本文書は『微分方程式講義』の読者サービスとして，同書中で📖を付した，スペースの関係で書ききれなかった内容をここに掲載するものです．本文書は教科書の延長であり，著作権もそれに準じるものとお考えください．従って再配布はご遠慮ください．また，本文書は随時更新されますので，本文書に関する著者へのご連絡は，常に最新のものに依拠するようお願いします．

📖 p.16 , 問 1.2 への注.

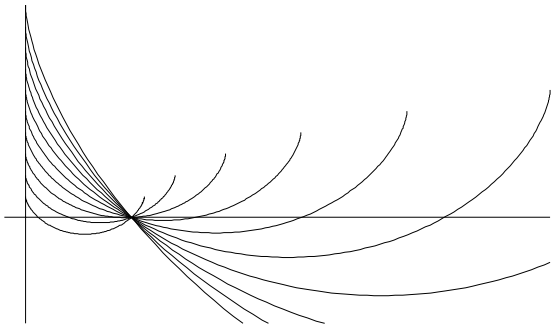
ギリシャ時代にエラトステネスはアレクサンドリアから真南のシエナまでの子午線距離とこれら 2 地点での南中時の太陽の高度を観測して, 緯度差と距離の関係から地球の周長，従って半径を求めた．更に，月に写る地球の影 (太陽が平行光線になっていると見て，地球の大きさがそのまま映っているとみなした) と月との曲率半径の比から, 月の大きさを見積もった．そして月が実際に観測される視角になるための条件から月と地球の距離を見積もった．最後に，完全な半月のときに，太陽と月，地球と月を結ぶ線が直角を成すものとして地球と太陽を結ぶ線と地球と月を結ぶ線の直角からの僅かなずれを観測して 3 角比により先に求めていた地球と月の距離から地球と太陽の距離を推定した．観測精度の限界のため，こうして算出された値は現在のものより約 1 桁小さかったが，そのアイデアは感嘆に値し，まさに古代ギリシャ人の英知を彷彿とさせるものである．(これはローマ人ならぬイタリア人の友達の話の受け売りである．一般にイタリア人は自国の文化に強い自負を持っているが，ギリシャ人には一目置いているようだ (^^;．)

とまれ，こういう話を小学生にして，自分でどうやったらよいか考えさせるのはどうだろうか．これこそ理科教育の真髄だと思う．

📖 p.24, 変分法の補遺

変分法の参考書を引用しようとしたのですが，著者が知っているものは絶版で，また参考文献のページに余裕も無かったので，微分方程式の本筋からはずれることでもあり，ここに解説を補っておきます．

まず，Brachistochrone の問題を教科書でかっこう良く解いたように見えますが，実は下のグラフを見ると分かるように，H が 1 に比して小さいときには，求めた式は問題の真の解を与えてはいません．サイクロイドが途中で地面の下にもぐってしまうときは，最初に地面に当たったところで，その時点での速度の水平成分を用いて終点まで横滑りするのが解になります．(実際の滑り台では事故が起こるかもしれませんが, これは H が大きいときも同じことでしょう (^^;.)



H を 0.2 から 0.2 刻みで増加させたときの解のグラフ

(以下，制約条件付きの変分問題の紹介と，第 2 変分の解説などを書く予定です.)

参考書については，現在絶版ですが図書館で容易に見られるでしょうから，次の有名な書物を挙げておきます．

I.M.Gelfand, S.V. Fomin 『変分法』, 文一総合出版, 1988.

📖 p.28

アイスランドの無人島の興味深いデータが東京大学出版会の宣伝誌 UP の 1980 年代の随筆に載っており，そ

れをご紹介する予定でしたが，引越しの際に行方不明になっています．再び見つけるまで今暫くお待ちください．と書いたまま 10 年近く経ちましたが，未だにみつかりません．この話を東京大学出版会の T 嬢にしたところ，UP の全バックナンバーから探し出してくれました．
長谷川真理子『セントキルダ島と羊たち』，UP1990 年 6 月号,p.1–6.
著者の記憶は発行年代も内容もそして島の所属 (実はイギリス領) も経年劣化していたようですが，羊の個体数の具体的な数値は無いものの，それがほぼ 5 年周期で振動していることが記されており，何よりこの記事は読んでいてとても面白いので，図書館ででも探してみてください．なお，St Kilda 島は最近世界文化遺産になったようで，ネットサーチすると記事がたくさん見つかります．(以前は検索しても何も見つからなかったのですが，島の名前を記憶していなかったせいか，世界遺産になる前だったせいか，今となっては分かりません．)
　なお，羊の研究センターのサイトが
`http://soaysheep.biology.ed.ac.uk/`
に有り，publications を開くと最近の羊の個体数のグラフなどが載った研究論文を見ることができます．

p.71, 微分方程式 (3.8) の求積解
y の符号により分類すると分かりやすい．$y>0$ のときは

$$\frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)}=dx,\qquad \int\frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)}=x-c$$

