

『微分方程式講義』の問題の解答

(©Akira KANEKO)

本文書は『微分方程式講義』の読者サービスとして、同書の問の解答を掲載したものです¹⁾。証明問題については完全な解答を、また、答を要求する計算問題については答だけを載せているところもあります。後者の計算過程の詳細で省略されたものについては本書姉妹編の『詳解演習微分方程式』の同じ問の解答をご覧ください。参照の便のため[]内に対応する『例題』あるいは『問題』の番号を記しておきました。なお本文書は教科書の延長であり、著作権もそれに準じるものとお考えください。従って再配布はご遠慮ください。本文書は随時更新されますので、本文書に関する著者へのご連絡は、常に最新のものに依拠するようお願いいたします。

第1章

問 1.1 図 1.1 より、質量 m の振り子の錘に働く重力は糸の方向の成分とそれに直角な方向の成分に分解される。前者は運動に寄与せず、後者がこの方向の加速度を生じる。錘が移動する半径 l の円周の弧長 $s = l\theta$ であり、その時間変化は

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad \therefore \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

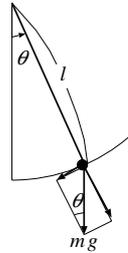


図 1.1 単振り子

しかし、この単純な推論では、 $\frac{d^2 s}{dt^2}$ が本当に加速度の接線成分と等しいのか、曲率があるので心配である。そこで、徹底的に律儀に計算してみると、 xy 座標の原点を錘の静止位置に取れば、加速度ベクトルは

$${}^t \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

運動に寄与する力は、重力の接線成分で ${}^t(-mg \sin \theta \cos \theta, -mg \sin \theta \sin \theta)$ 。(それに垂直な成分は糸の張力と打ち消しあう。) よって運動方程式は

$$m {}^t \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = {}^t(-mg \sin \theta \cos \theta, -mg \sin \theta \sin \theta), \quad i.e. \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -g \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \sin \theta \sin \theta$$

ただし、束縛条件 $x^2 + y^2 = l^2$, あるいは $x = l \sin \theta, y = l(1 - \cos \theta)$ が有るので、すべてを θ で書き直すと

$$\frac{dx}{dt} = l \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = l \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

従って、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -l \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = l \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

¹⁾まだ解答の細部を検討しておらず、全問の解答も出揃ってはいませんが『詳解演習微分方程式』もまだ出版準備中なので、読者の便を考えて取り敢えず書いたところまでを早めにアップします。これで少なくとも掲載分の解答の方針は理解できると思います。誤りを発見された方はお知らせください。

一つ目に $\cos \theta$, 二つ目に $\sin \theta$ を掛けて加えると, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ の項はキャンセルし,

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cos \theta + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \theta = -g \sin \theta \cos \theta \cos \theta - g \sin \theta \sin \theta \sin \theta = -g \sin \theta$$

と, 確かに同じ結論を得る.

別解として, 力学的エネルギー $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$ の保存則を用いると, 接線ベクトルまでは第一近似で大丈夫なので,

$$E = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad (\text{一定})$$

この両辺を微分すれば, 任意定数 E が消えて

$$ml^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

両辺から共通因子 $ml\frac{d\theta}{dt}$ をキャンセルすれば, 上と同じ微分方程式を得る.

問 1.2 太陽の質量を M , 地球の質量を m とすれば, Kepler の第 3 法則の式 (1.20) で $\mu \doteq \gamma M$ としたものにこれらの定数を代入して,

$$\frac{(365.256 \times 24 \times 60 \times 60 \text{sec})^2}{(1.496 \times 10^{11} \text{m})^3} = \frac{4 \times 3.1416^2}{6.6720 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{sec}^{-2} M}$$

$$\therefore M = \frac{4 \times 3.14^2}{6.6720 \times 10^{-11}} \times \frac{(1.496 \times 10^{11})^3}{(365.256 \times 24 \times 60 \times 60)^2} \text{kg} = 1.9892 \times 10^{30} \text{kg}$$

数値計算は電卓 (Risa/Asir) で行った. ちなみに, 理科年表に載っている値は $1.9891 \times 10^{30} \text{kg}$ である. 円周率を 3.14 で計算すると 1.987×10^{30} となるので, やや不正確である. (円周率は 3 でよいなどと言ったのは誰でしょう? (^;)). なお, ここで用いた周期は恒星年で, 地球が宇宙空間で (太陽に対して相対的に) 同じ位置に戻ってくる時間である. 暦で用いる太陽年 365.2422 日の方が有名なので, こちらの数値を覚えていた人は変だと思ったかもしれないが, こちらは地球から見て太陽が見掛け上同じ位置に戻ってくる時間であり, 地球の歳差運動 (地軸のゆっくりした首振り運動) により, 実際の周期よりは少し短くなる.

問 1.3 $\lambda \neq 0$ のときの一般解の公式 $v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ に境界条件を代入して

$$v(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad v(1) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$$

一つ目から $c_2 = -c_1$. これを二つ目に代入して

$$c_1(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0$$

$c_1 = c_2 = 0$ とならないためには

$$e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0, \quad \text{すなわち} \quad e^{2\sqrt{\lambda}} = 1$$

が必要十分である. これは, 複素変数の指数函数に対する Euler の等式から

$$2\sqrt{\lambda} = 2n\pi i, \quad \text{すなわち} \quad \lambda = -n^2\pi^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と同値である. このとき, 同じく Euler の等式から

$$v(x) = c_1 e^{n\pi i x} - c_1 e^{-n\pi i x} = 2c_1 i \sin n\pi x$$

実数値関数となるように $c_1 = -\frac{i}{2}$ と選んで、固有関数 $v(x) = \sin n\pi x$ を得る.

なお、この一般解の公式は $\lambda = 0$ のときは使えないので、その場合の公式 $c_1 + c_2x$ から別途論じなければならぬが、このときは

$$v(0) = c_1 = 0, \quad v(1) = c_1 + c_2 = 0$$

から $c_1 = c_2 = 0$ となってしまうため、 $\lambda = 0$ は固有値ではない.

問 1.4 (1.31) を微分した式から

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2g} \frac{\sqrt{H - u(x)}}{\sqrt{1 + u'(x)^2}}$$

ここで、 $u = y$, $u' = \frac{dy}{dx}$ なので、(1.32) 式を用いてすべてを θ に置き換えると

$$c(1 - \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2g} \frac{\sqrt{c(1 - \cos \theta)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)^2}} = \sqrt{2cg} \frac{(1 - \cos \theta)\sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{2 - 2\cos \theta}} = \sqrt{cg}(1 - \cos \theta)$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{c}}, \quad \theta = \sqrt{\frac{g}{c}}t + \alpha$$

$t = 0$ のとき $x = 0$, 従って $\theta = 0$ だから、積分定数 $\alpha = 0$ である. これを (1.32) に代入すれば x, y の t の関数としての表現を得る:

$$x = c\left(\sqrt{\frac{g}{c}}t - \sin\sqrt{\frac{g}{c}}t\right), \quad y = H - c + c\cos\sqrt{\frac{g}{c}}t$$

第 2 章

問 2.1 (1) $y = Ce^{x^2/2}$ [例題 2.1-1]

(2) $y = \left\{C - \exp\left(\int \frac{dx}{\log x}\right)\right\}^{-1}$ [例題 2.1-2]

(3) $y \log y - y = \frac{x^2}{2} + C$ [例題 2.1-3]

(4) $y = -\log\left(C - \frac{x^2}{2}\right)$ [問題 2.1.2 (2)]

(5) $y = \operatorname{Arccos} \frac{1 - Ce^{2x}}{1 + Ce^{2x}}$ [問題 2.1.2 (1)]

問 2.2 (1) $y = \pm x\sqrt{C - 2\log x}$ [例題 2.2]

(2) $\operatorname{Arctan} \frac{y}{x} - \log \sqrt{x^2 + y^2} = C$ [問題 2.2.1 (1)]

(3) $y = -x \log \log \frac{C}{x}$ [問題 2.2.1 (9)]

問 2.3 (1) $\frac{(x + y - 1)^3}{x - y - 1} = C$ [例題 2.3]

(2) $\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = Ce^{\operatorname{Arctan}((y+1)/x)}$ [問題 2.3.1 (1)]

問 2.4 (1) $y = -\frac{1}{x} + Ce^{\frac{x}{x}}$ [例題 2.4]

(2) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + Ce^{-x}$ [問題 2.5.1 (1)]

(3) $y = 1 + Ce^{-x^2/2}$ [問題 2.4.1 (2)]

(4) $y = 1 + Ce^{-x^3/3}$ [問題 2.4.1 (3)]

(5) $y = 1 + Ce^{1/x}$ [問題 2.4.1 (7)]

(6) $y = x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$ [問題 2.4.1 (4)]

問 2.5 (1) $y = \frac{1}{x + Ce^x}$ [例題 2.6]

(2) $y = \pm \sqrt{1 + \frac{C}{x^2}}$ [例題 2.7 (1)]

(3) $x = e^{-y^3/3} \left(\int e^{y^3/3} dy + C \right)$ [例題 2.7 (2)]

問 2.6 (1) 完全微分形である. $-\frac{x^2}{2} + xy^2 = C$ [例題 2.8-1]

(2) 完全微分形である. $\frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + x^3y^3 = C$ [例題 2.8-2]

問 2.7 (1) e^x が積分因子. $(xy + y^3)e^x = C$ [例題 2.9 (1)]

(2) e^{2y} が積分因子. $\frac{1}{3}x^3e^{3y} + xe^{2y} = C$ [例題 2.9 (2)]

問 2.8 (1) 一般解 $y = cx + e^c$, 特異解 $y = -x(1 - \log(-x))$ [例題 2.11]

(2) 一般解 $y = cx + c^2$, 特異解 $y = -\frac{x^2}{4}$ [問題 2.11.1 (1)]

(3) 一般解 $y = cx - \frac{1}{c}$, 特異解 $y = \pm 2\sqrt{-x}$ [問題 2.11.1 (4)]

問 2.9 (1) 一般解 $y = (\pm\sqrt{x-1} + C)^2$, 特異解 $y = 0, y = x - 1$ [例題 2.12]

(2) 一般解 $x = \frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}, y = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2C}{p}$ (パラメータ表示), 特異解 $y = 0$ [問題 2.12.1 (1)]

(3) 一般解 $x = \int \frac{e^p}{p+1-e^p} dp + C, y = (e^p - 1) \left\{ \int \frac{e^p}{p+1-e^p} dp + C \right\}$ (パラメータ表示), 特異解 $y = 0$ [問題 2.12.1 (3)]

問 2.10 $P(x)y = z$ により未知関数を変換すると,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= P(x) \frac{dy}{dx} + P'(x)y = P(x)^2y^2 + P(x)Q(x)y + P(x)R(x) + P'(x)y \\ &= z^2 + \left\{ Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right\} z + P(x)R(x) \end{aligned}$$

よって $\left\{ Q(x) + \frac{P'(x)}{P(x)} \right\} \mapsto Q(x), P(x)R(x) \mapsto R(x)$ と読み替えれば, $P(x) \equiv 1$ の場合に帰着された. z を y に戻してこれを

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + Q(x)y + R(x)$$

と書こう. 次は $y + \frac{Q}{2}$ を z に変換すると,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{Q'}{2} = y^2 + Q(x)y + R(x) + \frac{Q'}{2} = z^2 + R(x) + \frac{Q'}{2} - Q(x)^2$$

よって $R(x)$ がこれに取り替わるだけで未知関数の 1 次の項が消去できた.

問 2.11 (1) (2.16) において $x = A\xi, y = B\eta$ とそれぞれ独立変数と未知関数を変換すれば,

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = \frac{B}{A} \frac{d\eta}{d\xi} + aB^2\eta^2 = b\eta^\alpha = bA^\alpha \xi^\alpha$$

だから,

$$\frac{B}{A} = aB^2 = bA^\alpha$$

となるように A, B を定めれば, この共通の定数で両辺を割ってすべての係数を 1 にでき, $\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \xi^\alpha$ という方程式を得る. これより, 一つ目の等式から $B = \frac{1}{aA}$. これを二つ目の等式に代入して $\frac{1}{aA^2} = bA^\alpha$. 故に

$$A^{\alpha+2} = \frac{1}{ab}. \text{ よって } A = \frac{1}{(ab)^{1/(\alpha+2)}}, B = \frac{(ab)^{1/(\alpha+2)}}{a} = \frac{b^{1/(\alpha+2)}}{a^{1-1/(\alpha+2)}} = \frac{b^{1/(\alpha+2)}}{a^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}}.$$

(2) まず変換 (2.17) で

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= -\frac{1}{(\alpha_n+3)x^{\alpha_n+2}}\eta^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\eta}\right) = -\frac{1}{(\alpha_n+3)x^{\alpha_n+2}}\eta^2\left(2xy + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{1}{a}\right) \\ &= -\frac{1}{(\alpha_n+3)x^{\alpha_n+2}}\eta^2\left(2xy + x^2(-ay^2 + bx^{\alpha_n}) - \frac{1}{a}\right) \\ &= -\frac{b}{\alpha_n+3}\eta^2 + \frac{a}{(\alpha_n+3)x^{\alpha_n+2}}\frac{\eta^2}{x^2}\left(x^2y - \frac{x}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{b}{\alpha_n+3}\eta^2 + \frac{a}{(\alpha_n+3)x^{\alpha_n+4}} = -\frac{b}{\alpha_n+3}\eta^2 + \frac{a}{(\alpha_n+3)\xi^{1+1/(\alpha_n+3)}} \end{aligned}$$

ここで, $\alpha_n = -\frac{4n}{2n-1}$ なら

$$1 + \frac{1}{\alpha_n+3} = 1 + \frac{2n-1}{6n-3-4n} = 1 + \frac{2n-1}{2n-3} = \frac{4n-4}{2n-3} = -\alpha_{n-1} \quad (\text{A2.1})$$

となり, (2.18) が確かめられた.

次に, (2.19) より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (\alpha_n+1)\xi^{1+1/(\alpha_n+1)}y^2 \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{y}\right) = (\alpha_n+1)\xi^{1+1/(\alpha_n+1)}y^2\left(2\xi\eta + \xi^2\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\alpha_n+1}{b}\right) \\ &= -ay^2 + bx^{\alpha_n} \end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= -\frac{a}{\alpha_n+1}\xi^{-3-1/(\alpha_n+1)} + \frac{b}{\alpha_n+1}\xi^{-\alpha_n/(\alpha_n+1)-3-1/(\alpha_n+1)}\frac{1}{y^2} - 2\frac{\eta}{\xi} - \frac{\alpha_n+1}{b\xi^2} \\ &= -\frac{a}{\alpha_n+1}\xi^{-3-1/(\alpha_n+1)} + \frac{b}{\alpha_n+1}\xi^{-4}\left(\xi^4\eta^2 + 2\frac{\alpha_n+1}{b}\xi^3\eta + \frac{(\alpha_n+1)^2}{b^2}\xi^2\right) - 2\frac{\eta}{\xi} - \frac{\alpha_n+1}{b\xi^2} \\ &= \frac{b}{\alpha_n+1}\eta^2 - \frac{a}{\alpha_n+1}\xi^{-3-1/(\alpha_n+1)} \end{aligned}$$

ここで (A2.1) から $\alpha_{n-1}+1 = -\frac{1}{\alpha_n+3}$, 従って番号を一つずらして

$$-\frac{1}{\alpha_n+1} = \alpha_{n+1}+3 \quad (\text{A2.2})$$

が成り立つから, 最後の ξ の幂は α_{n+1} となり (2.20) が示された.

なお, (2.19) と (2.17) の逆変換との関係について考察しておく. (2.17) の直接の逆変換は, (2.17) において x と ξ, y と η を交換して

$$x = \xi^{\alpha_n+3}, \quad \frac{1}{y} = \xi^2\eta - \frac{\xi}{a}$$

この変換が

$$\eta' + \frac{b}{\alpha_n+3}\eta^2 = \frac{a}{\alpha_n+3}\xi^{\alpha_n-1} \quad \text{を} \quad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^{\alpha_n}$$

に戻すはずなので,

$$A = \frac{b}{\alpha_n+3}, \quad B = \frac{a}{\alpha_n+3}$$

より,

$$a = (\alpha_n + 3)B, \quad b = (\alpha_n + 3)A$$

だから, 上の逆変換は

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^{\alpha_n-1} \quad \text{を} \quad \frac{d\eta}{d\xi} + (\alpha_n + 3)B\eta^2 = (\alpha_n + 3)A\xi^{\alpha_n}$$

に写すはずである. ここで $n \mapsto n+1$ とする. (A2.2) に注意すると,

$$\xi = x^{-(\alpha_n+1)}, \quad \frac{1}{y} = \xi^2\eta + \frac{\alpha_n+1}{B}$$

という変換で,

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^{\alpha_n} \quad \text{が} \quad \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{B}{\alpha_n+1}\eta^2 = -\frac{A}{\alpha_n+1}\xi^{\alpha_n+1}$$

に変換されることになる. 以上は (2.19) \implies (2.20) の別証となる.

問 2.12 (1) $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$ において $z = xy$ により 未知関数を y から z に変換すると,

$$\frac{dz}{dx} = y + x\frac{dy}{dx} = y + x(-y^2 + \frac{2}{x^2}) = \frac{1}{x}\{xy - (xy)^2 + 2\} = \frac{1}{x}(z - z^2 + 2)$$

よってこれは

$$\frac{dz}{z - z^2 + 2} = \frac{dx}{x}$$

と変数分離され,

$$\begin{aligned} \log x + c &= - \int \frac{dz}{(z-2)(z+1)} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-2} \right) dz \\ &= \frac{1}{3} \log(z+1) - \frac{1}{3} \log(z-2) = \frac{1}{3} \log \frac{z+1}{z-2}. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{z+1}{z-2} = Cx^3, \quad z = -\frac{1+2Cx^3}{1-Cx^3}, \quad y = \frac{z}{x} = -\frac{1+2Cx^3}{x(1-Cx^3)}$$

(2) 結果は同上 [例題 2.14]

なお, この問題の右辺の分子が 2 になっているのは, 計算と答を簡単にするためであり, 分子が 1 でも求積可能なことは変わらない.

