

『基礎演習 微分方程式』に対するウェブ注

例題 1.4 その 1 の微分方程式の解

折角導いた方程式の解が無くてはブーイングを受けるかもしれないので、ここに記しておきます。

方程式は通分すると $y^2((y')^2 + 1) = 2Sy'$ と書ける。これは y' について 2 次方程式なので、解くと

$$y' = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - y^4}}{y^2} \quad (\text{W.1})$$

となる。よって変数分離して積分でき、

$$dx = \frac{y^2 dy}{S \pm \sqrt{S^2 - y^4}}, \quad \therefore x = \int \frac{y^2 dy}{S \pm \sqrt{S^2 - y^4}} + C \quad (\text{W.2})$$

と解ける。しかしこの積分は不完全楕円積分と呼ばれるもので、一般には初等関数の範囲で求まらない。普通はここであきらめて答とするので、微分方程式を解く問題としてはつまらないものだが、元々の幾何学的問題は結構おもしろいので、もう少し解の様子を調べてみよう。まず、本書の例題の解答中でも述べたように、本当は絶対値をつけるべきであるが、上のような符号の選択にした場合は必然的に $y' > 0$ となる。しかし、第 1 象限で y が増加してしまつては、問題の 3 角形は面積がどんどん大きくなってしまつてしまうので、この場合は求める曲線は第 4 象限に有り $y < 0$ で単調増加して、 $y \rightarrow 0$ となつていなければならない。すると、(W.1) の複号は $-$ でなければならず、 y が十分小さいとき、すなわち x が大きいときには

$$y' = \frac{S - \sqrt{S^2 - y^4}}{y^2} = \frac{S - S\sqrt{1 - \frac{y^4}{S^2}}}{y^2} = \frac{S - S\{1 - \frac{y^4}{2S^2} + O(y^8)\}}{y^2} = \frac{1}{2S}y^2 + O(y^6)$$

となるから、 $x = a$ から積分して

$$\int_a^x dx = \int_b^y \frac{dy}{\frac{1}{2S}y^2 + O(y^6)} = 2S \int_b^y \frac{1}{y^2} (1 + O(y^4)) dy = 2S \int_b^y \left(\frac{1}{y^2} + O(y^2) \right) dy$$

すなわち、

$$x - a = 2S \left[-\frac{1}{y} + O(y^3) \right]_b^y \doteq -\frac{2S}{y} + C$$

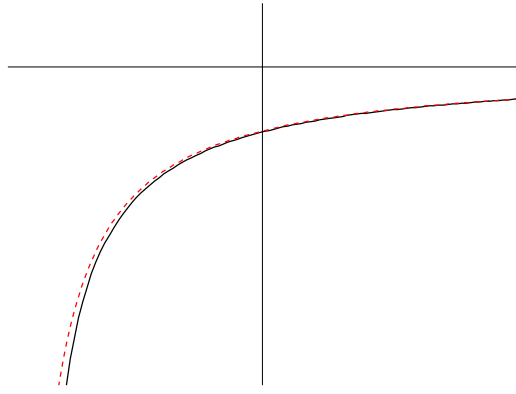
従つて、主部は

$$y = -\frac{2S}{x - c} \quad (\text{W.3})$$

の形となる。方程式、あるいは解 (W.2) から分かるように、この微分方程式の任意定数は、 x 座標の平行移動分だけで、それはこの漸近形に c として現れている。以上を勘案して (W.2) の積分を数値的に実行するには、十分大きな a に対して $c =$ を適当に選び、 $b = -\frac{2S}{a - c}$ から定まる b を用いて (a, b) から逆向きに数値積分を実行するとよい。誤差を小さくするため $z = \frac{1}{y}$ を積分変数に取り、 z の方で等間隔分割を用いると

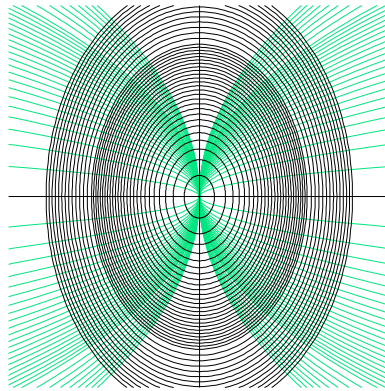
$$x - a = \int_y^b \frac{y^2}{S - \sqrt{S^2 - y^4}} dy = \int_y^b \frac{S + \sqrt{S^2 - y^4}}{y^2} dy = \int_{1/b}^{1/y} \left(S + \sqrt{S^2 - \frac{1}{z^4}} \right) dz$$