ここで y の積分は $\sqrt{y}=z$ と変換すると

$$=\int\frac{2dz}{1+z^2}=2\,\mathrm{Arctan}\,z=2\,\mathrm{Arctan}\,\sqrt{y}$$

と実行できる．よって

$$\sqrt{y}=\tan\left(\frac{x-c}{2}\right),\qquad y=\tan^2\left(\frac{x-c}{2}\right).$$

ただしこれは一つ目の $\sqrt{y}$ の表現が非負のときのみ意味を持つので，二つ目の表現に含まれる右下がりの分枝は解とは無縁である．これを左の方に自明な解 $y=0$ と繋げて延長した

$$y=\left(\max\{0,\tan\left(\frac{x-c}{2}\right)\}\right)^2$$

は $x=c$ から立ち上がって $x=c+\pi$ で爆発する解となる．ただし tan は周期函数なので，この表現でも右に増加して爆発する分枝が間隔 π で無限に現れるので，ここでの例としては

$$y=\begin{cases}0, & x\le c\ \text{のとき},\\ \tan^2\left(\dfrac{x-c}{2}\right), & c<x<c+\pi\ \text{のとき}\end{cases}\tag{1}$$

と書いておくのが最も正確である．
　$y<0$ では同様に，

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}(1-y)}=dx,\qquad \int\frac{dy}{\sqrt{-y}(1-y)}=x-c$$

ここで $\sqrt{-y}=z$ と置けば, y の積分は

$$=\int\frac{-2dz}{1+z^2}=-2\,\mathrm{Arctan}\,z=-2\,\mathrm{Arctan}\,\sqrt{-y}.$$

従って，

$$\sqrt{-y}=-\tan\left(\frac{x-c}{2}\right),\qquad y=-\tan^2\left(\frac{x-c}{2}\right)$$

となるが，今回も一つ目の右辺が非負の場合しか有効でない．よってそれを右方に $y=0$ で延長した

$$y=-\big(\max\{0,-\tan\big(\frac{x-c}{2}\big)\}\big)^2$$

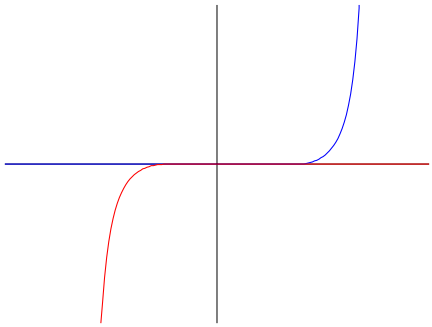
あるいは，より正確には

$$y=\begin{cases}-\tan^2\big(\frac{x-c}{2}\big), & c-\pi<x<c \text{ のとき}\\ 0, & x\geq c \text{ のとき},\end{cases} \tag{2}$$

は左側で有限時間爆発する解となる．今，よく使われる記号として max で定義されたこれら二つの片割れ函数を $\tan^{\pm}\big(\frac{x-c}{2}\big)$ のように記せば，二つの解はまとめて

$$y=\pm\big(\tan^{\pm}\big(\frac{x-c}{2}\big)\big)^2 \qquad \text{(複号同順)}$$

と書くことができる．このグラフを下に示す．



青線が (1) ($c=3$), 赤線が (2) ($c=-2$) のグラフ．x 軸上で両者が重なる $[-2,3]$ の部分は，後から描いた赤線が上書きしている．

p.83, 脚注 3) への注

例えば,『基礎演習微分方程式』，問題 6.5.1 (4), (7) の解答中の解説参照.

p.96, 定理 3.16 の証明中

p.95 の下から 2 行目の計算を成分で書き下せば次のようになる：$\vec{f}$ の第 k 成分を $f_k(x,\vec{y})=f_k(x,y_1,\dots,y_n)$ とするとき，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f_k(x,\vec{y})&=\frac{\partial f_k}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dx}=\frac{\partial f_k}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial y_j}f_k(x,\vec{y})\\&=\frac{\partial f_k}{\partial x}+\nabla_{\vec{y}}f_k\cdot\vec{f}\end{aligned}$$