問 2.13 $y = \frac{cu_1 + u_2}{cv_1 + v_2}$ の両辺を x で微分すると

$$y' = \frac{(cu_1' + u_2')(cv_1 + v_2) - (cu_1 + u_2)(cv_1' + v_2')}{(cv_1 + v_2)^2} = \frac{cu_1' + u_2' - y(cv_1' + v_2')}{cv_1 + v_2}$$

これと元の式から c を消去する. 二つの式の分母を払って

$$c(yv_1 - u_1) = u_2 - yv_2, \quad c(y'v_1 - u_1' + yv_1') = u_2' - yv_2' - y'v_2$$

としておくと,

$$\begin{aligned} (y'v_1 - u_1' + yv_1')(u_2 - yv_2) &= (yv_1 - u_1)(u_2' - yv_2' - y'v_2), \\ y'\{v_1(u_2 - yv_2) + v_2(yv_1 - u_1)\} &= (yv_1 - u_1)(u_2' - yv_2') - (-u_1' + yv_1')(u_2 - yv_2) \\ \therefore (v_1u_2 - u_1v_2)y' &= (v_1'v_2 - v_1v_2')y^2 + (u_1v_2' + v_1u_2' - v_1'u_2 - u_1'v_2)y - u_1u_2' + u_1'u_2 \\ y' &= \frac{v_1'v_2 - v_1v_2'}{v_1u_2 - u_1v_2}y^2 + \frac{u_1v_2' + v_1u_2' - v_1'u_2 - u_1'v_2}{v_1u_2 - u_1v_2}y + \frac{u_1'u_2 - u_1u_2'}{v_1u_2 - u_1v_2} \end{aligned}$$

u_1, u_2, v_1, v_2 は x の既知関数としているので、この右辺の係数を順に P, Q, R としたものが答である。
別解として、最初の式を c について解くと

$$c = \frac{-v_2y + u_2}{v_1y - u_1}$$

これを x につき微分して

$$0 = \frac{(-v_2y' - v_2' y + u_2')(v_1y - u_1) - (-v_2y + u_2)(v_1y' + v_1' y - u_1')}{(v_1y - u_1)^2}$$

分母を払って整理すると、

$$(u_1v_2 - v_1u_2)y' + (v_1'v_2 - v_1v_2')y^2 + (v_1u_2' + u_1v_2' - v_1'u_2 - u_1'v_2)y + u_1'u_2 - u_1u_2' = 0$$

y' の係数で割り算すれば、先の計算結果と一致する。

問 2.14 (1) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} + c_1e^x + c_2e^{-3x}$ [問題 3.10.1 (1)]

(2) $y = -\frac{1}{2} + c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$ [問題 3.10.1 (2)]

(3) $y = -\frac{1}{3}\cos 2x + c_1\cos x + c_2\sin x$ [問題 3.10.1 (3)]

(4) $y = \frac{1}{2}\cos x + c_1e^x + c_2xe^x$ [問題 3.10.1 (4)]

(5) $y = -x + c_1e^x + c_2e^{-x}$ [問題 3.10.1 (5)]

(6) $y = e^{2x} + c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x$ [問題 3.10.1 (6)]

問 2.15 手から離れたボールに働く力は、重力と摩擦力である。重力は鉛直下方に働くので、図のように丘に沿う接線方向の分力を求めると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

より、パラメータの値が θ の地点では、図より接線の傾き φ は

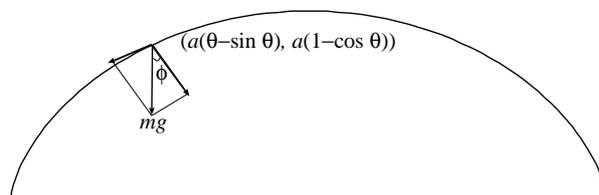
$$\sin \varphi = \frac{\sin \theta}{\sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}} = \frac{\sin \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \cos \frac{\theta}{2}$$

速度ベクトルは

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = a(1 - \cos \theta, \sin \theta) \frac{d\theta}{dt}$$

よって加速度ベクトルは

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a(\sin \theta, \cos \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + a(1 - \cos \theta, \sin \theta) \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



この接線成分は、単位ベクトル $(\cos \varphi, \sin \varphi) = (\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})$ の方向であり、その大きさはこの単位ベクトルとの内積を取って

$$\begin{aligned} \alpha &= a(\sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta \cos \frac{\theta}{2}) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + a\{(1 - \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}\} \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ &= a \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2a \sin \frac{\theta}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

Newton の運動方程式は $m\alpha = -mg \sin \varphi = -mg \cos \frac{\theta}{2}$ となるが, $\frac{d\theta}{dt}$ について非線形となるので, 変数を取り替えることを考える. 山の頂上を起点とし, 左側で負, 右側で正の符号をつけた弧長パラメータ s を導入すると, 先の計算を再利用して

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

これより,

$$\frac{ds}{dt} = 2a \sin \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = 2a \sin \frac{\theta}{2} \frac{d^2\theta}{dt^2} + a \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \alpha$$

故に求める運動方程式は,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \cos \frac{\theta}{2}$$

となるが, 弧長は

$$s = \int_0^s ds = \int_{\pi}^{\theta} 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \left[-4a \cos \frac{\theta}{2} \right]_{\pi}^{\theta} = -4a \cos \frac{\theta}{2}$$

となるので, 右辺はこれに比例し, 結局

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{4a} s$$

となる.

別解として, 問 1.1 の別解と同様, 力学的エネルギー保存則から導くと, 大した計算をせずに同じ結論が得られる.

問 2.16 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の 2 根は異なるとする. 例題 2.10 で求めた一般解

$$y = \frac{B}{\mu^2 + a\mu + b} e^{\mu x} + c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

において, 初期条件 $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ を適用すると,

$$1 = \frac{B}{\mu^2 + a\mu + b} + c_1 + c_2, \quad 0 = \frac{B\mu}{\mu^2 + a\mu + b} + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2$$

これより,

$$c_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{B(\mu - \lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\mu^2 + a\mu + b)}, \quad c_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{B(\mu - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\mu^2 + a\mu + b)},$$

よって

$$y = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{B}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) e^{\mu x} + (\mu - \lambda_2) e^{\lambda_1 x} - (\mu - \lambda_1) e^{\lambda_2 x}}{\mu^2 + a\mu + b}$$

ここで, 例えば μ を λ_1 に近づけるときは, 変化する最後の項の最後の因子だけ見ると

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) e^{\mu x} + (\mu - \lambda_2) e^{\lambda_1 x} - (\mu - \lambda_1) e^{\lambda_2 x}}{\mu^2 + a\mu + b} \\ &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(e^{\mu x} - e^{\lambda_1 x}) + (\mu - \lambda_1) e^{\lambda_1 x} - (\mu - \lambda_1) e^{\lambda_2 x}}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} \\ &\rightarrow -x e^{\lambda_1 x} + \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned}$$

よって極限解は

$$y = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{B x e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{B(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

根と係数の関係により, $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$, 従つて $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\lambda_1 + a$ に注意すると, これは, 共振の場合の一般解

$$y = \frac{B}{2\lambda_1 + a} x e^{\lambda_1 x} + c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

に同じ初期条件を適用して得られる

$$1 = c_1 + c_2, \quad 0 = \frac{B}{2\lambda_1 + a} + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2$$

から,

$$c_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{B}{(2\lambda_1 + a)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad c_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{B}{(2\lambda_1 + a)(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

から求めたもの

$$y = \frac{B}{2\lambda_1 + a} x e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{B(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})}{(2\lambda_1 + a)(\lambda_2 - \lambda_1)},$$

これは, 一般論における, 微分方程式の解のパラメータに関する連続性の具体例となっている.

問 2.17 計算を簡単にするため, 方程式 $y'' + 2ay' + \omega^2 y = B e^{i\omega x}$ を考える. この解は一般論より,

$$y = \frac{B e^{i\omega x}}{-\omega^2 + 2ai\omega + \omega^2} + c_1 e^{(-a+i\omega)x} + c_2 e^{(-a-i\omega)x} = \frac{B e^{i\omega x}}{2ai\omega} + c_1 e^{(-a+i\omega)x} + c_2 e^{(-a-i\omega)x}$$

である. 初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ を課してみると,

$$1 = \frac{B}{2ai\omega} + c_1 + c_2, \quad 0 = \frac{Bi\omega}{2ai\omega} + c_1(-a+i\omega) + c_2(-a-i\omega)$$

これより

$$c_1 = \frac{-a-i\omega}{-2i\omega} - \frac{B(a+2i\omega)}{(2i\omega)^2 a}, \quad c_2 = \frac{-a+i\omega}{2i\omega} + \frac{Ba}{(2i\omega)^2 a}$$

よつて解は

$$\begin{aligned} y &= \frac{B e^{i\omega x}}{2ai\omega} + \frac{-(-a-i\omega)e^{(-a+i\omega)x} + (-a+i\omega)e^{(-a-i\omega)x}}{2i\omega} + \frac{B}{(2i\omega)^2 a} \{-(a+2i\omega)e^{(-a+i\omega)x} + ae^{(-a-i\omega)x}\} \\ &= + \frac{-(-a-i\omega)e^{(-a+i\omega)x} + (-a+i\omega)e^{(-a-i\omega)x}}{2i\omega} + \frac{B}{(2i\omega)^2 a} \{2i\omega - (a+2i\omega)e^{(-a+i\omega)x} + ae^{(-a-i\omega)x}\} \end{aligned}$$

ここで最後の辺の初項は有界である. 次の項は

$$= \frac{B}{2i\omega} \frac{1 - e^{(-a+i\omega)x}}{a} - \frac{B}{(2i\omega)^2} \{e^{(-a+i\omega)x} - e^{(-a-i\omega)x}\}$$

と書き直され, この最後の項も有界で, 問題となるのは, 第1項の因子

$$\frac{1 - e^{(-a+i\omega)x}}{a} \doteq \frac{(a-i\omega)x}{a}$$

である. これは $x=0$ では0だが, x が0から離れると, a が小さいときは急激に大きくなるのが, Taylor 近似から見て取れる. すなわち, 摩擦が無いときの共振と同じことが近似的に起こっている. 上の値をまるごと評価してみると

$$\left| \frac{1 - e^{(-a+i\omega)x}}{a} \right| = \frac{\sqrt{1 + e^{-2ax} - 2e^{-ax} \cos \omega x}}{a}$$

となり, 最大値を厳密に求めることはできないが, 例えば $\omega = 1$ として a を小さくしてみると, 数値的に

a の値	振幅の最大値	最大値をとる x
1.0	1.069432	2.284
0.1	17.367732	2.968
0.01	196.916785	3.1219
0.001	1996.86433	3.1396
0.0001	19996.8590	3.1414

となる．もちろん $x \rightarrow \infty$ とすれば解は最後は 0 に減衰するのだが，実際の構造物では，この最大値に耐えられなければ，破壊が起こる．つまり摩擦が相当大きくなければ，共振を防ぐ効果は期待できないことになる．

問 2.18 (1) $\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2x^2 - 2x + 1}{8}e^x + c_1e^x + c_2e^{-x}$ [問題 3.10.1 (7)]

(2) $e^{3x}(\frac{x^2}{2} - x + 1) + c_1e^x + c_2e^{2x}$ [問題 3.10.1 (8)]

(3) $\log(\cos x) \cos x + x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$ [問題 3.10.1 (9)]

(4) $\frac{x^3}{2}(\log x)^2 + c_1x^3 + c_2x^3 \log x$ [問題 3.10.2 (4)]

(5) $\frac{1}{4} + c_1 \cos(2 \log x) + c_2 \sin(2 \log x)$ [問題 3.10.2 (5)]

問 2.19 教科書の続きを計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right) = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \left\{ p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right\} \\ &= p \left\{ p^2 \frac{d^3p}{dy^3} + 2p \frac{dp}{dy} \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^3 + 2p \left(\frac{dp}{dy} \right) \frac{d^2p}{dy^2} \right\} \\ &= p^3 \frac{d^3p}{dy^3} + 4p^2 \frac{dp}{dy} \frac{d^2p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^3 \end{aligned}$$

問 2.20 $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ の両辺に $2\frac{dy}{dx}$ を掛けると

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dy}{dx} = 2f(y) \frac{dy}{dx}$$

$f(y)$ の原始関数を $F(y)$ とするとき，上の式は

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 2F(y)$$

を x について微分したものとなっている．よって

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 2 \int \frac{1}{2} f(y) dy + C$$

という 1 階の微分方程式に帰着される．

問 2.21 (2.14) に $P(x)y = -\frac{u'}{u}$ を代入すると，

$$\begin{aligned} 0 &= y' - Py^2 - Qy - R = -\left(\frac{u'}{Pu} \right)' - P \left(\frac{u'}{Pu} \right)^2 + Q \left(\frac{u'}{Pu} \right) - R \\ &= -\frac{Pu u'' - P(u')^2 - P' u u'}{P^2 u^2} - \frac{P(u')^2}{P^2 u^2} + \frac{PQ u u'}{P^2 u^2} - \frac{P^2 R u^2}{P^2 u^2} \\ &= -\frac{1}{Pu} \left\{ u'' - \frac{P'}{P} u' - Q u' + PR \right\} \end{aligned}$$

逆に, $y = -u'/Pu$ から

$$u' = -Puy, \quad u'' = -Puy' - (P'u + Pu')y = -Puy' + P^2uy^2 - P'uy$$

これらを上の2階線形微分方程式に代入し, 共通因子 u を省けば,

$$-Py' + P^2y^2 - P'y - PSy + T = 0, \quad \text{すなわち, } y' - Py^2 + \left(\frac{P'}{P} + S\right)y - \frac{T}{P} = 0$$

第3章

問 3.1 $f(x) = \sqrt{|x|}$ は, $x = 0$ で Lipschitz 条件を満たさない. 実際, $|\sqrt{|x|} - \sqrt{0}| \leq K|x - 0|$ が成り立つとすると, $1 \leq K\sqrt{|x|}$ が $x = 0$ の近傍で成り立たねばならないが, これは不可能である. しかしこの関数は $\frac{1}{2}$ -一様 Hölder 連続である. 実際,

$$|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq \frac{||x| - |y||}{|\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}|} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \leq |x - y|^{1/2} \frac{\sqrt{|x - y|}}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}$$

であり,

$$\sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{|x| + |y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$$

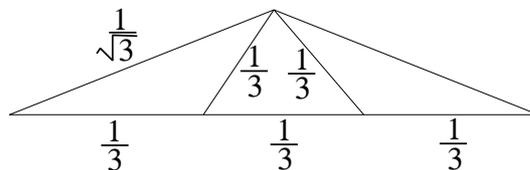
が成り立つので, 上より $|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq |x - y|^{1/2}$ が成り立つ.

次に,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log|x|}, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

は至る所で連続であるが, $x = 0$ で Hölder 連続とならない. 実際, この関数は, $x \neq 0$ では明かに連続であり, $x \neq 0, x \rightarrow 0$ のとき $\log|x| \rightarrow -\infty$ なので, $x = 0$ でも連続である. もし $\left|\frac{1}{\log|x|} - 0\right| \leq K|x - 0|^\alpha$ となる $\alpha > 0$ が存在すると, $1 \leq |x|^\alpha \log|x|$ となるが, この右辺は微積分でよく知られているように $x \rightarrow 0$ のとき 0 に収束するので, 不合理である.

問 3.2 参考文献 [2] の von Koch 曲線の構成法を見ると, 二進展開 $t = 0.i_1i_2\dots i_n\dots$ を持つ実数に対応する点 $f(t)$ は, n ステップだけ操作を進めた段階でのある 3 角形 $T_{i_1i_2\dots i_n}$ に属する. $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |t_1 - t_2| < \frac{1}{2^n}$ なら, $f(t_1)$ と $f(t_2)$ は n ステップ目の 3 角形の集合において, 同一の 3 角形に属するか, 隣同士の 3 角形に属するかである. なぜなら, もし n ステップ目にこれらの点が属する 3 角形の間には別の 3 角形が存在すれば, t_1 と t_2 の二進展開の第 $n - 1, n$ 桁は, 例えば 00, 10 のように最低 10 の差が生じる. よって前者の $n + 1$ 位以下がすべて 1 で, 後者の $n + 1$ 位以下がすべて 0 という極端な場合でさえ, t_1, t_2 はこれらの桁で 01 と 10 のように 01 だけの差を持ち, 従って $|t_1 - t_2| \geq \frac{1}{2^n}$ となって仮定に反する.



さて, 第 n ステップの 3 角形は出発時の $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ 倍に相似縮小されているので, これより粗く見積もっても $|f(t_1) - f(t_2)| \leq 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 2\sqrt{3}(\sqrt{3})^{-(n+1)}$ が成り立つ.

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq |t_1 - t_2| \iff n + 1 \geq \frac{-\log|t_1 - t_2|}{\log 2}$$

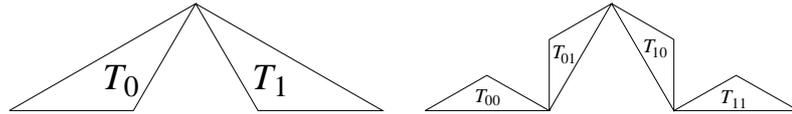
だから, $\frac{1}{2^{n+1}} \leq |t_1 - t_2| < \frac{1}{2^n}$ なら,

$$\log |f(t_1) - f(t_2)| \leq \log 2\sqrt{3} - (n+1) \log \sqrt{3} \leq \log 2\sqrt{3} + \frac{\log |t_1 - t_2|}{\log 2} \log \sqrt{3}$$

従って

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq 2\sqrt{3} |t_1 - t_2|^{\log \sqrt{3} / \log 2}$$

n は任意だから, これより f は $[0, 1]$ 上一様 $\frac{\log \sqrt{3}}{\log 2}$ -Hölder 連続である.



ただし, 以上の議論では, $f(t)$ の連続性の度合いを \mathbf{R}^2 の距離で測っているが, 問題の趣旨は $f(t)$ の x, y 成分である 1 変数関数の連続性の度合いが問われていると思われる. なので, もう少し考察が必要である. 1 ステップ進んだときの三角形はすべて 2 等辺 3 角形の底辺が水平から傾いているので, x 座標の差は上で評価した \mathbf{R}^2 での点の Euclid 距離よりも小さくなっているので, Hölder 指数が改良できるかもしれないという疑念を抱かせる. しかし, 図から分かるように, 2 ステップ進むと 2 等辺 3 角形の底辺が水平なものが見える. (例えば左端の 3 角形を見よ.) 3 角形 $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ の両端点は $t_1 = 0.i_1 i_2 \dots i_n$ と $t_2 = 0.i_1 i_2 \dots i_n 11 \dots$ という二進数に対応している. その差はちょうど $\frac{1}{2^n}$ である. よって x 座標の差は 2 ステップ毎に最大で上に評価したのと同じ指数の評価しか持たず, Hölder 連続性も改良はできない. y 座標については, もう少し面倒だが, ときどき底辺が垂直になるものが見えるので, 実は同じ評価しか持たない. そこまで詳しく見なくても, 2 ステップごとに出現が明らかな水平の 2 等辺 3 角形を用いても, t が半分進んだところで $f(t)$ は頂点に来るので, 左端との t の差は $\frac{1}{2^{n+1}}$ で, $f(t)$ の y 座標の差は $\frac{1}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{3}^{-n}$ だから, 定数因子が変わるだけで, 同じ評価が得られる.

以上の考察から, Hölder 指数がこれ以上改良できないことも分かる.

問 3.3 ヒントに従い,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

という関数を考えると, 原点以外では明かに C^1 級なので, 平均値定理により各点で Lipschitz 連続である. また, 原点でも,

$$|f(x) - f(0)| \leq |x| = |x - 0|$$

より, Lipschitz 連続である. しかしこの関数は一様 Lipschitz 連続ではない. 実際, 例えば, $x_1 = \frac{1}{2n\pi - \varepsilon}$, $x_2 = \frac{1}{2n\pi + \varepsilon}$ とすると, $f(x_1) = -\frac{1}{(2n\pi - \varepsilon)} \sin \varepsilon$, $f(x_2) = \frac{1}{(2n\pi + \varepsilon)} \sin \varepsilon$, 従って

$$|x_1 - x_2| = \frac{2\varepsilon}{4n^2\pi^2 - \varepsilon^2}, \quad |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{4n\pi \sin \varepsilon}{4n^2\pi^2 - \varepsilon^2},$$

従って, もし $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$ という不等式が成り立つとすると,

$$4n\pi \sin \varepsilon \leq 2K\varepsilon, \quad n \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon}$$

とならねばならないが, $n \rightarrow \infty$ とするとき, これは不可能である.

各点で Hölder 連続だが一様 Hölder 連続でない関数の例は、同様に

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

を取ればよい. 実際, Hölder 連続性については, 今度も調べるべき点は $x = 0$ のみだが, ここで α -Hölder 連続となっていることはほとんど明らかである. 一様性については, 上と同様の 2 点をとると, $|x_1 - x_2|$ は変わらず,

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \frac{2\varepsilon}{4n^2\pi^2 - \varepsilon^2}, \\ |f(x_1) - f(x_2)| &= \sin \varepsilon \left(\frac{1}{|2n\pi - \varepsilon|^\alpha} + \frac{1}{|2n\pi + \varepsilon|^\alpha} \right) \\ &= \sin \varepsilon \frac{|2n\pi + \varepsilon|^\alpha + |2n\pi - \varepsilon|^\alpha}{|4n^2\pi^2 - \varepsilon^2|^\alpha} \end{aligned}$$

よつてもし $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\alpha$ となつたとすると,

$$\sin \varepsilon (|2n\pi + \varepsilon|^\alpha + |2n\pi - \varepsilon|^\alpha) \leq K(2\varepsilon)^\alpha$$

が成り立たねばならないが, n が大きく ε が小さいとき

$$|2n\pi + \varepsilon|^\alpha + |2n\pi - \varepsilon|^\alpha = (2n\pi)^\alpha \left(\left| 1 + \frac{\varepsilon}{2n\pi} \right|^\alpha + \left| 1 - \frac{\varepsilon}{2n\pi} \right|^\alpha \right) \doteq 2(2n\pi)^\alpha$$

なので, ε を固定しておいて $n \rightarrow \infty$ とすれば破綻を生じる.

