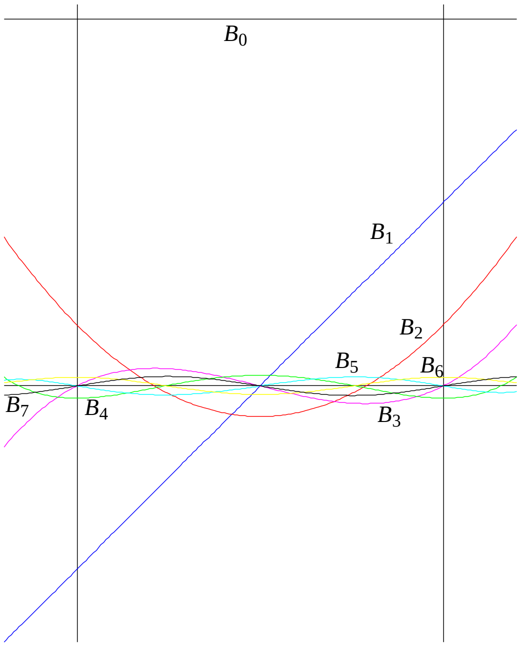
という定義で，定数項が

$$b_n=\begin{cases}(-1)^{n/2-1}B_{n/2}, & n\text{ が偶数のとき},\\ 0, & n\text{ が奇数のとき，ただし例外として } b_1=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

となっています.(ただし教科書の初刷では分子の符号を間違えていました.）始めの方は

$$B_0(x)=1,\ B_1(x)=x-\frac{1}{2}(\text{例外}),\ B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},\ B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\ B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},$$
$$B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,\ B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42},\ B_7(x)=x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x$$

参考までにこれらのグラフを重ね描きしたものを載せておきます.



他方，岩波数学公式 II (1992 年 1 月、新装第 8 刷), あるいは更に古く Whittaker-Watson の "Modern Analysis" などでは次の定義を採用しています.(ただし上記の定義も数学公式には脚注で書かれています.）

$$\frac{t(e^{xt}-1)}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)}{n!}t^n$$

これは定数項が常に 0 で，始めの方は

$$\phi_0(x)=1(\text{例外}),\ \phi_1(x)=x,\ \phi_2(x)=x^2-x,\ \phi_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\ \phi_4(x)=x^4-2x^3+x^2,$$
$$\phi_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,\ \phi_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2,\ \phi_7(x)=x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x$$

となります. Euler-Maclaurin の公式の証明にはここで採用した (4.6) 式による定義の方が便利です.

以下，教科書では省略した等式を確かめておきます.

$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ の確認　定義式 (4.6) の両辺を x で微分すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t \cdot te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n'(x)}{n!} t^n$$

左辺は元の式の t 倍に等しいので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n'(x)}{n!} t^n, \quad \text{すなわち} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(x)}{n-1!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n'(x)}{n!} t^n,$$

t^n の係数を比較すれば $nB_{n-1}(x) = B_n'(x)$ が得られる.

示された式から数学的帰納法を用いて $B_n(x)$ の最高次が x^n であることも直ちに分かる.

$\int_0^1 B_n(x)dx = 1$ の確認　(4.6) の両辺を x で 0 から 1 まで積分すると

$$\text{左辺} = \int_0^1 \frac{te^{tx}}{e^t - 1} dx = \left[\frac{e^{tx}}{e^t - 1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^t}{e^t - 1} - \frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^t - 1}{e^t - 1} = 1,$$

$$\text{右辺} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 B_n(x) dx \frac{1}{n!} t^n$$

よって t^n の係数を比較して, $n \geq 1$ では $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$ となる. もちろん $\int_0^1 B_0(x)dx = 1$ で, これは例外である. この公式は教科書に書いてしまったので証明しましたが, Euler-MacLaurin の公式の証明には必要ありませんでしたね (^^.

$B_n(0) = B_n(1)$ の確認　定義式 (4.6) の両辺にそれぞれ $x = 0, x = 1$ を代入すると,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(0)}{n!} t^n, \quad \frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1)}{n!} t^n$$

後者は

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \frac{t(e^t - 1) + t}{e^t - 1} = t + \frac{t}{e^t - 1}$$

と変形されるので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1)}{n!} t^n = t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(0)}{n!} t^n$$

従って $n \neq 1$ のときは $B_n(1) = B_n(0)$ が t^n の係数比較から出る. ただし $n = 1$ のときは例外で, 係数比較から $B_1(1) = 1 + B_1(0)$ となり, これにより $B_1(1) = \frac{1}{2}, B_1(0) = -\frac{1}{2}$ を得て, p.83, 下から 3 行目の第 1 項が得られる.

p.90,**2** 分法の説明への補遺

2 分法の核心は区間を半分に分けて, 次のステップでそのどちらを選ぶかを判断するところで, 正確には

```
IF (FX*FA .LT. 0.0D0) THEN
    B=X
ELSE IF (FX*FB .LT 0.0D0) THEN
    A=X
ELSE
    GO TO 300   ! ループの抜け先
END IF
```

のように書かねばなりませんが，ループの中で条件判断を 2 回もやるのは速度の点でいやなので，普通はサボって

```
IF (FX*FA .LE. 0.0D0) THEN
    B=X
ELSE
    A=X
END IF
```

としてしまいます．両者の違いは，もし途中で FX=0 が成立してしまったら，前者ではそこでループを抜け出せるのに，後者では，せっかく見つけた解に向かって区間を半分にする操作をループの最後まで続けるという点ですが，それでも答は出ます．どちらが無駄が多いかと言えば，普通は 2 分法で近似計算する零点は無理数のはずなので，途中で止まることはまず有り得ません．ほとんど有り得ないことのために毎回手間を増やすよりは，例外的な場合に少し計算時間が増える（といっても，無理数だった場合と同じになるというだけですが）ことの方が好ましいと思います．ただこのような考えには危険性が有って，初刷で間違えて書いていた似ているが微妙に異なる

```
IF (FX*FA .LT. 0.0D0) THEN
    B=X
ELSE
    A=X
END IF
```

の場合は，途中で FX=0 になると条件が成立しないので，反対側の区間を選んでしまい，以後次々に零点から遠い半分の方を選び続けることになるので，ループを回りきったところで FX=0 になったときの右端 A という間違った答を返してしまいます．F(X)=2*x-1 に対して区間 $[0,1]$ でこれら 3 種のプログラムの出力結果を見ることにより，このことを確かめてみてください．プログラム見本は nibunhodebug.c です．

　なお，求める零点が無理数でも，数値誤差のため最後の段階あたりでは区間長が 0 になる前に FX=0 になることがあります．課題 5.1 はそのような例ですので，解答で確認してみてください．