これを $k=1,2,\dots,n$ について並べてベクトル表記にしたものが教科書の計算結果である．

p.96, 定理 3.17 への注

定理の仮定はやや不正確で，厳密に書けば，“$\vec{f}(x,\vec{y},\lambda)$ の $\vec{y},\lambda$ に関する k 階以下の偏導関数はすべて全変数 $x,\vec{y},\lambda$ について連続” という仮定になる．このとき，結論の方も “λ に関する k 階以下の偏導関数はすべて x,λ の連続関数となる” である．このことは証明をよく見れば分かるであろう．x に関する微分の条件が無いことに注意せよ．ただし解を λ につき偏微分したもののの x に関する 1 階微分は，対応する変分方程式の右辺から自動的に連続となる．教科書における定理の記述は，ややこしくなりすぎないようにしたが，これを文

字通り，x を固定するごとに $\vec{y}, \lambda$ につき C^k 級ととってしまうと，変分方程式の右辺が連続関数になるとは限らないので，証明が適用できなくなる．

p.96, 脚注 6) への注

(準備中)

p.106, 行列式の微分公式

ろいろなやり方がありますが，最も初等的なのは，行列式の展開定理を用いて説明するものです．

$$\det A = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

において，成分 a_{ij} がすべて t の函数としたとき，これを t で微分すれば，積の微分公式により，各展開項においてどれか一つの因子だけを微分したものの和となるから，

$$\frac{d}{dt}\det A = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n) \frac{da_{1i_1}}{dt} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} + \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1} \frac{da_{2j_2}}{dt} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$
$$+ \cdots + \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)} \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} \frac{da_{nj_n}}{dt}$$

この各々を行列式で書き直せば，

$$= \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \frac{da_{n1}}{dt} & \frac{da_{n2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{nn}}{dt} \end{vmatrix}$$

別解として，微分の奥義，あるいは変分法と同様の原理で

$$\det A(t+\Delta t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t+\Delta t) & a_{12}(t+\Delta t) & \cdots & a_{1n}(t+\Delta t) \\ a_{21}(t+\Delta t) & a_{22}(t+\Delta t) & \cdots & a_{2n}(t+\Delta t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t+\Delta t) & a_{n2}(t+\Delta t) & \cdots & a_{nn}(t+\Delta t) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11}(t) + \frac{da_{11}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) & a_{12}(t) + \frac{da_{12}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) & \cdots & a_{1n}(t) + \frac{da_{1n}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) \\ a_{21}(t) + \frac{da_{21}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) & a_{22}(t) + \frac{da_{22}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) & \cdots & a_{2n}(t) + \frac{da_{2n}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) + \frac{da_{n1}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) & a_{n2}(t) + \frac{da_{n2}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) & \cdots & a_{nn}(t) + \frac{da_{nn}}{dt}\Delta t + o(\Delta t) \end{vmatrix}$$

これを行列式の行に関する多重線型性を用いて展開すると，

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \Delta t + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1}(t) & a_{n-1,2}(t) & \dots & a_{n-1,n}(t) \\ \frac{da_{n1}}{dt} & \frac{da_{n2}}{dt} & \dots & \frac{da_{nn}}{dt} \end{vmatrix} \Delta t + o(\Delta t)$$

微分の定義により，この Δt の係数を集めたものが微分となる．

p.116, 演算子の置き換え公式の導出法

ここで用いている最初の二つの計算法，すなわち，

(1) 虚数を用いて因数分解し指数函数で計算してから Euler の等式で 3 角函数に戻す

と，

(2) パラメータで微分する

は，いつでも適用おできますが，最後に用いた

(3) x に関する微分

はちょっと注意が必要です．後述の でも述べているように，演算子法の本質は，普通の函数 $f(x)$ を Heaviside 函数を用いて $f(x)Y$ に置き換えて計算するということです．これは初期条件 $y(0) = 0$ の下で微分方程式 $Dy = f(x)$, あるいは $(D-a)y = f(x)$ を解くときの解の公式を D や $D-a$ による割り算に対する公式として表現したもので，普通の可積分函数 $f(x)$ に対する一般公式は

$$\frac{1}{D}f(x) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{x} f(s)Y(s)ds = \int_{0}^{x} f(s)ds, \quad \frac{1}{D-a}f(x) \longleftrightarrow \int_{0}^{x} f(s)e^{x-s}ds$$