これを $S = 1, a = 10, c = -10, b = -0.1$ のときに数値積分を実行したものを、(W.3) のグラフと同時描画して掲げる。描画範囲は $-10 \leq x \leq 10, -1 \leq y \leq 0.2$ で、 y 方向は 12.5 倍に拡大されている。結構近似がよいことが見て取れるであろう。



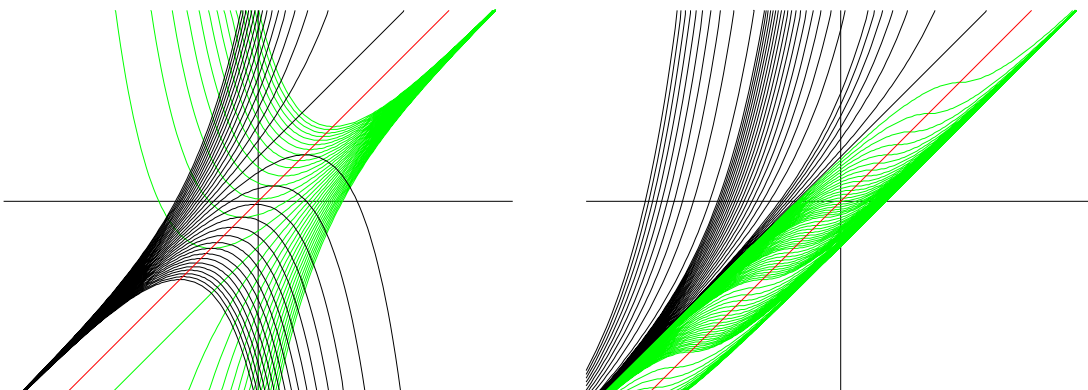
例題 1.4 その2のグラフの原図

青緑色が元の曲線族（ただし x 軸だけは黒色になっているが、2本の縮退したメンバーと重なっている）、黒色で描かれた楕円たちがそれに直交する曲線族である。いずれも横着をしてパラメータ c の増分を一定にすると、どんどん詰まっていくので途中で増分を切り替えたため、境目ができている。なお、両曲線族は領域の端の方では直交していないように見えるが、これは一種の錯覚現象のようである。実際、顔を 90° 回転させて見ると直交しているように見えてくる。



問題 1.4.1 の解曲線

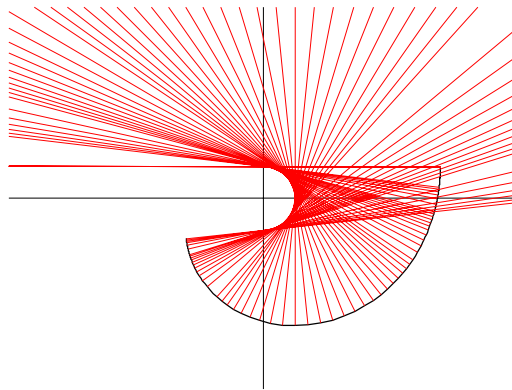
問題 2.17.3 で与えられている解のグラフを示す。左が絶対値をはずした方程式の2種の解曲線族の図、右がもとの幾何的問題に対応するように、傾きが到る所非負となるよう、2種の解曲線を $y = x$ 上で連続につないだもの。（描画範囲はいずれも $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$ 。）



問題 1.4.2 の円周の族はさすがにグラフを省略してもよいでしょう。

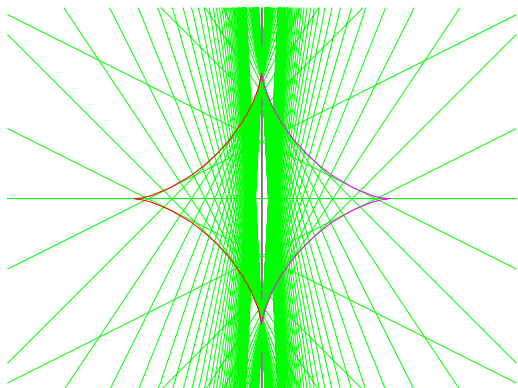
問題 1.4.3 への補遺

ここで導かれた微分方程式は問題 2.1.3 で解かれているが、この解は式を見ただけでは分かりにくいので、解曲線の 1 本 ($c = -4$ の場合) とその上の点から引いた法線を示す。これから法線が確かに原点を中心とする半径 1 の円周に接していることが見て取れるであろう。この解は後者の伸開線 (問題 2.17.5) と呼ばれるもので、螺旋の一種である。(描画範囲は $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$.)