問 3.4 [『数理基礎論講義』 ([5]), 補題 12.1 と問題 12.2 のサポート ページ解答参照.]

問 3.5 $\forall x_0 \in X$ から出発した反復列を $x_n = T^n x_0, n = 0, 1, 2, \dots$ とする. $m > n$ に対し, 三角不等式を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} \text{dis}(x_m, x_n) &= \text{dis}(T^m x_0, T^n x_0) \leq \text{dis}(T^m x_0, T^{m-1} x_0) + \text{dis}(T^{m-1} x_0, T^n x_0) \leq \dots \\ &\leq \text{dis}(T^m x_0, T^{m-1} x_0) + \text{dis}(T^{m-1} x_0, T^{m-2} x_0) + \dots + \text{dis}(T^{n+1} x_0, T^n x_0) \end{aligned}$$

よつて T に対する仮定から

$$\leq \lambda_{m-1} \text{dis}(T x_0, x_0) + \lambda_{m-2} \text{dis}(T x_0, x_0) + \dots + \lambda_n \text{dis}(T x_0, x_0) = (\lambda_{m-1} + \lambda_{m-2} + \dots + \lambda_n) \text{dis}(T x_0, x_0)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ という仮定により, 上の括弧内は $m, n \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づく. よつて $x_n = T^n x_0$ は X の Cauchy 列となり, 完備性の仮定によりある点 $x_\infty \in X$ に収束する. $\text{dis}(Tx, Ty) \leq \lambda_1 \text{dis}(x, y)$ より T は連続なので, $Tx_n \rightarrow Tx_\infty$ である. よつて $x_{n+1} = Tx_n$ から極限に行つて $x_\infty = Tx_\infty$ となり x_∞ は T の不動点である. 不動点がただ一つしかないことは, x, y をともに不動点とすると,

$$\text{dis}(x, y) = \text{dis}(Tx, Ty) = \dots = \text{dis}(T^n x, T^n y) \leq \lambda_n \text{dis}(x, y)$$

であつて, $n \rightarrow \infty$ のとき $\lambda_n \rightarrow 0$ であることから, $\text{dis}(x, y) = 0$, 従つて $x = y$ となることより分かる. 最後に, 上の不等式で $n = 0$ としたもの

$$\text{dis}(x_m, x_0) = \text{dis}(T^m x_0, T^0 x_0) \leq (\lambda_{m-1} + \lambda_{m-2} + \dots + \lambda_1) \text{dis}(T x_0, x_0)$$

から $m \rightarrow \infty$ として

$$\text{dis}(x_\infty, x_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \text{dis}(T x_0, x_0)$$

という評価を得る.

問 3.6 大きい方の写真のある点に小さい方の写真の同じ景色上の点を対応させると、大きい方の写真からそれ自身への縮小写像ができることは明らかである. よって不動点定理により、不動点が存在するが、これは2枚の写真に共通な風景の点に他ならない.

問 3.7 $T\varphi := c + \int_0^x f(t, \varphi(t))dt$ に縮小写像の原理を適用することを考える. $f(x, y)$ 自身は $x = 0$ で連続ではないが、可積分なので、 φ が連続関数なら $T\varphi$ は連続となる. そこで連続関数の部分集合から T の定義域 X を適当に作ることを考える.

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &\leq \left| \int_0^x \{f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\} dt \right| \leq K \left| \int_0^x \frac{|\varphi(t) - \psi(t)|}{|t|^p} dt \right| \\ &\leq K \|\varphi - \psi\|_\infty \left| \int_0^x \frac{1}{|t|^p} dt \right| = \frac{K}{1-p} |x|^{1-p} \|\varphi - \psi\|_\infty \leq \frac{K}{1-p} |a|^{1-p} \|\varphi - \psi\|_\infty \end{aligned}$$

よって a が $\delta := \frac{K}{1-p} |a|^{1-p} < 1$ を満たす程度に小さければ、 $X = C[-a, a]$ において縮小写像の不動点定理が使え、不動点がただ一つ存在する. a が一般のときは、教科書の p.78~ で述べたように二つの方法がある. 第一の方法は、 $[-a, a]$ を分割して解を繋げるものである. 今は最初から積分方程式なので、繋ぎかたがそう明らかではないかもしれないから、確認しておこう. まず解 $\varphi_0(x)$ が $0 \leq x \leq \delta$ で得られたとして、積分方程式

$$\varphi(x) = \varphi_0(\delta) + \int_\delta^x f(t, \varphi(t)) dt$$

を考えると、上と同様の議論で $\exists \delta_1 > 0$ について $\delta \leq x \leq \delta + \delta_1$ で解 $\varphi_1(x)$ が得られる. そこで

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & 0 \leq x \leq \delta \text{ のとき,} \\ \varphi_1(x), & \delta \leq x \leq \delta + \delta_1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

と定めれば、 $\delta \leq x \leq \delta + \delta_1$ のときも

$$\varphi(x) = \varphi_0(\delta) + \int_\delta^x f(t, \varphi(t)) dt = c + \int_0^\delta f(t, \varphi(t)) dt + \int_\delta^x f(t, \varphi(t)) dt = c + \int_0^x f(t, \varphi(t)) dt$$

で、与えられた積分方程式を満たす. 以下 $x = a$ に達するまで有限回これを繰り返せばよい. この説明は $f(x, y)$ がより一般の関数のときに通用するが、この問題に限って言えば、積分方程式の解は $x \neq 0$ では C^1 級で、導関数は $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ を満たすので、解の接続は微分方程式のそれを適用してもよい. $\delta > 0$ を固定するとき、 $x \geq \delta$ では $f(x, y)$ は y につき一様 Lipschitz 条件を満たすので、解の一意性も微分方程式の一般論から従う.

第二の方法は、重み付き最大値ノルムを導入して一気に片付けるものである. 例えば、教科書でも用いた

$$\|\|\varphi(x)\|\| := \max_{|x| \leq a} \{e^{-L|x|} |\varphi(x)|\}$$

というノルムを用いると、 $\lambda < \frac{1}{2}$ を正定数として、 $\delta > 0$ を $\frac{K}{1-p} |\delta|^{1-p} = \lambda$ となるように選んでおけば、 $x \geq 0$ では

$$\begin{aligned} |e^{-Lx}(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &\leq \left| \int_0^x e^{-Lt} \{f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\} dt \right| \leq K \left| \int_0^x e^{-Lx} \frac{|\varphi(t) - \psi(t)|}{|t|^p} dt \right| \\ &\leq K \max_{0 \leq t \leq x} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)| \left| \int_0^x \frac{e^{-L(x-t)}}{|t|^p} dt \right| \leq \|\|\varphi - \psi\|\| K \left| \int_0^x \frac{e^{-L(x-t)}}{|t|^p} dt \right| \end{aligned}$$

において、 $x \leq \delta$ なら、最後の辺の分子を 1 で置き換えれば、既に計算したところにより上は $\leq \lambda \|\varphi - \psi\|$ となる。また $x > \delta$ なら、上は

$$\leq \max_{0 \leq t \leq \delta} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)| K \int_0^\delta \frac{e^{-L(x-t)}}{|t|^p} dt + \max_{\delta \leq t \leq x} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)| K \int_\delta^x \frac{e^{-L(x-t)}}{|t|^p} dt$$

において、第 1 項は $\leq \lambda \max_{\delta \leq t \leq x} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)|$ 、また第 2 項は

$$\leq \max_{\delta \leq t \leq x} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)| \frac{K}{\delta^p} \int_\delta^x e^{-L(x-t)} dt = \frac{K}{\delta^p L} (1 - e^{-L(x-\delta)}) \max_{\delta \leq t \leq x} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

となるから、 L を十分大きくして $\frac{K}{\delta^p L} \leq \lambda$ となるように選んでおけば、これも $\leq \lambda \max_{\delta \leq t \leq x} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)|$ となる。よって合わせて

$$|e^{-Lx}(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| \leq 2\lambda \max_{0 \leq t \leq a} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

となるので、左辺の x について $0 \leq x \leq a$ で最大値を取れば、

$$\max_{0 \leq x \leq a} |e^{-Lx}(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| \leq 2\lambda \max_{0 \leq t \leq a} e^{-Lt} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

が得られる。 $-a \leq x \leq 0$ でも同様の評価が成り立つから、この重み付き最大値ノルムで T は縮小写像であることが示される。

問 3.8 まず、固定した x については、 $\max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\}$ が $|f_k(x)|$ で達成されるとすれば、Hölder の不等式により $1 < \forall p < \infty$ に対して $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ として

$$\begin{aligned} |\vec{f}(x)|_1 &= |f_1(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq (|f_1(x)|^p + \dots + |f_n(x)|^p)^{1/p} (1^q + \dots + 1^q)^{1/q} = n^{1/q} |\vec{f}(x)|_p \\ &\leq n^{1/q} (|f_k(x)|^p + \dots + |f_k(x)|^p)^{1/p} = n^{1/q} n^{1/p} |f_k(x)| = n^{1/q+1/p} \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\} = n |\vec{f}|_\infty \end{aligned}$$

他方、

$$|\vec{f}(x)|_\infty = \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_n(x)|\} = |f_k(x)| \leq |f_1(x)| + \dots + |f_n(x)| = |\vec{f}(x)|_1$$

これですべて繋がった。

x に関する最大値を外に書くのと、中の成分ごとに書くのの同値性は教科書と同様である。

問 3.9 (1) D が凸領域の場合、 $\vec{x}, \vec{y} \in D$ を結ぶ線分が D に含まれるので、

$$\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \vec{f}(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} \vec{f}'(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})) dt \cdot (\vec{y} - \vec{x})$$

という式が意味を持つ。ここで、 \vec{f} が C^1 級という仮定より、被積分ベクトルの長さは $\leq M$ と抑えられるから、Schwarz の不等式により上は $\leq M |\vec{y} - \vec{x}|$ となる。よって \vec{f} は Lipschitz 連続である。のみならず、 M が一定に取れる範囲では一様 Lipschitz 連続ともなる。

(2) f が D で有界連続な偏導関数を持つことは明らかである。実際、 x に関する微分は恒等的に零となる。 y に関する微分は、楯の各刃ごとに計算すればよく、結果は $y = \frac{1}{2}$ でも連続に繋がる。今、隣同士の楯の刃に点 $P_n(\frac{0.5}{n}, 0)$, $P_{n+1}(\frac{0.5}{n+1}, 0)$ を取ると、 $|P_n - P_{n+1}| = \frac{0.5}{n(n+1)}$ であるのに対し

$$|f(P_n) - f(P_{n+1})| = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

であるから、ある定数 K を以って $|f(P_n) - f(P_{n+1})| \leq K |P_n - P_{n+1}|$ の形の不等式は成立し得ない。

問 3.10 微分方程式

$$y' = f(y) := \begin{cases} y^\alpha, & y \geq 0 \text{ のとき,} \\ 0, & y < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

を考える. この右辺の関数 $f(y)$ が一様 α -Hölder 連続なことをまず示そう. $y_2 > y_1 > 0$ のとき

$$0 \leq f(y_2) - f(y_1) = \alpha y_2^{\alpha-1} - \alpha y_1^{\alpha-1} \leq (y_2 - y_1)^\alpha$$

が成り立つ. 実際, $0 < \alpha < 1$ に対しては, $a, b \geq 0$ について

$$(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$$

という不等式が成り立つ. これは, b^α で両辺を割り, $t = \frac{a}{b}$ として

$$(x + 1)^\alpha \leq x^\alpha + 1$$

という不等式に帰着させれば, 微積分で証明できる. すると,

$$y_2^\alpha = (y_2 - y_1 + y_1)^\alpha \leq (y_2 - y_1)^\alpha + y_1^\alpha$$

から上記不等式が出る. 次に, $y_2 > 0 \leq y_1$ のときは

$$0 \leq f(y_2) - f(y_1) = f(y_2) = y_2^\alpha = (y_2 - y_1)^\alpha$$

はほぼ自明である. さて, $y' = f(y)$ の一般解は $\frac{dy}{y^\alpha} = dx$, $\frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha} = x - C$. よって

$$y = \{(1-\alpha)(x-C)\}^{1/(1-\alpha)}$$

となるが, $1/(1-\alpha) > 1$ より, この関数は $x = C$ において微分係数 0 を持つ. 従って, x 軸上でこれらと定数関数 $y = 0$ を自由に繋ぐことができるので, 初期値 0 から出発する解は無限に存在する. 本文では $\alpha = \frac{1}{2}$ の例を与えたのである.

問 3.11 上と同様にして反復代入により

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq C + K \int_x^a dt \left\{ C + K \int_t^a \varphi(t_1) dt_1 \right\} \\ &= C + CK(a-x) + K^2 \int_x^a dt \int_t^a \varphi(t_1) dt_1 \\ &\leq C + CK(a-x) + C \frac{K^2(a-x)^2}{2!} + \dots + C \frac{K^n(a-x)^n}{n!} \\ &\quad + \int_a^x dt \int_t^a dt_1 \int_{t_1}^a dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^a \varphi(t_n) dt_n \end{aligned}$$

この剰余項は Gronwall の定理の証明中の評価と同様にして $|\varphi(x)| \leq M$ で置き換えて積分することにより $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づくことが示せる.

問 3.12 記号を簡単にするため, 少し一般化して, $g(x; \lambda)$ は $x \in D$, $\lambda \in \Lambda$ で連続で, D は \mathbf{R}^N の有界閉集合とする. このとき $G(\lambda) = \max_{x \in D} g(x; \lambda)$ が λ の連続関数となることを言えばよい. $\mu \in \Lambda$ と $y \in D$ を固定し, $\forall \varepsilon > 0$ に対し, g の連続性から $\delta_y > 0$ を適当に選べば, $x \in D$, $\lambda \in \Lambda$ が $|x - y| < \delta_y$, $|\lambda - \mu| < \delta_y$ を満たすとき $|g(x; \lambda) - g(y; \mu)| < \varepsilon$ とできる. 今, y の $\frac{\delta_y}{2}$ -近傍 V_y は $y \in D$ を動かすとき D の開被覆を成すが, D が有界閉集合なので, Heine-Borel の被覆定理により, このうちの有限個 V_{y_1}, \dots, V_{y_k} で D が覆える. す

ると $\delta = \min\{\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_k}\}$ と取れば, $x, y \in D$ が $|x - y| < \frac{\delta}{2}$ を満たす限り, それらが D のどこに有っても $|\lambda - \mu| < \delta$ なら $|g(x; \lambda) - g(y; \mu)| < 2\varepsilon$ となる. 実際, y は V_{y_1}, \dots, V_{y_k} のどれか, 例えば V_{y_1} に属し, すると

$$|x - y_1| \leq |x - y| + |y - y_1| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta_{y_1}}{2} \leq \delta_{y_1}$$

となるので,

$$|g(x; \lambda) - g(y; \mu)| \leq |g(x; \lambda) - g(y_1; \mu)| + |g(y; \mu) - g(y_1; \mu)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

さて, $g(x; \mu)$ の $x \in D$ での最大値が $x = x_\mu \in D$ で取られるとすると, $|x - x_\mu| < \delta, |\lambda - \mu| < \delta$ のとき, $|g(x; \lambda) - g(x_\mu; \mu)| < 2\varepsilon$ から三角不等式により

$$g(x; \lambda) > g(x_\mu; \mu) - 2\varepsilon$$

よって

$$G(\lambda) = \max_{x \in D} g(x; \lambda) > g(x_\mu; \mu) - 2\varepsilon = \max_{x \in D} g(x; \mu) - 2\varepsilon = G(\mu) - 2\varepsilon$$

逆に, $\forall x \in D$ に対し $|\lambda - \mu| < \delta$ なら $|g(x; \lambda) - g(x; \mu)| < 2\varepsilon$ から三角不等式により

$$g(x; \lambda) < g(x; \mu) + 2\varepsilon \leq \max_{x \in D} g(x; \mu) + 2\varepsilon$$

よって

$$G(\lambda) = \max_{x \in D} g(x; \lambda) < \max_{x \in D} g(x; \mu) + 2\varepsilon = G(\mu) + 2\varepsilon$$

この二つの不等式から

$$|G(\lambda) - G(\mu)| = \left| \max_{x \in D} g(x; \lambda) - \max_{x \in D} g(x; \mu) \right| < 2\varepsilon$$

が得られる. これは $G(\lambda) = \max_{x \in D} g(x; \lambda)$ が λ の連続関数であることを示している.

第4章

問 4.1 $y'' + ay' + by = f(x)$ を考える. (a, b は x の関数でよい.) これを $y_1 = y, y_2 = y'$ で1階連立化すると

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -ay_2 - by_1 + f(x) \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

となる. これに対する定数変化法は, この連立方程式の解の基本系を ${}^t\varphi_1, \varphi_2, {}^t\psi_1, \psi_2$ とするとき,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

で, 定数ベクトル ${}^t(c_1, c_2)$ を関数と思って微分した

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \varphi_1' & \psi_1' \\ \varphi_2' & \psi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}$$

これより,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

で c_1', c_2' を決めるのであった. この式の成分を書けば,

$$\begin{cases} c_1'\varphi_1 + c_2'\psi_1 = 0, \\ c_1'\varphi_2 + c_2'\psi_2 = f(x) \end{cases}$$

となるが、ここで1階連立化された斉次方程式より $\varphi'_1 = \varphi_2, \psi'_1 = \psi_2$, また φ_1, ψ_1 は元の2階斉次方程式の1次独立な解であることが分かるので、上の2行目の方程式は $c'_1\varphi'_1 + c'_2\psi'_1 = f(x)$ と書き直され、確かに2階線形微分方程式に対する定数変化法の置き方が自然に出てくることが分かる。

問 4.2 (1) は自明. (2) は $|\lambda|$ が $\sqrt{\quad}$ の外に括り出せることから容易に分かる. (3) は n 次元の Euclid ノルムの話

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

において次元 n を n^2 に変えただけである.