となります．教科書で示した対照表は, この公式を使っても直接確かめられます．演算子法の普通の計算過程では，Y は書きませんが，例えば $\frac{d}{dx}(\sin ax)$ は詳しく書けば $\frac{d}{dx}\{(\sin ax)Y(x)\} = (a\cos ax)Y + (\sin ax)Y'$ であり，ここで $Y' = \delta$ なので $f(x)\delta = f(0)\delta$ というデルタ関数の公式により，この後の項は現れません．一般に分母の方が D の冪が 2 以上高いときは，対応する函数が原点で零になるので，Y を無視してもよいのですが，例えば

$$\frac{D^2}{D^2+a^2} = D\frac{D}{D^2+a^2} \longleftrightarrow \frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$$

は誤りです．$\cos ax$ は原点で零にならないので，正しくは

$$\frac{D^2}{D^2+a^2} = D\frac{D}{D^2+a^2} \longleftrightarrow \frac{d}{dx}\{(\cos ax)Y(x)\} = -a\sin ax + (\cos ax)\delta = -a\sin ax + \delta$$

としなければなりません．実際, 演算子固有の計算法でやってみると

$$\frac{D^2}{D^2+a^2} = 1 - \frac{a^2}{D^2+a^2} \longleftrightarrow \delta - a^2\frac{1}{a}\sin ax = -a\sin ax + \delta.$$

後述の でも注意しているように，演算子としての 1 は “普通の” 函数としては 1 でなく δ です．逆に，普通の函数 1 は (4.25) で $a = 0$ という特別の場合として $\frac{1}{D}$ という演算子に翻訳されますが，これは

$$\frac{1}{D} \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx = Y(x)$$

という超函数の積分公式に対応しています．$1 = D \cdot \dfrac{1}{D} \longleftrightarrow Y'(x) = \delta(x)$ という訳です．超函数に興味を持たれた読者は，拙著『超函数入門』(東京大学出版会) などをご覧ください．

p.130, 問 4.13 への注

p を C^1 級, r を連続と仮定すると，変換後の $P(X)$ は連続関数にしかならない．また $X = R(x)$ も C^1 級というだけなので，2 階の微分方程式の座標変換には不向きなようにみえる．しかし，実は $p(x)$ が C^1 級でなく，単に連続というだけでも Sturm-Liouville の固有値問題は意味を持つ．実際，解の存在については

$$y' = \frac{1}{p(x)}z, \qquad z' = q(x)y - \lambda r(x)y$$

という連立方程式に直してみれば，y' はもう一度微分できないかもしれないが，$p(x)y'$ は C^1 級となるような解が常に存在することが分かる．更に，対称な 2 階微分作用素に対する固有値問題では，一般に $(L\varphi, \psi)$ の代わりに 1 回部分積分した $(p\varphi', \psi') + (q\varphi, \psi) = \lambda(r\varphi, \psi)$ という対称な 2 次形式 (**弱形式**と呼ばれる) の形で議論すれば，解に対する微分は 1 回だけで済む．

p.130, 対称作用素と自己共役作用素

有限次元の対称行列のアナロジーとしては，部分積分によって $(L\varphi, \psi) = (\varphi, L\psi)$ が導けるように，作用素 L の対称性と境界条件の対称性が有れば十分なように見えるが，実は，ここで使われた内積は $L^2[a, b]$ という 2 乗可積分な関数 (の同値類) のものなので，微分できない元が含まれ，正確な議論のためには，L の定義域

$$\mathcal{D}(L) := \{\varphi \in L^2[a, b]\,;\, L\varphi \in L^2[a, b] \text{ かつ } \varphi \text{ は境界条件を満たす } \} \subset L^2[a, b]$$

というものを導入する必要がある．(普通の意味で 2 回連続的微分可能，かつ境界条件を満たす函数はすべてこれに含まれる.) このとき，有限次元行列の転置行列に相当する共役作用素 ${}^tL$ が部分積分で引っ越したときに得られる微分作用素と, その定義域

$$\mathcal{D}({}^tL) := \{\psi \in L^2[a, b]\,;\, \exists C_\psi \text{ s.t. } \forall\varphi \in \mathcal{D}(L) \text{ について } |(L\varphi, \psi)| \le C_\psi\|\varphi\|\} \subset L^2[a, b]$$

と合わせて定義される．形式的に対称なだけでなく $\mathcal{D}({}^tL) = \mathcal{D}(L)$ ともなっているとき L (に境界条件を合わせたもの) は**自己共役**と呼ばれ，これが有限次元の対称行列の真のアナロジーである．