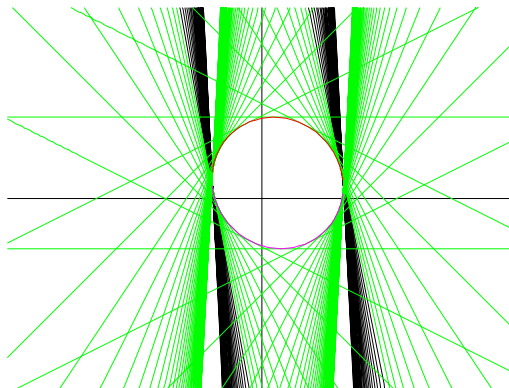


問題 1.4.4 の解曲線

問題 2.17.3 で与えられている解のグラフを下左に示す。赤いアステロイドのみが幾何学的に意味のある解である。(定数 $a = 4$, 描画範囲は $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$.)



問題 1.4.4 の解曲線

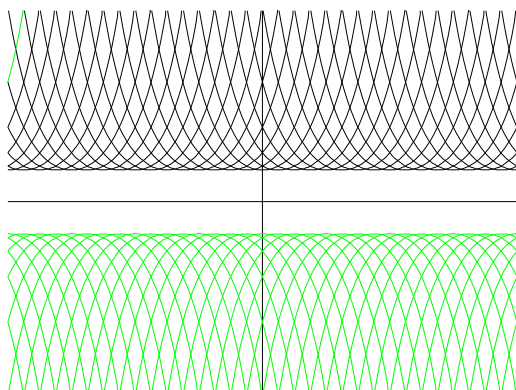


問題 1.4.5 の解曲線

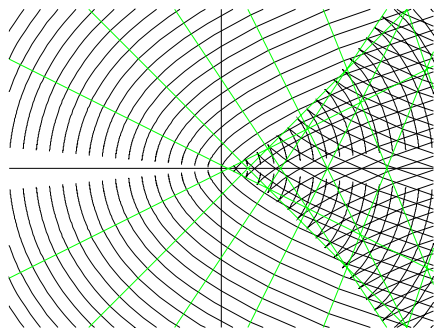
問題 1.4.5 の解曲線

問題 2.17.3 で与えられている解のグラフを上右に示す。この場合も幾何学的に意味があるのは、包絡線となる楕円である。(定数 $a = 4$, 描画範囲は $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$.)

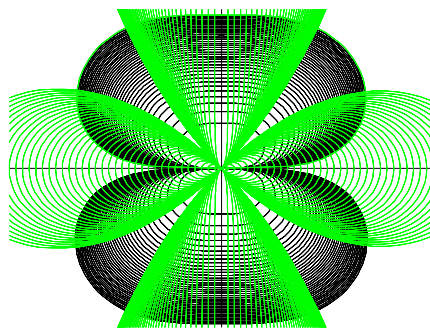
問題 1.4.6 の解曲線 $y = \cosh(ax + c)$ はよく知られた関数だが、任意定数による違いを見るため一応グラフを与えておく。($y = -\cosh(ax + c)$ の方は緑色で示した。) これから特異解 $y = \pm \frac{1}{a}$ も見えてくる。(定数 $a = 1$, 描画範囲は $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$.)



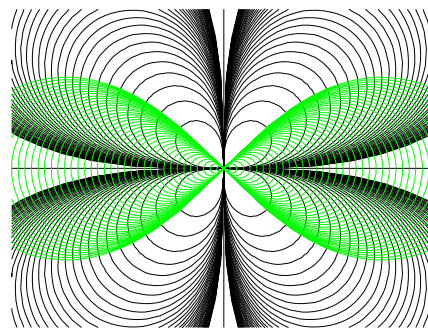
問題 1.4.7 の解曲線 問題 1.4.7 の解曲線の一部を下図に示す。緑色の直線はもとの直線族を示す。直交していることが分かるであろう。



問題 1.4.7(2) (問題 2.17.3)



問題 1.4.7(10) (問題 2.2.2)

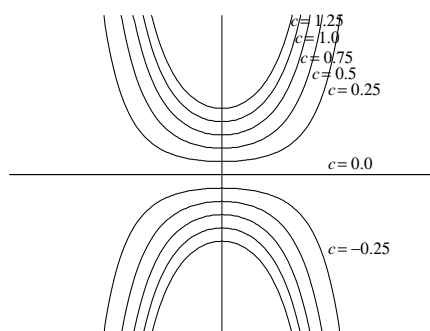


問題 1.4.7(11) (問題 2.2.2)