問 4.3 (1) $e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \\ -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix}$ [問題 6.1.1(1)]

(2) $e^{tA} = \begin{pmatrix} 7e^t - 6e^{2t} & 3e^t - 3e^{2t} & -4e^t + 4e^{2t} \\ -6e^t + 6e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} & 4e^t - 4e^{2t} \\ 6e^t - 6e^{2t} & 3e^t - 3e^{2t} & -3e^t + 4e^{2t} \end{pmatrix}$ [問題 6.1.1(2)]

(3) $e^{tA} = \begin{pmatrix} -(t-1)e^{2t} & -(t-2)e^{2t} - 2e^t & -(t-3)e^{2t} - 3e^t \\ 3te^{2t} & 3(t-1)e^{2*2t} + 4e^t & (3t-6)e^{2*2t} + 6e^t \\ -2te^{2*2t} & -2(t-1)e^{2t} - 2e^t & -2(t-2)e^{2t} - 3e^t \end{pmatrix}$ [問題 6.1.1(3)]

(4) $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & -te^t & -te^t \\ 0 & (6t+1)e^t & 6te^t \\ 0 & -6te^t & -(6t-1)e^t \end{pmatrix}$ [問題 6.1.1(5)]

(5) $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & te^t & -4te^t \\ 0 & (4t+1)e^t & -4te^t & 0 \\ 0 & 4te^t & -(4t-1)e^t & 0 \\ 0 & te^t & -te^t & e^t \end{pmatrix}$. [問題 6.1.1(4)]

(6) $e^{tA} = \begin{pmatrix} -(\frac{7}{2}t^2 + 3t - 1)e^t & (\frac{1}{2}t^2 + t)e^t & (\frac{3}{2}t^2 + 2t)e^t \\ (\frac{35}{2}t^2 - 6t)e^t & -(\frac{5}{2}t^2 + 2t - 1)e^t & -(\frac{15}{2}t^2 - t)e^t \\ -(14t^2 + 5t)e^t & (2t^2 + 3t)e^t & (6t^2 + 4t + 1)e^t \end{pmatrix}$ [例題 6.1(1)]

問 4.4 第2章8節の定理 2.1 によれば、 μ が m 重根のときは必ず $x^{m-1}e^{\mu x}$ という解が現れる。これは1階化したとき、 μ に対する Jordan ブロックがサイズ m でないと不可能である。よって各固有値に対する Jordan ブロックはすべて1個で最大サイズとなる。

問 4.5 いずれも、 $S^{-1}AS = \Lambda$ と Jordan 標準形にし、 $Se^{xA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ を計算すればよい。以下答と略解だけ示すが、参考までに消去法等他の方法で解いた演習書の問題番号を記した。

(1) 係数行列は $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 固有多項式は $\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4$, 固有値は $2, -1, -2$. 固有ベクトル

で変換行列 $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ を作ると、 $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ であり、 $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. よって

$e^{xA} = S \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 8 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} S^{-1}$ となるはずであるが、一般解を計算するだけなら S^{-1} の計算は不要で、

$S \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 8 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ で求まる。すなわち、 $y_1 = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x}$, $y_2 = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - c_3e^{-2x}$,

$y_3 = c_1e^{2x} - c_2e^{-x}$. [問題 6.2.1 (9)]

(2) 係数行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 固有多項式は $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$, 固有値は $1, \pm i$. 複素変換行列は $S =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -i & 1 & +i \\ 1 & -i & i & & \\ 1 & 1 & & & \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1+i}{4} & \frac{-1+i}{4} & \frac{1-i}{4} \\ \frac{1-i}{4} & \frac{-1+i}{4} & \frac{1+i}{4} \end{pmatrix}$; $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$. よって複素数に係数拡大したときの一般

解は $S \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ で求まる. これから実の一般解を導くのはかえって面倒なので, 正直に e^{xA} を計

算すると $S \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & \sin x \\ \frac{1}{2}(-e^x + \cos x + \sin x) & \frac{1}{2}(e^x + \cos x - \sin x) & \frac{1}{2}(e^x - \cos x + \sin x) \\ \frac{1}{2}(-e^x + \cos x - \sin x) & \frac{1}{2}(e^x - \cos x - \sin x) & \frac{1}{2}(e^x + \cos x + \sin x) \end{pmatrix}$ 従つ

て一般解はこの行列に実定数ベクトル $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ を掛けて順に行を取り出せば $y_1 = c_1 \cos x - c_2 \sin x + c_3 \sin x$,

$y_2 = \frac{c_1}{2}(-e^x + \cos x + \sin x) + \frac{c_2}{2}(e^x + \cos x - \sin x) + \frac{c_3}{2}(e^x - \cos x + \sin x)$, $y_3 = \frac{c_1}{2}(-e^x + \cos x - \sin x) + \frac{c_2}{2}(e^x - \cos x - \sin x) + \frac{c_3}{2}(e^x + \cos x + \sin x)$. 一般解としては, 任意定数を一斉に 2 倍すれば分数を無くせるが, 次問での利用を考えてこのままにする.[問題 6.2.1 (5)]

(3) 係数行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, 固有多項式は $\lambda^3 - 3\lambda - 2$, 固有値は -1 (重根), 2 . -1 の方は固有ベクトルが 1

本しか求まらないので, Jordan ブロックのサイズは 2 である. 固有ベクトルと一般固有ベクトルを用いて変換

行列を作ると $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ で $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるはず. しかし実際には

S^{-1} は計算せず, 一般解は $S \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ で求まる. すなわち, $y_1 = c_1 e^{-x} + c_2(x+1)e^{-x} + c_3 e^{2x}$,

$y_2 = -c_1 e^{-x} - c_2 x e^{-x} + 2c_3 e^{2x}$, $y_3 = 3c_1 e^{-x} + c_2(3x+1)e^{-x} + 6c_3 e^{2x}$. [問題 6.2.1 (6)]

問 4.6 (1) S^{-1} の要素が分数になるので e^{xA} を計算するのは避けて, 前問で求めた一般解に初期条件を適用して任意定数を決めることにする. $y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$, $y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - c_3 e^{-2x}$, $y_3 = c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$ から

$$2 = c_1 + c_2 + c_3 \dots \textcircled{1}, 0 = c_1 + c_2 - c_3 \dots \textcircled{2}, -1 = c_1 - c_2 \dots \textcircled{3}.$$

①-② から $c_3 = 1$, よって $c_1 + c_2 = 1$. これと ③ から $c_1 = 0, c_2 = 1$.

よって求める解は

$$y_1 = e^{-x} + e^{-2x}, y_2 = e^{-x} - e^{-2x}, y_3 = -e^{-x}.$$

(2) 前問で e^{xA} が計算されているので, 前問の一般解は初期値が $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ の解となっている. よってここで $c_1 = 2$,

$c_2 = 0, c_3 = -1$ と置くだけで求める解

$$y_1 = 2 \cos x - \sin x,$$

$$y_2 = (-e^x + \cos x + \sin x) - \frac{1}{2}(e^x - \cos x + \sin x) = -\frac{3}{2}e^x + \frac{3}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x,$$

$$y_3 = (-e^x + \cos x - \sin x) - \frac{1}{2}(e^x + \cos x + \sin x) = -\frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{2} \sin x$$

を得る.

(3) 前問で求めた一般解に初期条件を適用して

$$2 = c_1 + c_2 + c_3 \dots \textcircled{1}, 0 = -c_1 + 2c_3 \dots \textcircled{2}, -1 = 3c_1 + c_2 + 6c_3 \dots \textcircled{3}$$

③-① から $-3 = 2c_1 + 5c_3$. これと ② から $c_3 = -\frac{1}{3}, c_1 = -\frac{2}{3}$. よって①から $c_2 = 3$. 故に解は

$$y_1 = (3x + \frac{7}{3})e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}, y_2 = -(3x - \frac{2}{3})e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x}, y_3 = (9x + 1)e^{-x} - 2e^{2x}.$$

問 4.7 $\left(\begin{array}{ccc|c} D & 1 & -1 & 2 \\ 0 & D & -1 & 0 \\ 1 & 0 & D-1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(1,1)成分で掃き出し}} \left(\begin{array}{ccc|c} D & 1 & -1 & 2 \\ 0 & D & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{D} & D-1+\frac{1}{D} & -1-\frac{2}{D} \end{array} \right)$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{\substack{(2,2) \text{成分で掃き出し} \\ \text{第1行は } D \text{ で割る}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{D} & -\frac{1}{D} & \frac{2}{D} \\ 0 & D & -1 & 0 \\ 0 & 0 & D-1 + \frac{1}{D} - \frac{1}{D^2} & -1 - \frac{2}{D} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{D} & -\frac{1}{D} & \frac{2}{D} \\ 0 & D & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D^3-D^2+D-1}{D^2} & -\frac{D+2}{D} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\substack{\text{第2行を } D \text{ で, 第3行} \\ \text{を } \frac{D^3-D^2+D-1}{D^2} \text{ で割る}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{D} & -\frac{1}{D} & \frac{2}{D} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{D(D+2)}{D^3-D^2+D-1} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{第3行} \times \frac{1}{D} \text{ を} \\ \text{第1,2行に加える}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{D} & 0 & \frac{2}{D} - \frac{D+2}{D^3-D^2+D-1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{D+2}{D^3-D^2+D-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{D(D+2)}{D^3-D^2+D-1} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\substack{\text{第2行} \times \frac{1}{D} \text{ を} \\ \text{第1行から引く}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{D} - \frac{D+2}{D^3-D^2+D-1} + \frac{D+2}{D(D^3-D^2+D-1)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{D+2}{D^3-D^2+D-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{D(D+2)}{D^3-D^2+D-1} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

ここで第1成分は

$$\frac{2}{D} - \frac{D+2}{D^3-D^2+D-1} + \frac{D+2}{D(D^3-D^2+D-1)} = \frac{2}{D} - \frac{(D+2)(D-1)}{D(D^3-D^2+D-1)} = \frac{2}{D} - \frac{D+2}{D(D^2+1)} = \frac{2D-1}{D^2+1}$$

だから、教科書の計算が確認された。

問 4.8

(1) $\begin{pmatrix} D+1 & -1 & -1 \\ -1 & D+1 & -1 \\ -1 & -1 & D-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を解く. 拡大係数行列の行基本変形で

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} D+1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & D+1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & D-1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1 \text{行目から} \\ 2 \text{行目を引く}}} \left(\begin{array}{ccc|c} D+2 & -(D+2) & 0 & 2 \\ -1 & D+1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & D-1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1 \text{行目を} \\ D+2 \text{ で割る}}} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{D+2} \\ -1 & D+1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & D-1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1 \text{行目で} \\ \text{掃き出し}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{D+2} \\ 0 & D & -1 & \frac{2}{D+2} \\ 0 & -2 & D-1 & \frac{2}{D+2} - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3 \text{行目を} \\ 2 \text{行目に足す}}} \\
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{D+2} \\ 0 & D-2 & D-2 & \frac{2}{D+2} - 1 \\ 0 & -2 & D-1 & \frac{2}{D+2} - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2 \text{行目を} \\ D-2 \text{ で割る}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{D+2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{(D+2)(D-2)} - \frac{1}{D-2} \\ 0 & -2 & D-1 & \frac{2}{D+2} - 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{D+2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{D+2} \\ 0 & -2 & D-1 & \frac{2}{D+2} - 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\substack{2 \text{行目で} \\ \text{掃き出し}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{D+2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{D+2} \\ 0 & 0 & D+1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3 \text{行目を} \\ D+1 \text{ で割る}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{D+2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{D+2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{D+1} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3 \text{行目で} \\ \text{掃き出し}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{D+2} + \frac{1}{D+1} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{D+2} + \frac{1}{D+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{D+1} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

これを普通の関数に翻訳すると $y_1 = e^{-2x} + e^{-x}$, $y_2 = -e^{-2x} + e^{-x}$, $y_3 = -e^{-x}$.

(3) $\begin{pmatrix} D & -1 & 0 \\ 2 & D & -1 \\ -2 & -5 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を解く. 拡大係数行列の行基本変形で

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} D & -1 & 0 & 2 \\ 2 & D & -1 & 0 \\ -2 & -5 & D & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2 \text{行目で} \\ \text{掃き出し}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{D^2+2}{2} & \frac{D}{2} & 2 \\ 2 & D & -1 & 0 \\ 0 & D-5 & D-1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{定数因子} \\ \text{を調節}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -(D^2+2) & D & 4 \\ 1 & \frac{D}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & D-5 & D-1 & -1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\substack{\text{第1行の} \frac{D-1}{2} \text{ 倍} \\ \text{を第3行から引く}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -(D^2+2) & D & 4 \\ 1 & \frac{D}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(D^2+2)(D-1)+D(D-5)}{D} & 0 & -\frac{5D-4}{D} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -(D^2+2) & D & 4 \\ 1 & \frac{D}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{D^3-3D-2}{D} & 0 & -\frac{5D-4}{D} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\substack{\text{第3行を正規化し} \\ \text{第1行を最下に}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{D}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5D-4}{D^3-3D-2} \\ 0 & -(D^2+2) & D & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{第2行で} \\ \text{掃き出し}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{D(5D-4)}{2(D^3-3D-2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5D-4}{D^3-3D-2} \\ 0 & 0 & D & \frac{4(D^3-3D-2)-(D^2+2)(5D-4)}{D^3-3D-2} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\substack{\text{第2行を計算し} \\ \text{第3行を } D \text{ で割る}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{D(5D-4)}{2(D^3-3D-2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5D-4}{D^3-3D-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{D^2-4D+22}{D^3-3D-2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{第3行で} \\ \text{掃き出し}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{(5D^2-4D)-(D^2-4D+22)}{2(D^3-3D-2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5D-4}{D^3-3D-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{D^2-4D+22}{D^3-3D-2} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

ここで、 $D^3 - 3D - 2 = (D + 1)^2(D - 2)$ なので、計算を遂行して部分分数分解すると

$$z_1 = \frac{4D^2 - 22}{2(D + 1)^2(D - 2)} = \frac{2D^2 - 11}{(D + 1)^2(D - 2)} = \frac{3}{(D + 1)^2} + \frac{7}{3(D + 1)} - \frac{1}{3(D - 2)} \longleftrightarrow 3xe^{-x} + \frac{7}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x},$$

$$z_2 = -\frac{5D - 4}{(D + 1)^2(D - 2)} = -\frac{3}{(D + 1)^2} + \frac{2}{3(D + 1)} - \frac{2}{3(D - 2)} \longleftrightarrow -3xe^{-x} + \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x},$$

$$z_3 = -\frac{D^2 - 4D + 22}{(D + 1)^2(D - 2)} = \frac{9}{(D + 1)^2} + \frac{1}{D + 1} - \frac{2}{D - 2} \longleftrightarrow 9xe^{-x} + e^{-x} - 2e^{2x}.$$

これは問 4.6 (3) の答と一致している。

問 4.9 (2) $y_1 = c_2 \cos x + c_3 \sin x$, $y_2 = \frac{1}{2}\{-c_1 e^x + c_2(\sin x + \cos x) + c_3(\sin x - \cos x)\}$, $y_3 = \frac{1}{2}\{-c_1 e^x + c_2(-\sin x + \cos x) + c_3(\sin x + \cos x)\}$. これから係数行列の Jordan 標準形 $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, 実の標準形は

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ が見てとれる. [問題 6.2.1 (5)]

$$(3) y_2 = -c_1 \frac{x}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}. y_1 = c_1 \left(\frac{x+1}{3} e^{-x} + \frac{1}{3} c_2 e^{2x} - c_3 e^{-x} \right). y_3 = c_1 \left(x + \frac{1}{3} \right) e^{-x} + 2c_2 e^{2x} - 3c_3 e^{-x}.$$

これから係数行列の Jordan 標準形 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ が見てとれる. [問題 6.2.1 (6)]

問 4.10 (1) 一般解 $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} + c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ に境界条件を代入して, $y(0) = -\frac{2}{9} + c_1 + c_2 = 0$,

$$y(1) = -\frac{5}{9} + c_1 e + c_2 e^{-3} = 0. \text{ よつて } (e - e^{-3})c_1 = \frac{5}{9} - \frac{2}{9e^3} \text{ となり, } c_1 = \frac{\frac{5}{9} - \frac{2}{9e^3}}{e - \frac{1}{e^3}}, c_2 = \frac{\frac{2e}{9} - \frac{5}{9}}{e - \frac{1}{e^3}}, \text{ よつて解は}$$

$$y = -\frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{e - \frac{1}{e^3}} \left\{ \left(\frac{2e}{9} - \frac{5}{9} \right) e^{-3x} + \left(-\frac{2}{9e^3} + \frac{5}{9} \right) e^x \right\}.$$

(2) 一般解 $y = -\frac{1}{2} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$, よつて $y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$. これに境界条件を代入して, $y'(0) = 2c_1 - c_2 = 0$, $y'(1) = 2c_1 e^2 - c_2 e^{-1} = 0$. 一つ目から $c_2 = 2c_1$. これを二つ目に代入して $2c_1(e^2 - 2e^{-1}) = 0$. よつて $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. 故に解は $y = -\frac{1}{2}$

(3) 一般解は $y = -\frac{1}{3} \cos 2x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$. これに境界条件を代入して, $y(0) = -\frac{1}{3} + c_1 = 0$. よつて $c_1 = \frac{1}{3}$. $y(\pi) = -\frac{1}{3} - c_1$. よつて $c_1 = -\frac{1}{3}$. これは矛盾であるから, 解は存在しない.

(4) 一般解は $y = \frac{1}{2} \cos x + c_1 e^x + c_2 x e^x$. よつて $y' = -\frac{1}{2} \sin x + c_1 e^x + c_2(x+1)e^x$. これに境界条件を代入して, $y(0) = \frac{1}{2} + c_1 = y(\pi) = -\frac{1}{2} + c_1 e^\pi + c_2 \pi e^\pi$. 変形して $(e^\pi - 1)c_1 + \pi e^\pi c_2 = 1$. また $y'(0) = c_1 + c_2 = y'(\pi) = c_1 e^\pi + c_2(\pi+1)e^\pi$. 変形して $(e^\pi - 1)c_1 + \{(\pi+1)e^\pi - 1\}c_2 = 0$. 引き算すると $(\pi - 1)c_2 = -1$, $c_2 = -\frac{1}{e^\pi - 1}$. よつて二つ目から $c_1 = \frac{(\pi+1)e^\pi - 1}{(e^\pi - 1)^2}$. 故に答は $y = \frac{1}{2} \cos x + \frac{(\pi+1)e^\pi - 1}{(e^\pi - 1)^2} e^x - \frac{1}{e^\pi - 1} x e^x$.

(5) 一般解は $y = -x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. よつて $y' = -1 + c_1 e^x - c_2 e^{-x}$. これらに境界条件を代入して, $y(-1) = 1 + c_1 e^{-1} + c_2 e = 0$, $y'(1) = -1 + c_1 e - c_2 e^{-1} = 0$. 両者を加えて $c_1(e + e^{-1}) + c_2(e - e^{-1}) = 0$. $c_2 = -\frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}} c_1$. これを一つ目に代入して $\left(e^{-1} - \frac{e + e^{-1}}{e - e^{-1}} \right) c_1 = -1$. よつて $c_1 = \frac{e - e^{-1}}{e^2 + e^{-2}}$. よつて $c_2 = -\frac{e + e^{-1}}{e^2 + e^{-2}}$. 故に解は

$$y = -x + \frac{e - e^{-1}}{e^2 + e^{-2}} e^x - \frac{e + e^{-1}}{e^2 + e^{-2}} e^{-x}.$$

(6) 一般解は $y = e^{2x} + c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x$. これに境界条件を代入して, $y(-\pi) = e^{-2\pi} - c_1 e^{-2\pi} = 0$, $y(\pi) = e^{2\pi} - c_1 e^{2\pi} = 0$. これらはともに $c_1 = 1$ となるので, 解は $y = e^{2x}(1 + \cos x + c \sin x)$ で 1 次元の不定性を持つ.

問 4.11 (1) 固有値は $\lambda = -n^2 \pi^2 - 4$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 対応する固有関数は $y = e^{-x} \sin n\pi x$ [問 5.5.1 (1)]

(2) 固有値 $\lambda = -\frac{9}{4} - n^2 \pi^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対応する固有関数 $y = e^{x/2}(2n\pi \cos n\pi x - \sin n\pi x)$, 固有値 -2 に対応する固有関数 $y = 1$ は上記の系列外となる. [問 5.5.1 (2)]

(3) 固有値 $1 - n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \dots$. 固有関数 $\sin n\pi x$. [方程式 $y'' + y = \lambda y$ を $-y'' = (1 - \lambda)y$ と変形すれば, 例題 4.4 (1) に帰着する]

(4) 固有値 $\lambda = 1 - 4n^2 - 4ni$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (虚数), 対応する固有関数 $y = e^{2nix}$. (固有値が虚数なので, 固有関数は実数では取れない.) [問 5.5.1 (9)]

(5) 固有値 $\lambda = -1 - \frac{(2n+1)^2\pi^2}{16}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 固有関数 $\sin \frac{2n+1}{4}\pi(x+1)$ [問 5.5.1 (6)]

(6) 固有値 $\lambda = 1 - \frac{n^2}{4}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 固有関数 $y = e^{2x} \sin \frac{n\pi}{2}(x + \pi)$ [問 5.5.1 (7)]

問 4.12 区間 $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi < t < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n = 1, 2, \dots$ における $\cosh t \cos t = 1$ の解を t_{2n-1}, t_{2n} , $n = 1, 2, \dots$ と置けば, 固有値は

$$\lambda_n = \frac{t_n^4}{a^4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

これに対応する固有関数は,

$$y = \sin t_n e^{t_n x/a} + (\cos t_n - e^{t_n}) e^{-t_n x/a} + (\cos t_n - \sin t_n - e^{t_n}) \sin \frac{t_n x}{a} - (\cos t_n + \sin t_n - e^{t_n}) \cos \frac{t_n x}{a}$$

[例題 5.8-2]

問 4.13 ヒントに従い, まず両辺を $r(x)$ で割ると

$$-\frac{1}{r(x)} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + \frac{q(x)}{r(x)} y = \lambda y$$

ここで, $r(x)$ の原始関数 $R(x)$ を一つ選ぶ. 仮定 $r(x) > 0$ より $R(x)$ は狭義単調増加なので, $X = R(x)$ は独立変数の C^1 級の変換となり, 逆変換 $x = R^{-1}(X)$ も C^1 級で存在する. これに応じて考える区間は $[R(a), R(b)]$ に変換される. また $\frac{p(R^{-1}(X))}{r(R^{-1}(X))}$ を新しい係数 p , $\frac{q(R^{-1}(X))}{r(R^{-1}(X))}$ を新しい係数 q とみなす. 区別のためこれも対応する大文字で書き直し, 未知関数を $Y(X) = y(R^{-1}(X))$ に変換すると, 上は

$$-\frac{d}{dX} \left(P(X) \frac{dY}{dX} \right) + Q(X) Y = \lambda Y$$

となる. $P(X) > 0$ なので, これは求める変換となる.