なお，函数解析では，形式的に対称で ${}^t\mathcal{D}(\mathcal{L}) \supset \mathcal{D}(\mathcal{L})$ を満たすものを**対称作用素**と呼んでいるが，本書ではこのような細かい専門用語は避けて，L のことを分かりやすく対称と呼んでいる．函数解析等を進んで勉強する人はこれらの点に留意されたい．

p.131, Picone の不等式の証明

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{\frac{\varphi_1}{\varphi_2}(p_1\varphi_1'\varphi_2 - p_2\varphi_1\varphi_2')\} &= \Big(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\Big)'\{p_1\varphi_1'\varphi_2 - p_2\varphi_1\varphi_2')\} \\ &\quad + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\{(p_1\varphi_1')'\varphi_2 + p_1\varphi_1'\varphi_1' - (p_2\varphi_2')'\varphi_1 - p_2\varphi_1'\varphi_2'\}\end{aligned}$$

ここで方程式を用い, また商の微分を計算してしまうと

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2'}{\varphi_2^2}\{p_1\varphi_1'\varphi_2 - p_2\varphi_1\varphi_2')\} \\
&\quad + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\{-q_1\varphi_1\varphi_2 + p_1\varphi_1'\varphi_1' + q_2\varphi_2\varphi_1 - p_2\varphi_1'\varphi_2'\} \\
&= \frac{\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2'}{\varphi_2^2}\{(p_1 - p_2)\varphi_1'\varphi_2 + p_2(\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2')\} \\
&\quad + (p_1 - p_2)\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\varphi_1'\varphi_2' + (q_2 - q_1)\varphi_1^2 \\
&= (p_1 - p_2)\Big\{\frac{\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2'}{\varphi_2}\varphi_1' + \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\varphi_1'\varphi_2'\Big\} + (q_2 - q_1)\varphi_1^2 + p_2\frac{(\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2')^2}{\varphi_2^2}
\end{aligned}
$$

ここで $(p_1 - p_2)$ の係数を計算すると $\varphi_1'^2$ となるので，求める式の右辺が得られる．

p.133, 固有関数の完全性

（準備中）

p.139, 連立微分方程式の場合の収束半径の評価

連立方程式の冪級数解を取り扱うには，未知函数の個数 $+1$ 個の変数を持つ冪級数が必要になる．一般に n 変数の冪級数 $f(x) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1\ldots k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ については，一定の比 $R_1 : R_2 : \cdots R_n$ ごとに $|x_1| < R_1, \ldots, |x_n| < R_n$ なら冪級数は収束し，$|x_1| > R_1, \ldots, |x_n| > R_n$ なら冪級数は発散するような限界値が定まることが，1 変数の冪級数の場合と同様にして導かれる．ただ 1 変数の場合と異なり，この二つの領域の補集合はまだ広大で，実際この比を変えると，そのような領域に限界が現れ，その結果 n 変数の冪級数の収束域は非常に複雑な構造を示す．ここではそのような多変数関数論のテーマは避け，比が $R_1 = \cdots = R_n$ である方向だけに着目すると，1 変数冪級数のときと全く同様に，Cauchy-Hadamard の公式で, 限界 R の存在が言える．実際，もし $|x_1| = \cdots = |x_n| = r$ なるある $(x_1, \ldots, x_n)$ に対してこの級数が収束すれば, 一般項は 0 に近づかなければならないので，特に有界となり, $\exists C$ s.t.

$$|a_{k_1\ldots k_n}||x_1|^{k_1}\cdots|x_n|^{k_n} = |a_{k_1\ldots k_n}|r^{k_1+\cdots+k_n} \leq C$$

従って

$$\limsup_{k_1+\cdots+k_n\to\infty} \sqrt[k_1+\cdots+k_n]{|a_{k_1\ldots k_n}|} \leq \frac{1}{r}$$

p.158 Ascoli-Arzelà の定理の条件がコンパクト性の必要十分条件であること

以下の記述ではコンパクト集合に関する基本的な性質を用いる．例えば拙著 [5]『数理基礎論講義』の第 14 章参照.

十分性　Ascoli-Arzelà の定理から $\mathcal{K}$ が点列コンパクトなことが従うのは，教科書の定理 6.1 の証明そのままである．一般に点列コンパクトなら可算コンパクト ([5], 定理 14.8 の証明参照) であるが，$C[a,b]$ は第一可算公理を満たすので，可算コンパクトからコンパクトが従うのである.