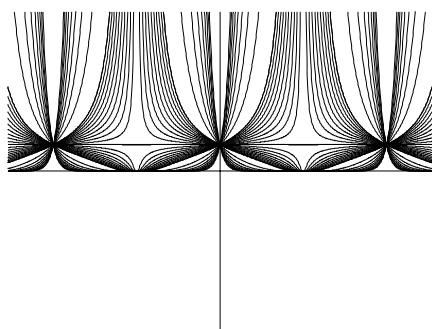
問題 1.4.7(2) の元の曲線族は直線の族で包絡線を持つ. それに直交する曲線族の方はこの包絡線を尖点の軌跡として持っていることが分かるであろう.

問題 1.4.7(11) の元の曲線族は, $c^2 \geq 0$ とすれば $x^2 - y^2 < 0$ の範囲には存在しない. しかしこれに直交する曲線族の方はそのような領域にも入り込んでいる. これはもともと c^2 というパラメータの入り方が不自然なのであって, 単に c としておけば $c < 0$ のときにここにも曲線のメンバーが現れ, それは今表示されているものを 90° 回転させたものとなる. あるいは, 元のパラメータのまま, c が純虚数のときに相当すると考えてもよい. 直交関係は解析的な式で表されるので, そのような場合にも必然的に成り立つ.

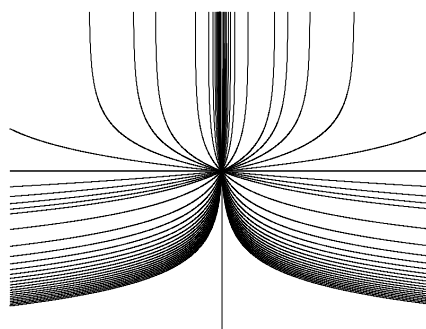
例題 2.1 その 1 の解曲線の一部 これは非常に平凡な図ですが, 最初本書に載せるつもりで, 任意定数の変化とともに解曲線が動いていく説明図として用意したものです. 紙数の都合で掲載しないことになりましたが, 微分方程式の解曲線の最初の例として分かりやすいので, ここに載せておきます.



問題 2.1.2 の解曲線 一部の微妙なグラフについて載せておく. 描画範囲はいずれも $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$.



問題 2.1.2(11)



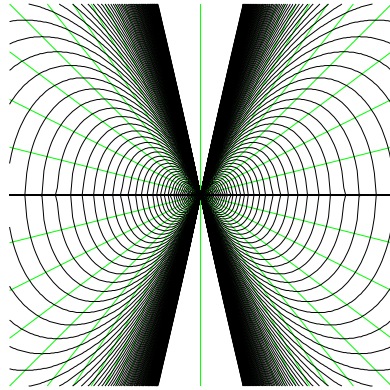
問題 2.1.2(15)

(11) の方は, 求積法の計算としては \log の中身に絶対値をつける必要は無いが, グラフを描くときは (あるいは実用的な問題に応用するとき) 中身が負になる場合は任意定数を純虚数に取り替えなければならないので, 最初から絶対値をつけておいた方がよい.

(15) の方は計算の流れからも分かるが \log の中身に絶対値をつけると無縁な解を取り込んでしまう. 形式的に絶対値をつける習慣の人は注意せよ.

例題 2.2 の解曲線のグラフ

緑色は勾配場を見るための補助直線，黒色が解のグラフです．横着して $y = x\sqrt{c - 2\log|x|}$ と $y = -x\sqrt{c - 2\log|x|}$ を別々に描いたので，繋ぎ目が少しゆがんでいます． ($-20 \leq c \leq 20$ で 0.2 刻み, $-4 \leq x, y \leq 4$.)



問題 2.8.1 (3) の解答への補遺

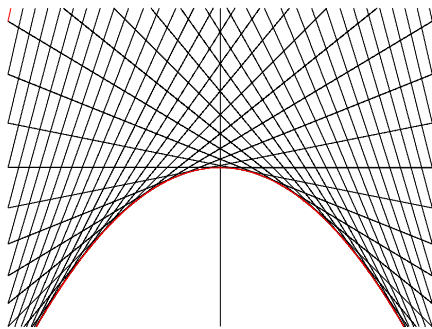
この問題は，線積分を先に y についてやろうとすると，始点をいつものように原点に取ったのでは被積分関数が無限大になってしましますが，始点を例えば $(1, 0)$ に取れば，

$$F(x, y) = \int_0^y 1 dy + \int_1^x \left(-\frac{y}{x^2}\right) dx = y + \frac{y}{x} - y = \frac{y}{x} = C$$