ここで $p(x)$ を C^1 級としていると, 新しい $P(X)$ も C^1 級となるためには $r(x)$ も C^1 級である必要があるが, 実は  で解説したように, Sturm-Liouville の固有値問題を議論するには $p(x)$ は連続なだけで十分であり, その仮定なら $r(x)$ も連続なだけでよい.

問 4.14 固有値 λ に対応する固有関数を $\varphi(x)$ とするとき, 部分積分で

$$(L\varphi, \varphi) = \left(-\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} \varphi, \varphi \right) = \left(p(x) \frac{d}{dx} \varphi, \frac{d}{dx} \varphi \right)$$

ここで仮定より $p(x)$ は $[a, b]$ で正値だから $p(x) \geq M > 0$ なる定数 M が存在する. よって

$$(L\varphi, \varphi) \geq M \|\varphi'\|^2.$$

他方この左辺は

$$(\lambda r\varphi, \varphi) = \lambda (r\varphi, \varphi)$$

に等しいが, $r(x)$ も仮定により $[a, b]$ で正値だから, $(r\varphi, \varphi) = \int_a^b r(x) \varphi(x)^2 dx$ は正である. よって

$$\lambda \geq \frac{M \|\varphi'\|^2}{(r\varphi, \varphi)} > 0$$

問 4.15 L の固有値を λ_n , 対応する固有関数を $\varphi_n(x)$ とする. $\lambda = \lambda_k$ が L の第 k 固有値のとき, $Lu = \lambda u + f$ を解くのに, $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$ と展開しておき, 解を $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi_n(x)$ の形で求めようとすると, 方程式に代入して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_k u_n \varphi_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$$

係数を比較して, $n \neq k$ なら

$$u_n = \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda_k}$$

と一意に求まるが, $n = k$ のときは

$$0 = f_k$$

となる. これは解が存在するための必要条件であり, $f_k = (f, \varphi_k)$ であった. よって条件が必要であることがわかった. 逆にこの条件が満たされれば, u_k は不定であるが他の係数が上の式から定まり, 一意ではないが解は得られる. よってこの条件は, 解が存在するためには十分でもある.

第 5 章

問 5.1 (1) $y = -x - 1 + c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ [問題 7.1.1 (1)]

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} + c_0 e^{x^2/2}$ [例題 7.1]

(3) $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n!}$ [問題 7.1.1 (2)]

(4) $-1 + c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ [問題 7.1.1 (3)]

(5) $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n! 2^n} + \frac{2^n - 1}{n! 2^n} x^{2n}$ [問題 7.1.1 (5)]

問 5.2 (1) 漸化式は $nc_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k-1} c_k$ ($n \geq 1$). 定数項 c_0 は任意で, 一般解は $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_0^{n+1} x^n = \frac{c_0}{1 - c_0 x}$ [問題 7.2.1 (1)]

(2) c_0 は任意, $c_1 = c_0^2 - 1$, c_2 以下の漸化式は (1) と同じになり, $c_2 = \frac{1}{2} \cdot 2c_0 c_1 = c_0^3 - c_0$, $c_3 = \frac{1}{3} (2c_0 c_2 + c_1^2) = \frac{1}{3} \{2c_0(c_0^3 - c_0) + (c_0^2 - 1)^2\} = c_0^4 - \frac{4}{3}c_0^2 + \frac{1}{3}$, $c_4 = \frac{1}{4} (2c_0 c_3 + 2c_1 c_2) = \frac{1}{4} \{2c_0(c_0^4 - \frac{4}{3}c_0^2 + \frac{1}{3}) + 2(c_0^2 - 1)(c_0^3 - c_0)\} = c_0^5 - \frac{5}{3}c_0^3 + \frac{2}{3}c_0$, $c_5 = \frac{1}{5} (2c_0 c_4 + 2c_1 c_3 + c_2^2) = \frac{1}{5} \{2c_0(c_0^5 - \frac{5}{3}c_0^3 + \frac{2}{3}c_0) + 2(c_0^2 - 1)(c_0^4 - \frac{4}{3}c_0^2 + \frac{1}{3}) + (c_0^3 - c_0)^2\} = c_0^6 - 2c_0^4 + \frac{17}{15}c_0^2 - \frac{2}{15}$. [問題 7.2.1 (2)]

(3) c_0 は任意で, $c_1 = -c_0^2$, $c_2 = c_0^3 + \frac{1}{2}$, 以後は規則的で, 漸化式 $nc_n = -\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k-1} c_k$ ($n \geq 3$) となり, $c_3 = -\frac{1}{3} (2 \cdot c_0 \cdot (c_0^3 + \frac{1}{2}) + c_0^4) = -c_0^4 - \frac{1}{3}c_0$, $c_4 = -\frac{1}{4} \{2 \cdot c_0(-c_0^4 - \frac{1}{3}c_0) + 2(-c_0^2)(c_0^3 + \frac{1}{2})\} = c_0^5 + \frac{5}{12}c_0^2$, $c_5 = -\frac{1}{5} \{2 \cdot c_0(c_0^5 + \frac{5}{12}c_0^2) + 2 \cdot (c_0^4 + \frac{1}{3}c_0)c_0^2 + (c_0^3 + \frac{1}{2})^2\}$. [例題 7.2]

(4) c_0 は任意で, $c_1 = c_0^2$, $c_2 = \frac{1}{2} (c_0 c_1 + c_1 c_0) = c_0 c_1 = c_0^3$, $c_3 = \frac{1}{3} \{1 + (c_0 c_2 + c_1^2 + c_2 c_0)\} = \frac{1}{3} + c_0^4$. ここから先は規則的で, 漸化式は $(n+1)c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \dots + c_{n-1} c_0$. これより $c_4 = \frac{1}{4} (2c_0 c_3 + 2c_1 c_2) = \frac{1}{2} (\frac{1}{3}c_0 + c_0^5 + c_0^5) = \frac{1}{6}c_0 + c_0^5$, $c_5 = \frac{1}{5} (2c_0 c_4 + 2c_1 c_3 + c_2^2) = \frac{1}{5} (\frac{1}{3}c_0^2 + 2c_0^6 + \frac{2}{3}c_0^2 + 2c_0^6 + c_0^6) = \frac{5}{3}c_0^2 + 5c_0^6 = \frac{1}{5}c_0^2 + c_0^6$. [問題 7.2.1 (5)]

問 5.3 (1) $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \frac{1}{1-\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \omega^{2n+1} x^{2n+1}$ [問題 7.3.1 (1)]

(2) $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} - x$ [問題 7.3.1 (2)]

(3) $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n-1)!!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1}$ [問題 7.3.1 (3)]

問 5.4 一つ目の $y' = \frac{C}{(1-\frac{x}{R})(1-\frac{y}{R})}$ を求積法で解くと,

$$\int \left(1 - \frac{y}{R}\right) dy = \int \frac{C}{1 - \frac{x}{R}} dx, \quad y - \frac{y^2}{2R} = C \log \left(1 - \frac{x}{R}\right),$$

$$y^2 - 2Ry = -2RC \log \left(1 - \frac{x}{R}\right), \quad (y - R)^2 = R^2 - 2RC \log \left(1 - \frac{x}{R}\right)$$

$$\therefore y - R = \pm \sqrt{R^2 - 2RC \log \left(1 - \frac{x}{R}\right)}$$

函数論の知識を用いると, この右辺は, 原点を中心とする半径 R の円内で更に平方根の中身が零になるところまでは収束円に含まれるので,

$$\log \left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{R}{2C}, \quad \therefore r = R(e^{R/2C} - 1) \leq R$$

までは大丈夫である. 非線型方程式なので, この値は係数 C の大きさにも依存し, 一般には R より小さくなる. 函数論を使わなくても x が原点に十分近いとき, $y - R$ の右辺が R と C だけで決まる正の収束半径を持つことだけは一般 2 項級数と対数函数の Taylor 展開の収束半径の知識から容易に分かるであろう.

次に二つ目の $y' = \frac{C(1+y)}{1-\frac{x}{R}}$ を求積法で解くと,

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{C}{1-\frac{x}{R}} dx, \quad \log(1+y) = C \log \left(1 - \frac{x}{R}\right), \quad \therefore y = -1 + \left(1 - \frac{x}{R}\right)^C$$

函数論の知識を使うと, この右辺は $x < R$ で正則なので, 解の収束半径は少なくとも R 以上である. 函数論を使わなくても, 一般 2 項展開の収束半径が 1 であることを用いれば, 同じ結論が得られる. この場合は線型方程式なので, 解の収束半径は C に依存せず, 方程式の係数等の収束半径から減ることが無い.

問 5.5 前半は, (4.12) のすべての解が収束半径 $\rho > R$ 以上とすると, 差を取って斉次方程式のすべての解も収束半径 ρ 以上となる. 今 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ を斉次方程式の解の基底とすれば,

$$\begin{cases} \varphi_1^{(n)} + a_1 \varphi_1^{(n-1)} + \dots + a_n \varphi_1 = 0, \\ \dots, \\ \varphi_n^{(n)} + a_1 \varphi_n^{(n-1)} + \dots + a_n \varphi_n = 0 \end{cases}$$

であり, これから 係数 a_j を未知数として連立 1 次方程式を Cramér の公式で解くことにより

$$a_{n-j+1} = \frac{W_j}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)},$$

を得る. ここに, 分母は $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ の Wronski 行列式なので, 線形方程式の一般論により決して 0 にならない. また分子は, その第 j 列を $-\begin{pmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix}$ で置き換えた行列式である. この右辺の表現は明かに収束半径 $\geq \rho$

を持つ．最後に $f(x)$ については，上の方程式のどれか一つを $f(x)$ について解くことにより，やはり収束半径 $\geq \rho$ が分かる．これは仮定に反するので，少なくとも解の一つは収束半径 $\leq R$ である． $\geq R$ は定理 5.1 の証明 (および ) で示されているので，結局収束半径が R に等しい解が存在することになる．以上の証明では，収束半径に関する次の二つの事実を用いた：

- (1) $f(x), g(x)$ の収束半径が $\geq \rho$ なら，積 $f(x)g(x)$ のそれも $\geq \rho$ である．
- (2) $f(x)$ の収束半径が $\geq \rho$ で， $f(x)$ が複素数 x に対して $|x| < \rho$ で 0 にならなければ， $\frac{1}{f(x)}$ の収束半径も $\geq \rho$ である．

これらの性質は複素関数論を使えばほぼ自明であるが，実の世界だけで証明しようとすると結構大変である．関数論を未修の読者は信じて頂きたい．

後半は，二つ目を積分すると $y_2 = c_1$ ．これを一つ目に代入すると， $y_1' = \frac{1}{x-1}y_1 - \frac{c_1}{x-1}$ ．これは $\left(\frac{y_1}{x-1}\right)' = -\frac{c_1}{(x-1)^2}$ と変形され，積分して $\frac{y_1}{x-1} = \frac{c_1}{x-1} + c_2$ ，よって $y_1 = c_1 + c_2(x-1)$ ．これらはともに収束半径 $+\infty$ を持つが，方程式の係数 $\frac{1}{x-1}$ は明かに収束半径 1 なので，すべての解の収束半径が真に増大している．なお，単独方程式の場合は，例えば $y' + \frac{y}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ では，一般解は $y = 1 + \frac{c}{x-1}$ なので， $c = 0$ のときだけ収束半径は増大するが他のすべての解は係数と同じ収束半径を持つ．

問 5.6 [例題 7.4 その1]

問 5.7 $(a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1)$ という略記号を用いるとき， $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} x^n$ はいつでも有効な整級数解である．更に， c が整数でないときは， $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_n(b-c+1)_n}{(2-c)_n n!} x^{n+1-c}$ が解となる． c が整数のときは準備中．[例題 7.4 その1]

問 5.8 $y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n$ を形式的に項別微分すると， $y' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n n! x^{n-1}$ ，従って

$$x^2 y' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n n! x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)! x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! x^{n+1} = -y + 1 - x - (xy - x) = -(x+1)y + 1$$

すなわち， $x^2 y' + (x+1)y = 1$ を満たす．この方程式は定数変化法で求積できて，

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x+1}{x^2}, \quad \log y = -\log x + \frac{1}{x} + C, \quad y = \frac{c}{x} e^{1/x}.$$

これをもとの非斉次方程式に代入して

$$c' x e^{1/x} = 1, \quad \therefore c = \int \frac{e^{-1/x}}{x} dx + C$$

従って一般解は

$$y = \frac{e^{1/x}}{x} \left(\int_0^x \frac{e^{-1/x}}{x} dx + C \right)$$

となる．最初に与えられた級数は形式的に $x = 0$ で 1 となるので，それに合わせて定数を $C = 0$ にとると，

$$y = \frac{e^{1/x}}{x} \int_0^x \frac{e^{-1/x}}{x} dx.$$

この積分は

$$\int_0^x \frac{e^{-1/x}}{x} dx = \int_0^x x d(e^{-1/x}) = \left[x e^{-1/x} \right]_0^x - \int_0^x e^{-1/x} dx = x e^{-1/x} - \int_0^x x^2 d(e^{-1/x})$$

以下、この部分積分を続けると

$$= \{x - x^2 + 2x^3 - + \cdots + (-1)^n n! x^{n+1} e^{-1/x}\} - (-1)^n \int_0^x (n+1)! x^n e^{-1/x} dx$$

となる. これを上に入代入すると,

$$y = 1 - x + 2x^2 - + \cdots + (-1)^n n! x^n - (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x} \int_0^x (n+1)! x^n e^{-1/x} dx$$

この最後の項は、積分値が $(n+1)! x^{n+1} e^{-1/x}$ で上から評価されるので、

$$\leq (n+1)! x^n = O(x^n)$$

となる. 従って最初の級数は、真の解の $x \rightarrow +0$ での漸近展開となっている. (剰余項が $O(x^{n+1})$ になっても、 n が任意なので、これで漸近展開の証明にはなる.)

問 5.9 $\Phi(x)\Phi(x)^{-1} = I$ の両辺を微分すると

$$\Phi(x)' \Phi(x)^{-1} + \Phi(x) \{\Phi(x)^{-1}\}' = O$$

移行して左から $\Phi(x)^{-1}$ を掛けると

$$\{\Phi(x)^{-1}\}' = -\Phi(x)^{-1} \Phi(x)' \Phi(x)^{-1}.$$

問 5.10 [例題 7.6]

問 5.11 $h_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, $H_n(x) = h_n(x) e^{x^2}$ と置くとき、 H_n が n 次の多項式で、その最高階は x^n となることは明らかである. (厳密には数学的帰納法で証明すればよい.) また、定義から明らかに

$$h'_n(x) = -h_{n+1}(x) = -H_{n+1}(x) e^{-x^2} \tag{A5.1}$$

であるが、他方これは、 $h_n(x) = H_n(x) e^{-x^2}$ に対して微分を実行することにより

$$H'_n(x) e^{-x^2} - 2x H_n(x) e^{-x^2} \tag{A5.2}$$

となることも明らかである. これら二つからまず、

$$H_{n+1} = 2x H_n - H'_n \tag{A5.3}$$

という漸化式を得る. 他方、Leibniz の公式から

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} (-2x e^{-x^2}) \\ &= 2x (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + 2n (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} = 2x h_n(x) - 2n h_{n-1}(x) \end{aligned}$$

も得られる. これから

$$H_{n+1} = 2x H_n - 2n H_{n-1} \tag{A5.4}$$

という漸化式が得られ、二つを繋ぐと

$$H'_n = 2n H_{n-1} \tag{A5.5}$$

が得られる. これを反復させると

$$H_{n''} = 4n(n-1) H_{n-2} \tag{A5.6}$$

も得られる. また (A5.4) は

$$2xH_n = H_{n+1} + 2nH_{n-1} \quad (\text{A5.7})$$

のようにも使える. さて, (ここから指数の肩を $x^2/2$ に変えて)

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2/2} = \frac{d}{dx}(-xe^{-x^2/2}) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2} \quad (\text{A5.8})$$

に注意すると, Leibniz の公式, (A5.5), (A5.6), 次いで (A5.7) を一つずらしたものより

$$\begin{aligned} & (-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)(H_n(x)e^{-x^2/2}) \\ &= \{-H_n''(x) + 2xH_n'(x) - (x^2 - 1)H_n(x) + x^2H_n(x)\}e^{-x^2/2} \\ &= \{-4n(n-1)H_{n-2}(x) + 4nxH_{n-1}(x) + H_n(x)\}e^{-x^2/2} \\ &= \{-4n(n-1)H_{n-2}(x) + 2n(H_n + 2(n-1)H_{n-2}) + H_n(x)\}e^{-x^2/2} \\ &= (2n+1)H_n(x)\}e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

よって $\psi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$ は固有値 $2n+1$ に対応する固有函数であることが分かった. 正規化定数を計算すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)(H_n(x)e^{-x^2}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

ここで $H_n(x)$ の最高次は $2^n x^n$ であることが定義から容易に分かるので, 部分積分すると

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{d^n}{dx^n} H_n(x)) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2^n n! e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

よって $\psi_n(x)$ をこの平方根で割れば正規化固有函数が得られる. 直交性は対称作用素の一般論から自明である. 完全性は略す.

最後に, 前の方のいくつかを確認しておこう.