必要性　$\mathcal{K}$ を $C[a,b]$ のコンパクト部分集合とする．これが一様有界，かつ同程度連続であることを示す．$f \in C[a,b]$ にその最大値ノルム $\|f\|_\infty$ を対応させると，$\mathrm{norm} : C[a,b] \to \boldsymbol{R}$ という連続写像となる．よってコンパクト集合のこの写像による像は $\boldsymbol{R}$ のコンパクト集合となり，従って有界, すなわち $\exists M > 0$ s.t. $\mathrm{norm}(\mathcal{K}) \subset [-M, M]$. これは $\forall f \in \mathcal{K}$ が $\|f\|_\infty \leq M$ を満たすこと，すなわち $\mathcal{K}$ が一様有界なことを意味する．次に，$x \in [a,b]$ と $\varepsilon > 0$ を固定する．各 $f \in \mathcal{K}$ は連続なので，$\delta_f > 0$ を適当に選べば，$|y - x| < \delta \Longrightarrow$

$|f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ となるようにできる．このとき, f の $C[a,b]$ における $\frac{\varepsilon}{3}$-近傍 $V_{f,\varepsilon/3}$ をとれば，$\forall g \in V_{f,\varepsilon/3} \cap \mathcal{K}$ について

$$|y-x| < \delta_f \Longrightarrow |g(y)-g(x)| \le |g(y)-f(y)| + |f(y)-f(x)| + |f(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

が成り立つ．$V_{f,\varepsilon/3}$ は $C[a,b]$ の開集合で $\mathcal{K}$ をコンパクト集合 $\mathcal{K}$ を覆っているから，そのうちの有限個 $V_{f_j,\varepsilon/3}$, $j = 1,2,\ldots,m$ で $\mathcal{K}$ を覆うことができる．すると $\delta = \min\{\delta_{f_1},\ldots,\delta_{f_m}\}$ にとれば, $\forall g \in \mathcal{K}$ について $|y-x| < \delta \Longrightarrow |g(y)-g(x)| < \varepsilon$ が成り立つ．よって $\mathcal{K}$ は同程度連続である．

p.181 定理 7.2 (2) への注

軌道の回転の正負の向きは，教科書の次ページで述べているように，平面の向きを変えない相似変換で標準形 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ にしたときの b の符号で決まる．これを標準形にする前の元の行列で判定するには，A の第 (2,1) 成分の符号を見れば良い．以下その理由を説明する．いろんな方法があるが，ここでは教科書の次ページで用いている

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\operatorname{Arctan}\frac{y}{x} = \frac{y'x - x'y}{x^2+y^2}$$

の符号を見ることにする．$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とするとき，上の分子は

$$y'x - x'y = (a_{21}x + a_{22}y)x - (a_{11}x + a_{12}y)y = a_{21}x^2 + (a_{22}-a_{11})xy - a_{12}y^2$$

となる．この 2 次形式の判別式は,

$$(a_{22}-a_{11})^2 + 4a_{21}a_{12}$$

であるが，行列 A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

であり，仮定により虚根を持つので，その判別式

$$(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$$

である．よって上の 2 次形式は定符号となり，符号は例えば x^2 の係数 a_{21} の正負で決まる．以上が最初に述べた主張の正当化である．

なお，一般に行列を Jordan 標準形に帰着させるときの変換行列は平面の向きを保存することを要求しないのが普通なので，変換行列 S を勝手にとるとこの回転の向きは逆になり得る．よって回転の向きも込めて調べたい場合は S が向きを保つ i.e. $\det S > 0$ となるように選ぶ必要がある．これはもし $\det S < 0$ なら，S の単純固有ベクトルの 1 本の向きを変えれば実現できる．

p.197 (1) の証明の最後への注

まず，M の固有値は正実数とは限らないので，$\log\lambda$ は複素変数の対数関数となる.（λ が負の実数でも $\log\lambda$ には以下に述べる複素数の考察が必要である.）一般に複素数 z に対して，その絶対値を $r = |z|$, 偏角を $\theta = \arg z$ とするとき，$\log z = \log r + i\theta$ と定める（例えば [2], 8.3 節）が，これは Euler の関係式と指数法則から $e^{\log r + i\theta} = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ となるので正当化される．実際 $z = re^{i\theta}$ という表記は複素数の極表示として普通に使われており，本書の第 9 章でも実用的計算に使われる．ただし偏角は $\mod 2\pi$ でしか定まらないので，$\log z$ は複素関数としては多価関数となり，値は $2n\pi i$, $n \in \boldsymbol{Z}$ だけの不定性を持つ．以上に注意すれば，教科書に書かれた $\log M$ の計算は正当であり，上述の多価性は指数函数を施すことで消失する．

全く同じ理由で，一般には $e^{\omega S^{-1}BS} = e^{\omega}B'$ から $S^{-1}BS = B'$ は結論できないが，ここで B も B' も Jordan 標準形，あるいはより一般に上三角型行列とすれば，指数函数の計算の結果，対角線には B あるいは B' の対角成分の指数函数が並ぶ．故にスカラーの場合の $e^{\lambda} = e^{\mu} \Longleftrightarrow \lambda = \mu + 2n\pi i$ for $\exists n \in \boldsymbol{Z}$ から，(4) に書かれた主張が導かれる．