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, \\ H_1 &= -e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = 2x, \\ H_2 &= e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = 4x^2 - 2, \\ H_3 &= -e^{x^2} \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = 8x^3 - 12x \end{aligned}$$

よって (A5.6) に注意すると, $\frac{1}{2^n} H_n(x)e^{-x^2/2}$ に対して計算すれば

$$\begin{aligned} (-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)e^{-x^2/2} &= (-x^2 + 1 + x^2)e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}, \\ (-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)(xe^{-x^2/2}) &= (-(x^2 - 1)x + 2x + x^3)e^{-x^2/2} = 3xe^{-x^2/2}, \\ (-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)((x^2 - \frac{1}{2})e^{-x^2/2}) &= \{-(x^2 - 1)(x^2 - \frac{1}{2}) + 2 \cdot 2x \cdot x - 2 + x^2(x^2 - \frac{1}{2})\}e^{-x^2/2} \\ &= 5(x^2 - \frac{1}{2})e^{-x^2/2}, \\ (-\frac{d^2}{dx^2} + x^2)((x^3 - \frac{3}{2}x)e^{-x^2/2}) &= \{-(x^2 - 1)(x^3 - \frac{3}{2}x) + 2 \cdot (3x^2 - \frac{3}{2}) \cdot x - 6x + x^2(x^3 - \frac{3}{2}x)\}e^{-x^2/2} \\ &= 7(x^3 - \frac{3}{2}x)e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

となり，固有値は一般式と合致している．

第 6 章

問 6.1 解の延長定理により，解が \vec{y} 軸方向に爆発しなければ， x について大域的に存在する．定理の条件から， $y' = g(y)$ の解で $x = a$ での値が $|\vec{c}|$ となるものを $z = z(x)$ とするとき， $x \geq a$ において常に $|\vec{y}(x)| \leq z(x)$ が成り立つことを言えばよい．(厳密には， $g(y)$ が $y \geq 1$ でしか定義されていないので，最後に $|\vec{y}| \leq 1$ から飛び出したところから議論を始めるべきであるが，そこを $x = a$ であるとしても一般性を失わない．) 実際には解 $z(x)$ は用いず， $y' = g(y)$ を変数分離し積分して得られるその逆関数を用いて初等的な考察で逆側から比較する．これは比較定理に持ち込むと余分な仮定を必要とする恐れがあるからである．

仮定 $|\vec{f}(x, \vec{y})| \leq g(|\vec{y}|)$ により

$$\frac{d|\vec{y}|}{dx} \leq \left| \frac{d\vec{y}}{dx} \right| \leq |\vec{f}(x, \vec{y})| \leq g(|\vec{y}|)$$

この両辺を $g(|\vec{y}|)$ で割り算してから x について $x = a$ から積分すれば，

$$\int_a^x \frac{1}{g(|\vec{y}|)} \frac{d|\vec{y}|}{dx} dx \leq \int_a^x |\vec{f}(x, \vec{y}(x))| dx \leq x - a$$

この左辺の積分は，変数変換で

$$\int_{|\vec{c}|}^{|\vec{y}(x)|} \frac{1}{g(y)} dy$$

に帰着する．仮定によりこれは y につき $+\infty$ まで積分すると値が無限大に発散するので，このとき必然的に $x \rightarrow \infty$ でなければならない．すなわち， x が有限なところで $|\vec{y}|$ が無限大に発散することは有り得ない．

⊞ $g(y) = K|y|$ は Osgood の一意性定理と，本定理の両方の仮定を満たす．つまり Lipschitz 条件は実によくできているのである．

第 7 章

問 7.1 (6) 上方への逆向き爆発 出発点 (x_0, y_0) が $y_0 > 0$ を満たすとし，ここから x を減らしてゆくととき，有限のところまで $y \rightarrow +\infty$ となることを示す．実際，出発点を (x_0, y_0) とすれば，③ の領域にあるので， $x_0 - y_0^2 < 0$ ．そこから x の減少方向に進むので， y は増加し，従って， $y_0 \geq 0$ なら，解曲線上 $x \leq x_0$ ， $x_0 - y^2 \leq x_0 - y_0^2 < 0$ と仮定でき，

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2 \leq x_0 - y^2, \quad \therefore \frac{1}{y^2 - x_0} \frac{dy}{dx} \leq -1$$

これを x から x_0 まで積分すると，

$$\begin{aligned} x_0 > 0 \text{ なら, } & \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \left(\log \frac{y_0 - \sqrt{x_0}}{y_0 + \sqrt{x_0}} - \log \frac{y - \sqrt{x_0}}{y + \sqrt{x_0}} \right) \leq x - x_0 \\ x_0 = 0 \text{ なら, } & \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} \leq x - x_0, \\ x_0 < 0 \text{ なら, } & \frac{1}{\sqrt{-x_0}} \left(\text{Arctan} \frac{y_0}{\sqrt{-x_0}} - \text{Arctan} \frac{y}{\sqrt{-x_0}} \right) \leq x - x_0 \end{aligned}$$

この左辺は，いずれの場合も $y \rightarrow +\infty$ としたとき有限な値に収束する．よって x は $-\infty$ に行くことはできず，ある有限な値で $y \rightarrow \infty$ とならざるを得ない．具体的には，解は，それぞれの場合について

$$x \geq \begin{cases} x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \log \frac{y_0 + \sqrt{x_0}}{y_0 - \sqrt{x_0}}, & x_0 > 0 \text{ のとき,} \\ x_0 + \frac{1}{y_0}, & x_0 = 0 \text{ のとき,} \\ x_0 - \frac{1}{\sqrt{-x_0}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \frac{y_0}{\sqrt{-x_0}} \right), & x_0 < 0 \text{ のとき,} \end{cases}$$

のどこかで $+\infty$ に爆発する.

問 7.2 以下問に書かれた汎用的な表現で論ずる. 教科書で使うときは, a に 1, K に 2 を, また $\varphi(x)$ に $\varphi(x) - \psi(x)$ を代入すればよい.

$$\varphi(x) \geq \varphi(a) + K \int_a^x \varphi(t) dt$$

を $x \geq a$ で仮定して $\varphi(x) \geq \varphi(a)e^{K(x-a)}$ を $x \geq a$ で導く. 上の不等式を自分自身に代入すると,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\geq \varphi(a) + K \int_a^x \left\{ \varphi(a) + K \int_a^{t_1} \varphi(t_1) dt_1 \right\} dt \\ &= \varphi(a) \{1 + K(x-a)\} + K^2 \int_a^x dt \int_a^t \varphi(t_1) dt_1 \\ &\geq \varphi(a) \left\{ 1 + K(x-a) + \frac{\{K(x-a)\}^2}{2!} + \cdots + \frac{\{K(x-a)\}^n}{n!} \right\} \\ &\quad + K^{n+1} \int_a^x \int_a^t \cdots \int_a^{t_{n-1}} \varphi(t_n) dt_n \end{aligned}$$

最後の量は, ある有界区間 $[a, b]$ で $|\varphi(x)| \leq M$ とすると, 被積分函数 $\varphi(t_n)$ を M で置き換えたものは積分が実行できる. こうして Gronwall の補題の証明と同様, 最後の項は絶対値が $\frac{\{K(x-a)\}^{n+1}}{(n+1)!} M$ で抑えられるので, $n \rightarrow \infty$ とすれば 0 に行く. 従って上の不等式の $n \rightarrow \infty$ の極限として, 求める不等式 $\varphi(x) \geq \varphi(a)e^{K(x-a)}$ が少なくとも $[a, b]$ 上で得られる. しかし b は任意なので, 実はこれは $x \geq a$ 全体で成り立つ.

問 7.3 (1) $x^2 - y^2$ は y につき局所一様 Lipschitz なので, 任意の点を通って解曲線が局所的にただ一つ存在する. しかし, 大域的には一様 Lipschitz でないので, 解は有限時間で爆発する可能性がある.

(2) 勾配場は $y = \pm x$ に沿って 0 となる. 領域 $|y| < |x|$ では勾配は正で, 解は単調に増加, またその外側 $|y| > |x|$ では, 勾配は負で, 解は単調減少する. 境目 $|y| = |x|$ では解は単調増加と単調減少を交代するので, $x > 0$ では極小値, $x < 0$ では極大値を取る.

(3) 教科書の例 7.1 と同様の計算で, 解曲線に沿って $y'' = 2x - 2y(x^2 - y^2) = 2y\left(\frac{x}{y} + y^2 - x^2\right)$ となる. これより, $x - y(x^2 - y^2) = 0$ が解曲線の変曲点の軌跡である. これを x について解くことにより

$$y > 0 \text{ では, } \frac{1 - \sqrt{1 + 4y^4}}{2y} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^4}}{2y} \text{ で凸, その外で凹,}$$

$y < 0$ では, その逆

となることが分かる. この関数は $y \rightarrow \infty$ のとき $x \doteq \frac{1 \pm 2y^2}{2y} = \pm y + \frac{1}{2y}$ で $y = \pm x$ に右側から漸近し, $y < 0$ では逆に $x \doteq \frac{1 \mp 2y^2}{2y} = \mp y + \frac{1}{2y}$ で $y = \pm x$ に左側から漸近する. また $y \sim 0$ では x 軸に漸近する分枝と原点に垂直に入る分枝に繋がる.

(4) (a) 領域 $y > |x| \dots \textcircled{1}$ から出発した解曲線は, 単調減少し, $y = x, x > 0$ のどこかで水平に領域 $x > |y| \dots \textcircled{4}$ に入り, 以後この中に留まる.

(b) 領域 $x < -|y| \dots \textcircled{2}$ から出発した解曲線は単調増加で $y = -x, x < 0$ に水平にぶつかって領域 $\textcircled{1}$ に入るか, $y = x, x < 0$ に水平にぶつかって領域 $\textcircled{3}$ に入るか, 例外的に原点を通って領域 $\textcircled{4}$ に入るかのいずれかである. それぞれ, 以後の挙動は対応する領域における挙動に従う.

(c) 領域 $y < -|x| \dots \textcircled{3}$ から出発した解曲線は単調減少であるが, 下方では変曲点の分枝 $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^4}}{2y}$, $y < 0$ に到達せず, 凹のまま $-\infty$ に発散する (有限時間爆発). 他方, この分枝に到達すると凸に転じ, 極小値の軌跡 $y = -x, x > 0$ と水平に交わって領域 $\textcircled{4}$ に入り込む.

(d) 領域④から出発した解曲線は、いずれ変曲点の分枝 $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^4}}{2y}$, $y > 0$ の右側に必ず入り込み凹となってそこに留まる．更に、これらはすべて変曲点の分枝 $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^4}}{2y}$, $y \rightarrow \infty$ に漸近する、
 (e) 領域②から出て③に入る分枝が $-\infty$ に発散するか、領域④に入るかの境目には1本の解曲線が存在し、これは変曲点の分枝 $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^4}}{2y}$, $y \rightarrow -\infty$ に左側から漸近する．このような分離解曲線の存在と一意性は、例 7.1 (8) と同様の論法で示すことができる．(5) この微分方程式は原点に関して対称なので、(個々の解曲線は1本を除き原点に関して対称ではないが) $x \rightarrow -\infty$ での挙動は $x \rightarrow \infty$ での挙動を点対称に写せば分かる．

計算と証明の詳細については、[6] の例題 8.3 と問題 8.3.1 の解答を見よ．

問 7.4 $y' = \sin y$ の場合は変数分離して求積でき、

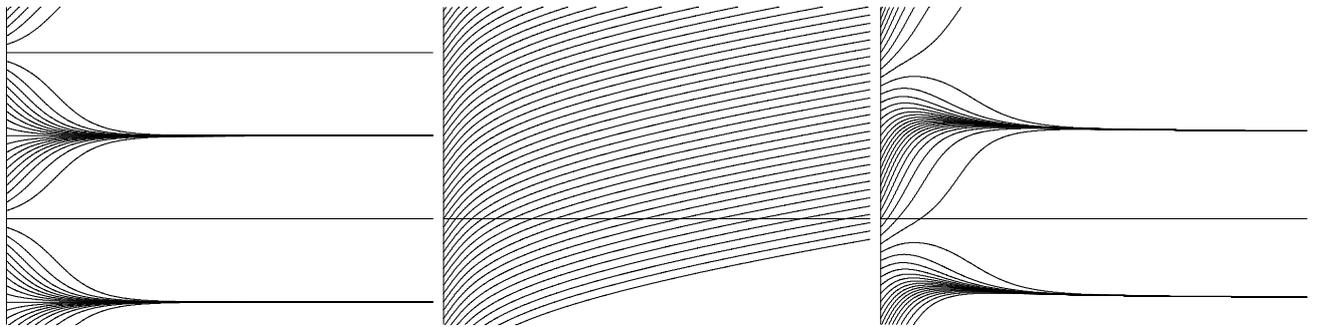
$$\frac{dy}{\sin y} = dx, \quad x + C = \int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{\sin y dy}{\sin^2 y} = \int \frac{-d \cos y}{1 - \cos^2 y} = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y}$$

$$\therefore \cos y = \frac{1 - ce^{2x}}{1 + ce^{2x}}, \quad y = \text{Arccos} \frac{1 - ce^{2x}}{1 + ce^{2x}}$$

と求まり、解曲線は $x \rightarrow \infty$ のとき直線 $y = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ に漸近する．他方、 $y' = \frac{1}{\log(2 + x^2)}$ のときは、 $x \geq \sqrt{2}$ において

$$y = \int_0^x \frac{1}{\log(2 + x^2)} dx + C \geq \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\log(2 + x^2)} dx + C + \int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{\log x^2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\log(2 + x^2)} dx + C + \int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{2 \log x} dx$$

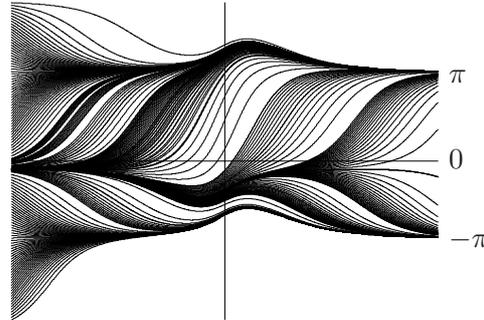
であり、最後の積分は $x \rightarrow \infty$ のとき、ゆっくりとはあるが $+\infty$ に発散する．よって、問題の方程式はどちらの項が卓越的であるか悩むところだが、数値実験してみると、どうやら $\sin y$ の方が勝り、解は $x \rightarrow \infty$ のとき $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ に漸近するようである．そこで以下この証明を試みる．



方程式は y 方向に周期的なので、 $0 < c \leq 2\pi$ の範囲の初期値を $x = 0$ で与えて解の挙動を見れば十分である． $\frac{1}{\log(2 + x^2)}$ は常に正であり、原点の近くでは 1 より大きい、 x の増加とともに直に 1 より小さくなり、0 に収束してゆく．よって $0 < y < \pi$ の範囲では勾配場は最初から右上がりであり、 $\pi < y < 2\pi$ では最終的に右下がりとなる． $y = \pi$ の線上では正で 0 に収束してゆく．以上より x がこの範囲の初期値から出発すれば、解曲線は $y = \pi$ に収束することが予想される．解曲線が $y = \pi$ の上に出ることは明らかなので、これを証明するには、 $\forall \varepsilon > 0$ について、 $\pi + \varepsilon \leq y \leq 2\pi - \varepsilon$ の範囲の解曲線が、 x の増加とともに帯 $y \geq \pi + \varepsilon$ の中に入り込むことを示せばよい．背理法により、もし $x \rightarrow \infty$ で解曲線が帯 $\pi + \varepsilon \leq y \leq 2\pi - \varepsilon$ の中に留まり続けたとすると、 $\sin y \leq -\sin \varepsilon$ となるので、 $\frac{1}{\log(2 + x^2)} \leq \frac{1}{2} \sin \varepsilon$ 、すなわち、 $x \geq x_0 := \exp \frac{2}{\sin \varepsilon}$ においては $y' \leq -\frac{1}{2} \sin \varepsilon$ ．よってここでは

$$y \leq y(x_0) - \frac{\sin \varepsilon}{2}(x - x_0)$$

となり，僅かではあるが負の傾きの直線で上から抑えられるので，有限時間でこの帯を下方に飛び出してしまふ．以上より解曲線は直線 $y = \pi$ の上方からこの直線に漸近することが分かった． $y \geq 2\pi$ で直線 $y = 2\pi$ の近くでは $y = 0$ と同様，増加して $y = 3\pi$ に向かう．微妙なのは $y = 2\pi$ の少しだけ下のところだが，ここでは直線 $y = 2\pi$ に下から漸近するただ一つの解曲線が有り，その上では増加して $y = 3\pi$ に向かい，その下では $y = \pi$ に落ちてくる．この境目を成す解曲線は， $y = 2\pi$ 上の点 $x = c$ から逆向きに解いて得られる解曲線の $c \rightarrow \infty$ としたときの極限として得られる．この極限が解曲線として定まることの証明は，教科書の例 7.1 の (8) と同様の論法で一意性も込めて証明できる．



問 7.5 y の方程式の主要部は $y' = -3y$ で，その解は $y = Ce^{-3t}$ であり，問題の方程式はそれに高次の摂動を加えただけなので，一見すると同じような減少速度を示しそうに思ってしまうが，ちゃんと求積してみると，第 1 の方程式から $x = c_1 e^{-t}$ なので，これを第 2 の方程式に代入すると， $y' = -3y + c_1^2 e^{-2t}$ ．これを求積すると

$$(e^{3t}y)' = c_1^2 e^t, \quad \therefore e^{3t}y = c_1^2 e^t + c_2$$

となり，これから $y = c_2 e^{-3t} + c_1^2 e^{-2t}$ ．従って一般の解は減少速度が $O(e^{-2t})$ にしかならず，例外的に $c_1 = 0$ のときだけ本来の y の線型方程式の減少度 $O(e^{-3t})$ を持つ．これは解軌道としては x 軸上原点に左右から近づく 2 本だけである．

問 7.6 この方程式の摂動項は 1 次よりほんのちよつと小さいだけである．この問題はそのようなときは主部が回転しない (1) の型であっても，解軌道が原点に無限に巻き込むことがあり得ることを示す例である．教科書の定理 7.2 の (2) の証明中の計算から，軌道の回転速度は

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2} \left\{ x \left(-y - \frac{x}{\log r} \right) - y \left(-x + \frac{y}{\log r} \right) \right\} = -\frac{1}{\log r}$$

従って，回転は固有値の実部が負の場合の定速度よりは遅く，原点に近づくに連れてゆっくりとなる．同じく教科書の計算から

$$\frac{dr}{dt} = \frac{xx' + yy'}{r} = \frac{1}{r} \left\{ x \left(-x + \frac{y}{\log r} \right) + y \left(-y - \frac{x}{\log r} \right) \right\} = -r$$

から $r = Ce^{-t}$ ， $\log r = -t - c$ であるので，

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{t+c}, \quad \therefore \theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{1}{t+c} dt$$

となり，この最後の積分は $t \rightarrow \infty$ のとき限りなく大きくなるので，回転の総角度は有限の値には収束しない．すなわち，いつまでも回りつづける．

問 7.7 前問と同様に計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{xx' + yy'}{r} = \frac{1}{r} \left\{ x \left(-x + O\left(\frac{r}{(\log r)^2}\right) \right) + y \left(-y + O\left(\frac{r}{(\log r)^2}\right) \right) \right\} = -r + O\left(\frac{r}{(\log r)^2}\right), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{xy' - yx'}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left\{ x \left(-y + O\left(\frac{r}{(\log r)^2}\right) \right) - y \left(-x + O\left(\frac{r}{(\log r)^2}\right) \right) \right\} = O\left(\frac{1}{(\log r)^2}\right) \end{aligned}$$

第1の方程式から,

$$-(1+\varepsilon)r \leq \frac{dr}{dt} \leq -(1-\varepsilon)r \quad \therefore \quad Ce^{-(1+\varepsilon)t} \leq r \leq Ce^{-(1-\varepsilon)t}$$

で, とにかく r は解軌道に沿って時間とともに指数減少する. 第2の方程式と合わせると

$$\frac{d\theta}{dr} \leq c \frac{1}{r(\log r)^2}, \quad \therefore \quad \theta \leq c \int_{r_0}^r \frac{1}{r(\log r)^2} dr = c \left(\frac{1}{\log r_0} - \frac{1}{\log r} \right)$$

これは $t \rightarrow \infty$, 従って $r \rightarrow 0$ のとき有限な値に収束する. つまり回転角の総和には上限が存在し, いつまでも回り続けることは無い.

問 7.8 $y > 0$ で論ずるが, $y < 0$ も同様である. ヒントに書かれたように, $\delta > 0$ を十分小さく (条件は後で特定する) 選んで固定する. 原点を中心とする辺長 2δ の正方形を D_δ と記そう. 水平線 $y = \delta$ 上の点 (x, δ) で, そこから発する解軌道が D_δ を右に抜け出すようなものの集合と, 左に抜け出すような点の集合は互いに右左に分かれているので, 前者の x には下限 x^+ , 後者には上限 x^- が存在する. $t = 0$ でこれら二つの点から発する解軌道 $(x^+(t), y^+(t)), (x^-(t), y^-(t))$ は, それぞれ右または左に向かって D_δ から抜けることができない. 実際, もし x^+ から発する解軌道が $t = T$ で (δ, m) に到達したとすれば, 有限時間区間における初期値に対する解の連続依存性により, 十分小さな $\varepsilon > 0$ を取るとき, $x = \delta, y = m - \varepsilon$ を通る解軌道は, 時間を T から 0 まで遡るとき, 最初の解軌道の十分近くを通り, 従って $y = \delta$ と交わるが, それは x^+ より左の点になるので, x^+ がこのような解軌道の出発位置の下限であったことに反する. x^- についても同様である. 教科書で既に示されたところにより, これらの解軌道は, 十分小さい $\delta > 0$ に対しては D_δ 内の $y > 0$ の範囲で y 座標は単調に減少するとしてよいが, 原点以外で x 軸に近づくと x 座標が t について指数的に増大するので, x 軸の正の部分に交わったり, そこに収束することはできない. よってこれらの軌道は, 特異点である原点に限りなく近づくしかない.