以上の議論だけでは，B は実行列に取れるかどうかわからない．実は M が一般の実正則行列というだけでは，ここまでが限度であり $e^B = M$ を満たす B は一般には複素行列にならざるを得ない．これは 1 次の行列すなわちスカラーの場合の $M = -1$ を考えてみれば $B = \pi i$ となってしまうことから明らかである．しかし，今は行列 M は特殊な出自を持っており，その情報を使うと $\Phi(t)$, 従って M が実行列とすれば $e^B = M$ を満たす B も実行列で取ることが可能である．これを示すには二つの方法がある．

第一の方法は行列の対数を工夫して取り替えることである．このためまず $\Phi(t)$ を $\Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ で取り替え，これを改めて $\Phi(t)$ とするとき，$\Phi(t)$ は $\Phi(0) = I$ を満たす t に連続に依存する正則行列の 1 パラメータ族となる．従ってその固有値は t とともに連続的に変化する．実際，固有多項式は明らかに t について連続なので，これは多項式の根が集合としてその係数に連続に依存するという一般的事実から従う．(このことについては後述する．) さて $t = 0$ のとき固有値はすべて 1 である．これが連続的に変化して負の固有値が出現したとすると，もし実の範囲だけでこの変化が起きれば，途中で 0 になってしまうが，$\Phi(t)$ は常に正則行列なので，それはあり得ない．とすれば複素平面で原点を避けて一旦複素数になって 1 から -1 に到達するしかないが，実行列に複素固有値があるときは，その共役もまた固有値となるので，二つの 1 がペアで -1 に到達することになる．すなわちこの場合は -1 が有ったとすれば必ず二つずつである．この場合，この部分については

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

という実の解が存在する．実際，$\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}^2 = \pi^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に注意すると，

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} &= I + \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\pi^2}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\pi^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \cos \pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同様に，共役複素固有値 $a \pm bi$ については，実行列の範囲で $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ という標準形が存在するが，この対数は

$$\log\{\sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}\} = \log \sqrt{a^2+b^2} + \log \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

において，α を $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす角とするとき，最後の対数は $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる．実際，上の計算の一般化で

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} &= I + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\alpha^2}{2!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\alpha^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \cos\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるからである．つまり，M を実行列の範囲でこのような標準形に直しておき，ブロック毎にここで述べた方法で対数を計算したものを並べればよい．

最後に Jordan ブロックの肩に 1 が現れる場合を調べる．固有値が実のときや，複素数を使った Jordan 標準形では，

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} =: \Lambda + N$$

において，右辺の二つの行列は可換であり，従って $\Lambda^{-1}N$ も N とともに冪零となるので，教科書に書いたような計算法

$$\log(\Lambda+N)=\log\Lambda+\log(I+\Lambda^{-1}N)=\log\Lambda+\{\Lambda^{-1}N-\frac{1}{2}(\Lambda^{-1}N)^2+\frac{1}{3}(\Lambda^{-1}N)^3-+\cdots$$

が使える．これを実でやるためには, 複素共役と一緒にして適当な複素変換行列で実の標準形

$$S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\overline{\lambda}&1\\0&0&0&\overline{\lambda}\end{pmatrix}S=\begin{pmatrix}a&b&1&0\\-b&a&0&1\\0&0&a&b\\0&0&-b&a\end{pmatrix}$$

とすることができるが，もとの対角要素と肩の 1 たちが可換ということから，変換後の $\begin{pmatrix}a&b&0&0\\-b&a&0&0\\0&0&a&b\\0&0&-b&a\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ も可換で，かつ後者は冪零となる．よって上と同様に対数を実行列として計算できる．

第二の方法は，実解析的考察を用いるものである．$\Phi(t)$ は t につき連続で，$\Phi(0)=I$ ということから，$\Phi(t)$ は十分小さい $\delta>0$ に対し $0\le t\le\delta$ で行列ノルム $\|\Phi(t)-I\|$ が 1 より小さい．よってこのような t については

$$\log\Phi(t)=\log\{I+(\Phi(t)-I)\}=(\Phi(t)-I)-\frac{1}{2}(\Phi(t)-I)^2+\frac{1}{3}(\Phi(t)-I)^3-+\cdots$$

が収束する．今度は無限級数であるが，優級数の

$$\|\Phi(t)-I)\|+\frac{1}{2}\|\Phi(t)-I)\|^2+\frac{1}{3}\|\Phi(t)-I)\|^3+\cdots$$