次に $x^+ = x^-$ を示そう. 背理法により, $x^+ - x^- > 0$ として矛盾を導く. このためには, これらの軌道上での y 座標の挙動をもう少し精細に見る必要がある. 符号を見易くするため $\mu < 0$ としていたのを $-\mu, \mu > 0$ と書くことにすると, $x' = \lambda x + g(x, y), y' = -\mu y + h(x, y), \lambda, \mu > 0$, また g, h は C^1 級で, いずれも $o(|x| + |y|)$ である. これらの仮定から, まず g, h の偏導関数は $x, y \rightarrow 0$ のとき 0 に近づくことが分かる. 実際, 偏導関数は連続で, かつ原点におけるその値は 0 だからである. すると, $\forall \varepsilon > 0$ を与えられたとき, $\delta > 0$ を十分小さくとれば, 平均値定理により, D_δ 内の2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に対して

$$\begin{aligned} |g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)| &= |g(x_1, y_1) - g(x_2, y_1)| + |g(x_2, y_1) - g(x_2, y_2)| \\ &= \left| \frac{\partial g}{\partial x}(\xi, y_1) \right| |x_1 - x_2| + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x_2, \eta) \right| |y_1 - y_2| \\ &\leq \varepsilon |x_1 - x_2| + \varepsilon |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

が成り立つ. $h(x, y)$ についても同様である.

さて, $(x^+, \delta), (x^-, \delta)$ を時刻 $t = 0$ に発する解をそれぞれ $(x_1(t), y_1(t)), (x_2(t), y_2(t))$ と置くと, 二つの軌道の差を取ると

$$y_1' = \mu y_1 + h(x_1, y_1), \quad y_2' = \mu y_2 + h(x_2, y_2)$$

から,

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2)' &= -\mu(y_1 - y_2) + h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2) \\ &\geq -\mu(y_1 - y_2) - \varepsilon(x_1 - x_2) - \varepsilon|y_1 - y_2| \\ (y_2 - y_1)' &\geq -\mu(y_2 - y_1) - \varepsilon(x_1 - x_2) - \varepsilon|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

よって教科書の p.169, 補題 6.15 により, $|y_1 - y_2|' \leq |(y_1 - y_2)'|$ なので, これから

$$\begin{aligned} -|y_1(t) - y_2(t)|' &\geq -|(y_1(t) - y_2(t))'| = \min\{(y_1(t) - y_2(t))', (y_2(t) - y_1(t))'\} \\ &\geq \min\{-\mu(y_1(t) - y_2(t)), -\mu(y_2(t) - y_1(t))\} - \varepsilon(x_1(t) - x_2(t)) - \varepsilon|y_1(t) - y_2(t)| \\ &= -\mu|y_1(t) - y_2(t)| - \varepsilon(x_1(t) - x_2(t)) - \varepsilon|y_1(t) - y_2(t)| \\ &= -(\mu + \varepsilon)|y_1(t) - y_2(t)| - \varepsilon(x_1(t) - x_2(t)) \end{aligned}$$

次に, x 座標の方は

$$\begin{aligned} (x_1(t) - x_2(t))' &= \lambda(x_1(t) - x_2(t)) + g(t, x_1(t), y_1(t)) - g(t, x_2(t), y_2(t)) \\ &\geq \lambda(x_1(t) - x_2(t)) - \varepsilon(x_1(t) - x_2(t)) - \varepsilon|y_1(t) - y_2(t)| \\ &= (\lambda - \varepsilon)(x_1(t) - x_2(t)) - \varepsilon|y_1(t) - y_2(t)| \end{aligned}$$

これら二つから, もし $\lambda - 2\varepsilon \geq \mu + 2\varepsilon$ なら (δ を十分小さく選べば ε をいくらでも小さくできるので, これは $\lambda > \mu$ なら可能である), $x_1 > x_2$ なる限り

$$\begin{aligned} \{(x_1(t) - x_2(t)) - |y_1(t) - y_2(t)|\}' &\geq (\lambda - 2\varepsilon)(x_1(t) - x_2(t)) - (\mu + 2\varepsilon)|y_1(t) - y_2(t)| \\ &\geq (\mu + 2\varepsilon)\{(x_1(t) - x_2(t)) - |y_1(t) - y_2(t)|\} \end{aligned}$$

従って

$$\{(x_1(t) - x_2(t)) - |y_1(t) - y_2(t)|\}e^{-(\mu+2\varepsilon)t} \geq 0$$

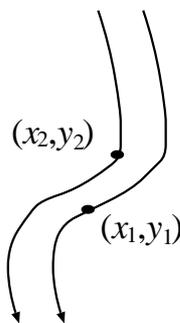
が成り立つ. $t = 0$ では $x_1(t) - x_2(t) = x_+ - x_-$, $|y_1(t) - y_2(t)| = 0$ なので, 両辺を 0 から t まで積分すると

$$(x_1(t) - x_2(t)) - |y_1(t) - y_2(t)|e^{-(\mu+2\varepsilon)t} \geq x_+ - x_-$$

従って,

$$(x_1(t) - x_2(t)) - |y_1(t) - y_2(t)| \geq (x_+ - x_-)e^{(\mu+2\varepsilon)t}$$

となる. 右辺は $t \rightarrow \infty$ のとき指数増大する. しかし $x_1(t) - x_2(t)$ も $|y_1(t) - y_2(t)|$ も $t \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づくのであったから, これは不合理である. (厳密には $x_1(t) - x_2(t) > 0$ が最初からすべての t で成り立つ保証は無いが, 少なくとも $t = 0$ の近くでは連続性によりそれが成り立ち, その範囲では上の論法が通用するので, 実はいつまでも $x_1(t) - x_2(t) > 0$ であることが同時に分かる. 2本の解曲線は交わらないので $x_1 > x_2$ が途中で崩れることは有り得ないと思われるかもしれないが, y_1, y_2 の零に近づく速度に差があると, 交わらなくても次図のような状況が起こりうる. もともとこの証明は, 有り得ないことが確かに起こらないことを示そうとしているので, こういうところもちゃんと議論しなければならない.)



さて, $\lambda \leq \mu$ のときはもう少し工夫を要する.(原点の近傍で線形の座標変換をしても, 固有値 λ, μ を変えることはできないことに注意せよ. よって簡単な変換などを用いて上の場合に帰着させることは難しそうであ

る。) このときは,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)' \\ &= \frac{\{-\mu(y_1 - y_2) + h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)\}(x_1 - x_2) - \{\lambda(x_1 - x_2) + g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)\}(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A7.1})$$

を考える. t が小さい間は $\frac{|y_1 - y_2|}{x_1 - x_2} \leq 1$ が明らかに成り立っている. 以下これが $t \rightarrow \infty$ まで成り立つことを上の微分方程式を用いて示そう. まず $0 \leq y_1 - y_2 \leq (x_1 - x_2)$ が成り立っている間は, (A7.1) より

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)' \leq -(\lambda + \mu - 3\varepsilon) \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \varepsilon$$

よってこの間は

$$\left\{ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} e^{(\lambda + \mu - 3\varepsilon)t} \right\}' \leq \varepsilon e^{(\lambda + \mu - 3\varepsilon)t}$$

となる. $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ の初期値が 0 であることに注意してこれを積分すると,

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} e^{(\lambda + \mu - 3\varepsilon)t} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda + \mu - 3\varepsilon} \{e^{(\lambda + \mu - 3\varepsilon)t} - 1\} \quad \therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda + \mu - 3\varepsilon}$$

となる. また, $-(x_1 - x_2) \leq y_1 - y_2 \leq 0$ においては, $y_1 - y_2$ の代わりに $y_2 - y_1$ を考えると, 上と同様にして

$$\left\{ \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} e^{(\lambda + \mu - 3\varepsilon)t} \right\}' \leq \varepsilon e^{(\lambda + \mu - 3\varepsilon)t} \quad \therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \geq -\frac{\varepsilon}{\lambda + \mu - 3\varepsilon}$$

となる. もし $y_1 - y_2$ が符号を変える点があれば, そこでは $y_1 - y_2$ は一旦 0 となるので, そこを時刻の原点と思えば上と同じ議論がその後に適用できる. 以上により $\frac{|y_1 - y_2|}{x_1 - x_2} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda + \mu - 3\varepsilon}$ がずっと成り立つ. この右辺の定数が ≤ 1 となるように ε を選んでおくことは可能だから, 以上により $|y_1 - y_2| \leq x_1 - x_2$ が示された. すると

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)' &= \lambda(x_1 - x_2) + g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2) \geq \lambda(x_1 - x_2) - \varepsilon(x_1 - x_2) - \varepsilon(y_1 - y_2) \\ &\geq (\lambda - 2\varepsilon)(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

よって,

$$\{(x_1 - x_2)e^{-(\lambda - 2\varepsilon)t}\}' \geq 0 \quad \therefore (x_1 - x_2)e^{-(\lambda - 2\varepsilon)t} \geq x_+ - x_-$$

従って $x_1 - x_2 \geq (x_+ - x_-)e^{(\lambda - 2\varepsilon)t}$ となり, $\lambda - 2\varepsilon > 0$ となるように ε が選ばれていれば, $t \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づくはずの $x_1 - x_2$ が指数増大することになる.(厳密には, この論法を平行して行うことで, 最初に調べた量 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ の分母が 0 にならないことも保証される.)

これは不合理であるから, $y > 0$ の側から原点に近づく解曲線はただ一本であることが示された.

問 7.9 変換 $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$ により,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\varphi, \psi) \\ g(\varphi, \psi) \end{pmatrix}$$

従って,

$$\begin{pmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(\varphi, \psi) \\ g(\varphi, \psi) \end{pmatrix}$$

ここで, $t(\xi, \eta) = t(0, 0)$ での Taylor 展開を

$$\begin{pmatrix} \varphi(\xi, \eta) \\ \psi(\xi, \eta) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$$

とすれば, そこで

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{pmatrix} = S + o(1)$$

となるので,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1} = S^{-1} + o(1)$$

また $\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\sqrt{x^2 + y^2})$ とすれば,

$$\begin{pmatrix} f(\varphi, \psi) \\ g(\varphi, \psi) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + o(\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}) = AS \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$$

よって

$$\left(\frac{d\xi}{dt} \right) = (S^{-1} + o(1)) \{ AS \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \} = S^{-1} AS \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$$

となる. 故に方程式系の右辺の原点での線形近似は $A \mapsto S^{-1}AS$ という相似変換を受ける. ただし, 以上の計算を見れば分かるように, もとの方程式系では剰余項も込めて C^1 級であったが, 変換写像の微分がかかったせいで, 変換後の剰余項は単に連続でしかない. これを C^1 級とするためには, 用いる変換は C^2 級としなければならない.

問 7.10 始めに断っておくが, 方程式に現れる定数パラメータはすべて正である.(でなければ, 方程式において + と - の記号を使い分け (2) と (3) を別にした意味が無い (^_^;)

(1) (1.38) については, 特異点は

$$u(\alpha - \beta v) = 0, \quad v(\gamma u - \delta) = 0$$

より, $(u, v) = (0, 0), (\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta})$ の 2 点となる. 前者では, 右辺の主部が $\alpha u, -\delta v$ なので, これらの定数がすべて正なら, 原点は鞍点型の特異点となる. 後者では,

$$u(\alpha - \beta v) = -\frac{\delta\beta}{\gamma}(v - \frac{\alpha}{\beta}) + \text{高次}, \quad v(\gamma u - \delta) = \frac{\alpha\gamma}{\beta}(u - \frac{\delta}{\gamma}) + \text{高次}$$

と変形できるので, 渦心点に高次の摂動が加わった形である. よってこの場合の挙動は高次の項を合わせて調べないと一般論では判定できない. この例では教科書の第 1 章 (1.39) 式のように, 解が具体的に求まり, この特異点の近くは周期軌道で埋め尽くされていることが分かる.

(2) (1.41) については, 特異点は,

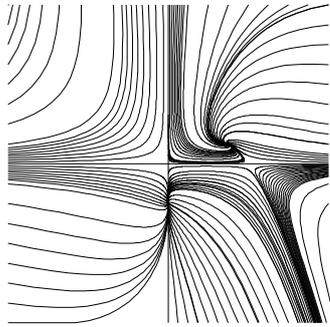
$$u(\alpha - \beta_1 u - \beta_2 v) = 0, \quad v(\gamma_1 u - \gamma_2 v - \delta) = 0$$

より, 特異点は $(u, v) = (0, 0), (0, -\frac{\delta}{\gamma_2}), (\frac{\alpha}{\beta_1}, 0)$, および $(\frac{A}{D}, \frac{B}{D})$, ここに $A = \alpha\gamma_2 + \beta_2\delta, B = \alpha\gamma_1 - \beta_1\delta, D = \gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1$, の 4 個である. $(0, 0)$ における主部は $u' = \alpha u, v' = -\delta v$ で鞍点型である. $(0, -\frac{\delta}{\gamma_2})$ における主部は, $u' = \frac{\alpha\gamma_2 + \beta_2\delta}{\gamma_2}u, v' = -\frac{\gamma_1\delta}{\gamma_2}u + \delta(v + \frac{\delta}{\gamma_2})$ で, 行列 $\begin{pmatrix} \frac{\alpha\gamma_2 + \beta_2\delta}{\gamma_2} & 0 \\ -\frac{\gamma_1\delta}{\gamma_2} & \delta \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{\alpha\gamma_2 + \beta_2\delta}{\gamma_2}, \delta$ でともに正なので, 発散型の結節点である. 同様に, $(\frac{\alpha}{\beta_1}, 0)$ における主部は $u' = -\alpha(u - \frac{\alpha}{\beta_1}) - \frac{\alpha\beta_2}{\beta_1}v, v' = \frac{\alpha\gamma_1 - \beta_1\delta}{\beta_1}v$ とな

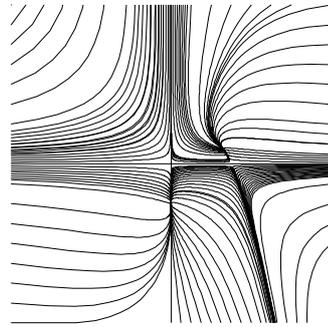
り，行列 $\begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\alpha\beta_2}{\beta_1} \\ 0 & \frac{\alpha\gamma_1 - \beta_1\delta}{\beta_1} \end{pmatrix}$ の固有値は $-\alpha, \frac{\alpha\gamma_1 - \beta_1\delta}{\beta_1}$ となり， $\alpha\gamma_1 > \beta_1\delta$ のときは鞍点型， $\alpha\gamma_1 < \beta_1\delta$ のときは収斂型の結節点となる． $\alpha\gamma_1 = \beta_1\delta$ のときは固有値の一つが 0 となり，この特異点での解軌道の挙動は高次の摂動項に依存するので，後ほど検討する．最後に， $(\frac{A}{D}, \frac{B}{D})$ における主部は， $u' = -\beta_1\frac{A}{D}(u - \frac{A}{D}) - \beta_2\frac{A}{D}(v - \frac{B}{D})$ ， $v' = \gamma_1\frac{B}{D}(u - \frac{A}{D}) - \gamma_2\frac{B}{D}(v - \frac{B}{D})$ であり，係数行列は $\begin{pmatrix} -\beta_1\frac{A}{D} & -\beta_2\frac{A}{D} \\ \gamma_1\frac{B}{D} & -\gamma_2\frac{B}{D} \end{pmatrix}$ ，この行列のトレースは $-\frac{\beta_1A + \gamma_2B}{D}$ ，行列式は $\frac{A}{D}\frac{B}{D}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)$ となる．よって特性多項式の判別式は

$$\Delta = \frac{1}{D^2}\{(\beta_1A + \gamma_2B)^2 - 4AB(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)\} = \frac{1}{D^2}\{(\beta_1A - \gamma_2B)^2 - 4AB\beta_2\gamma_1\}$$

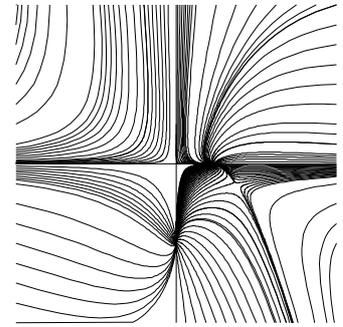
となるから， $B = \alpha\gamma_1 - \beta_1\delta < 0$ のときは行列式が負で固有値は正負一つずつなので，鞍点となる．(このときこの特異点は第 2 象限に位置するので， v は負の値に収束することになる．) $B = \alpha\gamma_1 - \beta_1\delta > 0$ のときは，更に $(\beta_1A - \gamma_2B)^2 - 4AB\beta_2\gamma_1 \geq 0$ なら収斂型の結節点， $(\beta_1A - \gamma_2B)^2 - 4AB\beta_2\gamma_1 < 0$ なら，固有値は実部負の共役複素根となり，収斂型の渦状点となる．



$\alpha\gamma_1 > \beta_1\delta, \Delta < 0$ のとき



$\alpha\gamma_1 > \beta_1\delta, \Delta \geq 0$ のとき



$\alpha\gamma_1 < \beta_1\delta$ のとき

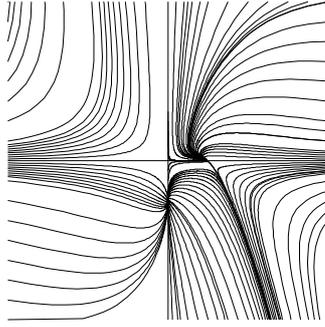
$B = \alpha\gamma_1 = \beta_1\delta$ のときは固有値の一つが零となるが，特異点の v 成分も同時に零となり，更に簡単な計算で u 成分は $\frac{\alpha}{\beta_1}$ に帰着することが確かめられる．従ってこのとき特異点は 3 番目と一致する．よって以下， $\alpha\gamma_1 = \beta_1\delta$ のときの特異点 $(\frac{\alpha}{\beta_1}, 0)$ における挙動を調べるだけが残された．このとき方程式系は

$$\begin{aligned} u' &= u\{-\beta_1(u - \frac{\alpha}{\beta_1}) - \beta_2v\} = -\alpha(u - \frac{\alpha}{\beta_1}) - \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}v - \beta_1(u - \frac{\alpha}{\beta_1})^2 - \beta_2(u - \frac{\alpha}{\beta_1})v, \\ v' &= v\{\gamma_1(u - \frac{\alpha}{\beta_1}) - \gamma_2v\} = \gamma_1(u - \frac{\alpha}{\beta_1})v - \gamma_2v^2 \end{aligned}$$

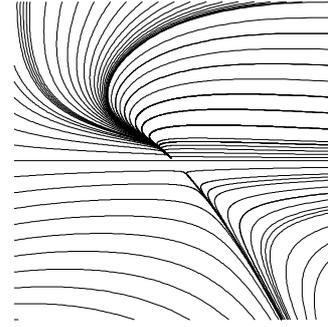
となるので，1 次式 $-\alpha(u - \frac{\alpha}{\beta_1}) - \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}v$ が優位な間はこれが減少する方向に向かう動きが優位となり，一旦直線 $\alpha(u - \frac{\alpha}{\beta_1}) + \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}v = 0$ に近づく．しかし，この直線に沿って

$$v' = v\{\gamma_1(u - \frac{\alpha}{\beta_1}) - \gamma_2v\} \doteq -(\gamma_1\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha} + \gamma_2)v^2 < 0$$

なので， $v > 0$ ではその後も特異点に近づき，結節点に似たパターンを成すのに対し， $v < 0$ では特異点に反発され，鞍点に似たパターンを成す．これは線形系の分類では現れなかった複雑な動きである．



$\alpha\gamma_1 = \beta_1\delta$ のとき



同, $(\frac{\alpha}{\beta_1}, 0)$ での拡大図

(3) (1.42) については, 特異点は,

$$u(\alpha - \beta_1 u - \beta_2 v) = 0, \quad v(\delta - \gamma_1 u - \gamma_2 v) = 0$$

より, $(0, 0), (0, \frac{\delta}{\gamma_2}), (\frac{\alpha}{\beta_1}, 0), (\frac{A}{D}, \frac{B}{D})$, ここに, $A = \alpha\gamma_2 - \beta_2\delta, B = \beta_1\delta - \alpha\gamma_1, D = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1$ の 4 点である. (ただし $D = 0$ となる場合は後で調べる.) $(0, 0)$ における主部は $u' = \alpha u, v' = \delta v$ で発散型の結節点である. 次に, $(0, \frac{\delta}{\gamma_2})$ における主部は,

$$u' = \frac{\alpha\gamma_2 - \beta_2\delta}{\gamma_2} u, \quad v' = -\frac{\gamma_1\delta}{\gamma_2} u - \delta(v - \frac{\delta}{\gamma_2}).$$