が収束しているからである． そこで今 $0\le t\le t_0$ まで $\exp(\log\Phi(t))=\Phi(t)$ を満たす $\log\Phi(t)$ が定義できたとして，t を少し進める．考え方としては，出発時と同様，

$$\log\Phi(t)=\log(\Phi(t_0)+\Phi(t)-\Phi(t_0))=\log\{\Phi(t_0)(I+\Phi(t_0)^{-1}(\Phi(t)-\Phi(t_0))\}=\log\Phi(t_0)+\log\{I+\Phi(t_0)^{-1}(\Phi(t)-\Phi(t_0)$$

とやりたいのだが，一般には $\Phi(t_0)$ と $I+\Phi(t_0)^{-1}(\Phi(t)-\Phi(t_0))$ が可換でないので，最後の等号は成り立たない．一度には無理なので，反復的手段に訴える．$\Psi(t)=\log\Phi(t)$ は $\exp\Psi(t)=\Phi(t)$ を満たすべき行列なので，これを存在が分かっている $A=\Psi(t_0)=\log\Phi(t)$ からの摂動 $A+C$ として探そう．n 次正方行列を $\boldsymbol{R}^2n$ の点と同一視し，$C\mapsto F(C):=\exp(A+C)$ という写像を考えると，$C=O$ (零行列) のとき，$F(O)=\exp(A)=\Phi(t_0)$ となるので，F は原点すなわち零行列の近傍から $\Phi(t_0)$ の近傍への滑らかな写像となる．この写像の原点での微分，すなわち Jacobi 行列は，

$$\begin{aligned}&\exp(A+\delta C)\\&=I+(A+\delta C)+\frac{1}{2!}(A+\delta C)^2+\cdots\\&=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots\\&\quad+\delta C+\frac{1}{2!}(A\cdot\delta C+\delta C\cdot A)+\frac{1}{3!}(A^2\cdot\delta C+A\cdot\delta C\cdot A+\delta C\cdot A^2)+\cdots\\&\quad+O(\|\delta C\|^2)\end{aligned}$$

の，δC について 1 次の部分であるが，これが線型写像として全単射であれば，逆関数の定理 (例えば [2], 定理 6.8) により，O のある近傍で F は滑らかな逆写像を持つ．すなわち，$\Phi(t_0)$ に十分近い任意の行列, 特に t_0 に十分近い t に対する $\Phi(t)$ に対して $F(C) = \exp(A + C) = \Phi(t)$ を満たす C が存在し，$A + C$ は求める行列 $\Psi(t) = \log \Phi(t)$ となる．逆写像が滑らかなので $\Psi(t)$ は t について $\Phi(t)$ と同じ滑らかさを持つ．更に，逆関数定理の証明から分かるように，逆写像は $\|\Phi(t_0)^{-1}\Phi(t) - \Phi(t_0)\|$ で定まる一定の近傍で定義できるが，$0 \le t \le \omega$ で $\Phi(t)^{-1}$ が存在することから，ノルム $\|\Phi(t_0)^{-1}\|\|$ は定数で抑えられるので，この近傍の大きさは一定に取れる．よって有限ステップの繰り返しで $\log \Phi(\omega)$ まで到達できるのである．

p.199 定理 7.9 の証明の最後

この定理の証明では，B から作られる $\Psi(t)$ を用いた座標変換を非線形の関数 $\vec{g}$ に代入する必要があるので，変換が実でないと困るから，B も実業列でなければならない．しかし，これは抽象的に存在しさえすればよいので，この定理を実用的に使うときには，複素行列でもよいから B をとにかく求めさえすれば，その固有値の実部は相似変換で不変 (定理 7.8 (4) で不定性が残るのは固有値の虚部だけ) なので，それでも定理の十分条件の検証は可能である．

p.212 への注

ここでは Shi Songling の論文の概要と，この問題のその後の発展を紹介する予定ですが，準備中なのでしばらくお待ち下さい．

なお，L. M. Perko が与えた方程式は次のものでした．

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = P(x,y)\cos\alpha - Q(x,y)\sin\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = P(x,y)\sin\alpha + Q(x,y)\cos\alpha,\\
&P(x,y) = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2,\\
&Q(x,y) = x + x^2 + (8\varepsilon - 25 - 9\delta)xy,\\
&\delta = -0.5, \quad \varepsilon = 0.01, \quad \lambda = -0.005, \quad \alpha = -0.0023
\end{aligned}
$$

(以下，準備中)