よってこの係数行列の固有値は $\frac{\alpha\gamma_2 - \beta_2\delta}{\gamma_2}, -\delta$ となるから, $\alpha\gamma_2 > \beta_2\delta$ なら鞍点, $\alpha\gamma_2 < \beta_2\delta$ なら収斂型の結節点となる. $\alpha\gamma_2 = \beta_2\delta$ のときは高次の項に依存するので後で調べる. 次に, $(\frac{\alpha}{\beta_1}, 0)$ においては,

$$u' = -\alpha u, \quad v' = \frac{\beta_1\delta - \alpha\gamma_1}{\beta_1} v$$

が主部となるので, $\beta_1\delta > \alpha\gamma_1$ なら鞍点, $\beta_1\delta < \alpha\gamma_1$ なら収斂型の結節点となる. $\beta_1\delta = \alpha\gamma_1$ のときは高次の項に依存するので後で論ずる. 最後に, $(\frac{A}{D}, \frac{B}{D})$ においては, 主部は

$$u' = -\frac{\beta_1 A}{D}(u - \frac{A}{D}) - \frac{\beta_2 A}{D}(v - \frac{B}{D}), \quad v' = -\frac{\gamma_1 B}{D}(u - \frac{A}{D}) - \frac{\gamma_2 B}{D}(v - \frac{B}{D})$$

となり, 係数行列は $\begin{pmatrix} -\frac{\beta_1 A}{D} - \frac{\beta_2 A}{D} & -\frac{\beta_2 A}{D} \\ -\frac{\gamma_1 B}{D} & -\frac{\gamma_2 B}{D} \end{pmatrix}$, そのトレースは $T = -\frac{\beta_1 A + \gamma_2 B}{D}$, 行列式は $(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\frac{AB}{D^2} = \frac{AB}{D}$ である. よって $ABD < 0$ ならこの点は鞍点となるが, ここで $A > 0 \iff \frac{\gamma_2}{\beta_2} > \frac{\delta}{\alpha}, B > 0 \iff \frac{\delta}{\alpha} > \frac{\gamma_1}{\beta_1}, D > 0 \iff \frac{\gamma_2}{\beta_2} > \frac{\gamma_1}{\beta_1}$ に注意せよ. 従って $A > 0, B > 0$, あるいは $A < 0, B < 0$ なら必然的に $D < 0$ となり, 鞍点型となる. このときこの特異点はそれぞれ第 1 あるいは第 3 象限に位置する. A, B が異符号のときは D の符号は両方の可能性がある. $D > 0$ なら鞍点となるが, $D < 0$ のときは固有多項式の判別式

$$\Delta = \left(-\frac{\beta_1 A}{D} - \frac{\gamma_2 B}{D}\right)^2 - 4\frac{AB}{D} = \frac{(\beta_1 A - \gamma_2 B)^2 + 4\beta_2\gamma_1 AB}{D^2}$$

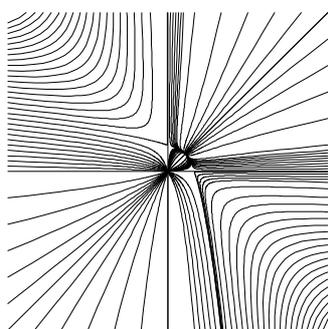
の符号と併せて, $T < 0, \Delta > 0$ なら固有値は実負で収斂型の結節点, $T > 0, \Delta > 0$ なら固有値は実正で発散型の結節点, $T < 0, \Delta < 0$ なら固有値は実部負の共役複素数で収斂型の渦状点, $T > 0, \Delta < 0$ なら固有値は実部正の共役複素数で発散型の渦状点となる.

最後に退化する場合を調べる. まず $D = 0$ のときは, $A, B \neq 0$ なら 4 番目の特異点は存在しない. $D = 0$ の下では A, B は比例するので, 零となるのは同時だが, そのとき方程式の右辺の u, v の 1 次式は比例し, 従っ

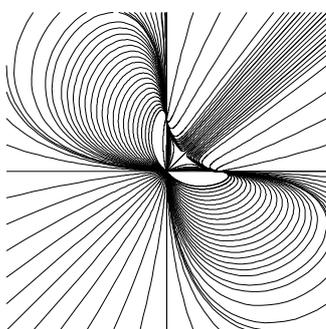
て直線 $\beta_1 u + \beta_2 v = \alpha$ に沿って特異点が並ぶ構造になる．ただしこの1次因子は比を取るとキャンセルするので，軌道はこの特異線を越えて直線状に繋がっているように見える．原点は発散型の結節点だが，この特異線へは軌道は $t \rightarrow \infty$ のときどちらの側からも収斂する． $AB \neq 0$ のときは先の考察から A, B が同符号だと $D \neq 0$ となってしまうので， $AB < 0$ であり，軸上の特異点は一方が結節点，他方が鞍点となる． $D \neq 0$ だが $A = 0$ となる場合は，第4の特異点が合流する $(0, \frac{\delta}{\gamma_2})$ において， v' の主部である線形項は生き残り， $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}u + (v - \frac{\delta}{\gamma_2}) > 0$ では v は減少，その逆の側では増加で，両側から直線 $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}u + (v - \frac{\delta}{\gamma_2}) = 0$ に一旦近づくが，特異点における u の変化率

$$u' = -\beta_1 u^2 - \beta_2 u(v - \frac{\delta}{\gamma_2}) = -\beta_2 \{ \frac{\beta_1}{\beta_2} u + (v - \frac{\delta}{\gamma_2}) \}$$

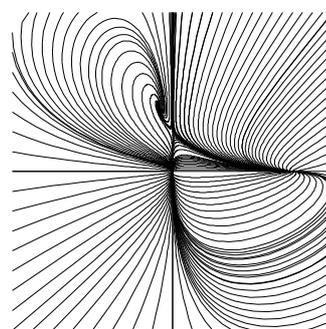
から， $D > 0$ なら $\frac{\beta_1}{\beta_2} > \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ となってこれは $u > 0$ でも $u < 0$ でも正となり，この結果 (2) で退化するケースで現れたのと同様， $u < 0$ では結節点型， $u > 0$ では鞍点型のパターンを成す． $D < 0$ のときはこれが左右で逆転する． $B = 0$ の場合も同様に調べることができる．



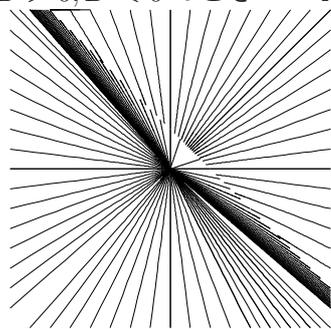
$A > 0, B > 0, D < 0$ のとき



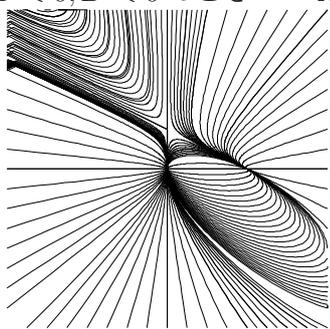
$A < 0, B < 0, D < 0$ のとき



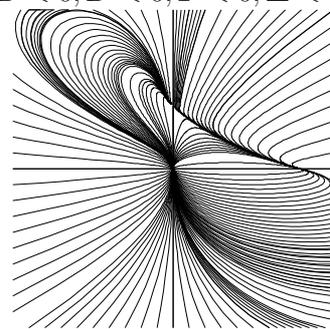
$A > 0, B < 0, D < 0, T < 0, \Delta < 0$ のとき



$A = B = D = 0$ のとき



$AB < 0, D = 0$ のとき



$A = 0, B \neq 0, D = 0$ のとき

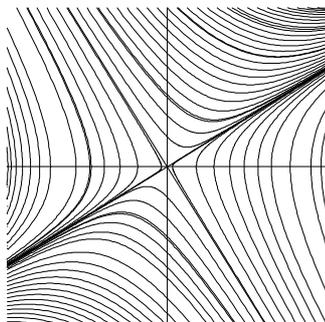
問 7.11 微分方程式は $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{g}{4a}s$, あるいは動摩擦項も考慮した $\frac{d^2 s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} - \frac{g}{4a}s = 0$ である． $x = s, y = \frac{ds}{dt}$ と置き連立化すると

$$x' = y, \quad y' = -ky + \frac{g}{4a}x$$

頂上で静止している解は $x = y = 0$, すなわち原点に対応するから，ここでの安定性を調べると，上の線型系の係数行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4a} & -k \end{pmatrix}$ で，その固有値は $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{4a} & -k - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k\lambda - \frac{g}{4a} = 0$ より，元の2階単独方程式の特性根と一致し， $\frac{-k \pm \sqrt{k^2 + \frac{g}{4a}}}{2}$ と正負一つずつである．よってここでは鞍点型の挙動を示し，原点に収束す

る2本を除き一度原点に近づいてその後遠ざかる．固有ベクトルが $(1, \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + \frac{g}{4a}}}{2})^t$ (複号同順) なので，これらの方向の直線を境目として図のような解軌道のパターンを成す．ここで山の左側 ($s < 0$ の側) から球を

転がして頂上に向かわせた場合の軌道は、図で上の方から降りてくるものに対応し、速度が充分でない場合は y 軸を越え (i.e. 速度が一旦 0 となった後向きを変え) 直線 $y = \frac{-k + \sqrt{k^2 + \frac{g}{4a}}}{2}x$ に沿って左側に遠ざかって行く。また、速度が大きすぎた場合は、 y が正の最小値に達した後 (i.e. 一旦ゆっくりな動きになった後、向きはそのまま) 右側に遠ざかってゆく。

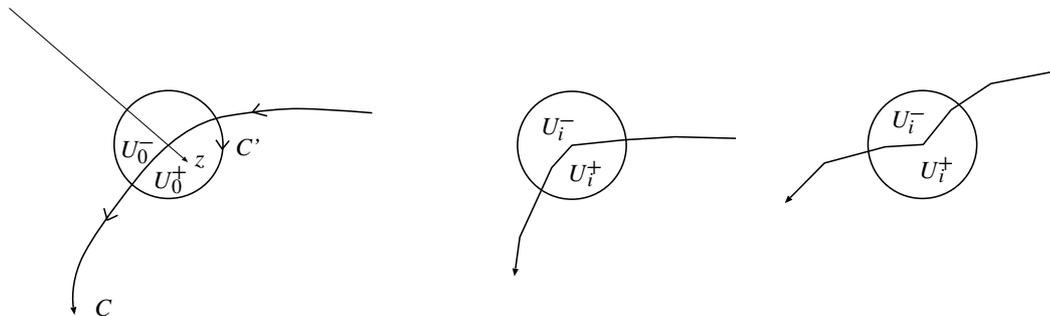


問 7.12 単純閉曲線 C は仮定により $x = \varphi(t), y = \psi(t), 0 \leq t \leq T$ と区分的に C^1 級の関数によりパラメータ表示できる。よって線積分が可能である。線積分は C^1 級の区分弧ごとに計算したものの和で表すべきだが、ちょうど $|x|$ の導関数のように $\varphi'(t), \psi'(t)$ はつなぎ目で値が飛ぶが、そこでの値を無視しても dt による積分が意味を持つ程度の関数になるので、以下簡単のため C 全体での積分として表す。どちらでも同じことなので、表記が簡単な複素積分を用いるが、すべての実部をとれば微積の範囲で議論できる。([2], 第 9 章 9.2 節に書かれた内容程度の複素微積分は微積の演習で習った人も多いでしょう。) この値は z が積分路 C に引っかかる場合を除き z について連続的に変化し、また C を動かしたときも連続的に変化することは積分論の一般論から明らかである。更に、この C の変形で途中で z に引っかからなければ値が変わらないことも Cauchy の積分定理から分かる。(Cauchy の積分定理は Green の定理で 2 次元積分に直して証明することも多いので、実部をとった形でも同様に示せる。) よって z が C から十分遠くの方に在って、 C を z に引っかからずに一点まで潰せる場合は積分値は 0 である。また、 z を線分に沿って動かすことは、 C をその逆向きに平行移動することと平面の座標系の平行移動により同等となる。よって、 z を無限遠から C の方に直線的に近づけたとき、 C にぶつかるまでは線積分の値は 0 である。最初に C にぶつかった点 P では、 C が区分的に C^1 級の仮定から、ジェネリックには (すなわちこの直線を少しずらせば) 下図の一番左の状況となる。 P の (例えば円盤状) 開近傍 U_0 を十分小さく選べば、 U_0 は C により、無限遠と折れ線で結ばれる U_0^- とその残りの U_0^+ に分かたれる。(これは、座標軸を適当に回転すれば、この範囲で C が区分的に C^1 級の関数のグラフとして書けるので、その上側、および下側として $U_0 \setminus C$ が二つの連結成分に分かれることが厳密に示せるからである。) C を ∂U_0^+ を用いて C' に変形したもの (これは $C' = C - \partial U_0^+$ から重複弧をキャンセルすれば得られる) を考えると、線積分の性質から、 z が U_0^+ に入り込んだとき

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_0^+} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

となる。ここで、 C' 上の積分は z が C にぶつかる前の C 上の積分と同じ理由で値が零となる。他方 ∂U_0^+ 上の線積分は Cauchy の積分公式により 1 となる。(Cauchy の積分公式は、 z を中心とする微小円周上の線積分値が ∂U_0^+ 上の線積分値と一致することを Cauchy の積分定理により示し、円周上の線積分は角度パラメータ θ を導入して具体的に計算するので、計算は少し面倒になるが、実部を取った微積の範囲でも可能である。) よって C 上の積分は z のこの動きで 0 から 1 に変わる。さて C 上の各点 P に対して、十分小さな円盤状開近傍を取れば、その中では下図の三つの場合のいずれかの状況となり、それは上述の理由により C により二つの連結成分に分けられる。 C は有界閉集合なので、そのような開近傍の有限個 $U_i, i = 0, 1, \dots, N$ で覆うことができる。このとき、最初の近傍 U_0 から順に C のパラメータ t の増加する向きに、 z を C の十分近くで C

に沿って両側を動かしてゆき、線積分の値を見ると、 $U_i \setminus C$ のうちで既に線積分値が 0 と決まっている開集合と交わる方 U_i^- では線積分値は 0 となり、1 と決まっている開集合と交わる方 U_i^+ では線積分値は 1 となる。こうして $U = \bigcup_{i=0}^N U_i$ という C の開近傍が得られ、 $U \setminus C = U^- \cup U^+$, $U^- = \bigcup_{i=0}^N U_i^-$, $U^+ = \bigcup_{i=0}^N U_i^+$ となった。 $\mathbf{R}^2 \setminus C$ の連結成分で U^- と交わるものを Ω^- , U^+ と交わるものを Ω^+ とせよ。 \mathbf{R}^2 の連結開集合は弧状連結なので、線積分値は $z \in \Omega^-$ のとき 0, $z \in \Omega^+$ のとき 1 であることが上と同様の論法により示せるから、これらの開集合は共通部分を持たない。あとはこれら二つの合併が $\mathbf{R}^2 \setminus C$ 全体と一致することを言えばよい。もし一致していなければ、第 3 の連結成分 Ω' が存在するが、その境界は C の一部でなければならない。しかし C のある開近傍 U が C を含んでおり、 Ω' が C と接することは不可能である。



問 7.12 の説明図

問 7.13 方程式系 $x' = a, y' = b$ は容易に求積できて、 $x = x_0 + at, y = y_0 + bt$ となる。これは通常の平面では初期点 (x_0, y_0) を通り、傾きが $\frac{b}{a}$ の直線であるが、トーラス上では x, y 座標をそれぞれ mod 1 しなければならないので、例えば x 座標が 1 に到達したときは、そこから 1 を減じなければならない。出発点を変えても軌道のパターンは全体が平行移動(トーラス面では軸の回りに回転)するだけだから、原点から出発する軌道を見れば十分である。また対称性により $b > a$ としても一般性を失わない。全体像を把握しやすいよう、軌道全体でなく軌道と x 軸との交点の座標の変化を見る。よって 0 の次は $y = bt = 1$ となったときの x 座標で $\frac{a}{b}$, 次はもし最初にまた $y = 1$ に到達すれば、 $2\frac{a}{b}$ であるが、 $x = 1$ に先にぶつかっても x 座標を mod 1 するだけなので、結局 $x = 1$ を無視して進んで $y = 1$ にぶつかったときの x 座標の値 $2\frac{a}{b}$ を mod 1 すればよい。よって、この軌道と x 軸との交点は $n\frac{a}{b} \text{ mod } 1, n = 1, 2, \dots$ となる。 $\frac{b}{a}$ が有理数だと、 n が(約分後の)その分母で初めて割りきれるところまで進んだとき、これは mod 1 で零となるので、原点に帰る。よって軌道はこのときの時刻 t を周期とする周期軌道となる。 $\lambda = \frac{b}{a}$ が無理数のときは、 $n\lambda \text{ mod } 1 = n\lambda - [n\lambda]$, ここに $[\]$ は Gauss 記号(情報科学で $\lfloor \]$ と書くもの)なので、ヒントに書かれた Weyl の定理により、この点列は区間 $[0, 1]$ で稠密となる。よってこれらを x 切片とする直線の列も正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 内で稠密となる。これはこの軌道がトーラス面内で稠密な集合となることを意味する。

問 7.14 近日中に数学科の人にも使えるような参考プログラムを置く予定ですが、取り敢えずは著者が用いた FORTRAN プログラムを参考までに置いておきます。簡単な使用法は lemniscate.f の頭に記しておきましたが、詳細は『数値計算講義』のサポートページをご覧ください。このプログラムもそこに置かれた見本プログラムの関数を置き換えただけのものなので、使い方が分かれば自分でいろんな自励系の解軌道を描いてみる事ができます。

問 7.15 このことは、極限閉軌道の定義に使われた最初の解軌道 1 本については定義から自明なので、この軌道の上に無い他の点から出発したときのことを調べればよい。今 $(x(t), y(t))$ が (x_0, y_0) を出発し極限閉軌道 γ に漸近してゆく解軌道とし、 (x_0, y_0) から最短距離にある γ の点を (x_∞, y_∞) とする。 $(\gamma$ は有界閉集合なので、このような点は確定する。これは Bolzano-Weierstrass の定理を使えば証明できる。[5], 問題 14.7 のウェブ解答参照。) (x_0, y_0) と (x_∞, y_∞) を線分 l で結び、この解軌道が最初に l と交わる点を (x_1, y_1) , 2 度目に交わる点を (x_2, y_2) とすれば、 (x_1, y_1) から出発して (x_2, y_2) に終わる軌道の弧とこれら 2 点を結ぶ線

分を繋いでできる閉曲線 C の内部でかつ γ の外部である領域 U^+ が近傍 U の半分の候補となる。実際、 U^+ の点から出発した軌道は、最初の軌道とは交わることができないので、 U^+ 内に閉じ込められる。のみならず、 $t \rightarrow \infty$ のときは、同じ理由により、最初の軌道の少し内側を通過して γ に巻きついてゆかざるを得ない。 γ の内側から同様に U^- を作れば、 $U = U^+ \cup \gamma \cup U^-$ が求める近傍となり、この中の任意の点から出発する解軌道は U 内に留まるのみならず、 $t \rightarrow \infty$ のとき γ のいくらでも小さな近傍にやがて含まれる。

問 7.16 (準備中)

問 7.17

$$x' = -y - z, \quad y' = x + ay, \quad z' = bx + z(x - c)$$

において $X = x + ab$, $Y = y - b$, $Z = z + b$ と置換すれば、

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} = -Y - b - Z + b = -Y - Z,$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} = X - ab + a(Y + b) = X + aY,$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dz}{dt} = b(X - ab) + (Z - b)(X - ab - c) = Z(X - ab - c) + bc$$

よってそれぞれ bc , $ab + c$ を新しい定数 b , c と思えば、所与の形となる。

問 7.18 (準備中)

第 8 章 (以下, 準備中)