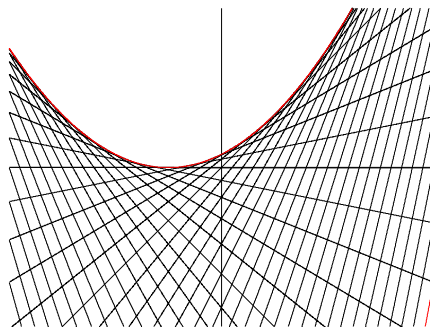
と，同じ答が得られる．なお，本問は (2.14) の $m = -1, n = 1$ の場合でもある．

問題 2.11.1 の解答への補遺

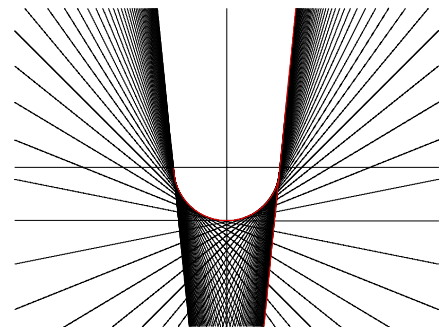
本書の解答に載せなかったものについて解曲線の図を示す．特異解は赤線で区別してある．以下の図の描画範囲はいずれも $-4 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 3$ である．



問題 2.11.1(1)

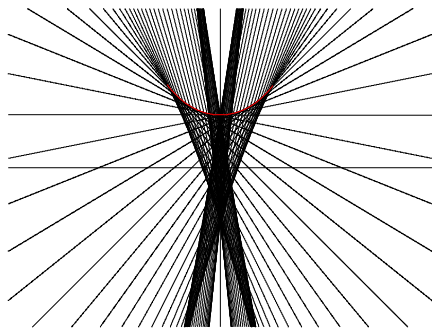


問題 2.11.1(2)

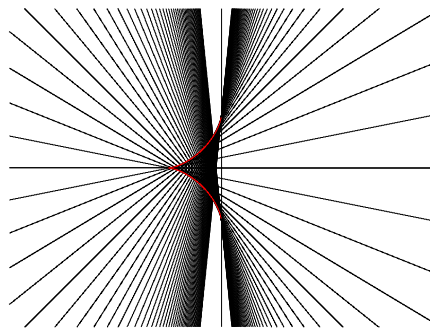


問題 2.11.1(3)

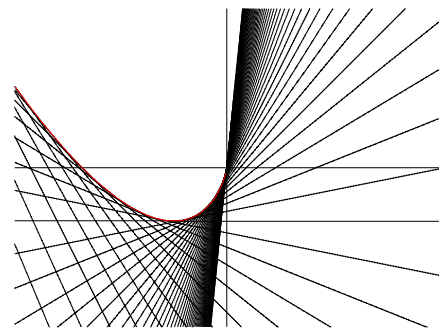
(3) の特異解の包絡線は有界な半円弧であるが，図を見るとそれに一般解の極限位置にある 2 本の半直線 $x = \pm 1$ ($y \geq 0$) が続いて非有界な曲線を形成しているように見える．なお上の半円弧は方程式 $y = xp + \sqrt{1+p^2}$ の特異解である．



問題 2.11.1(5)



問題 2.11.1(6)

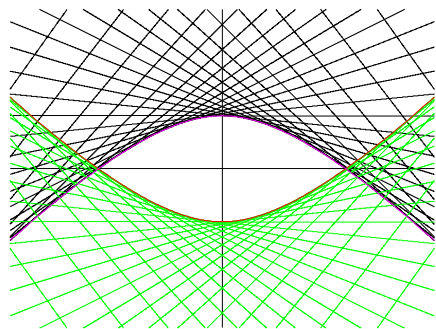


問題 2.11.1(8)

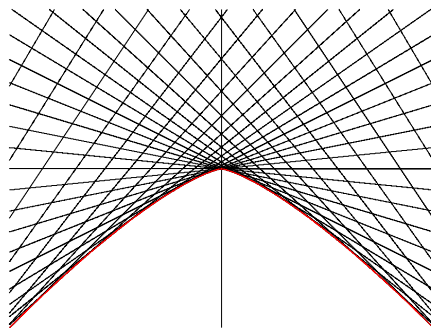
(5) の特異解である包絡線は $-1 \leq x \leq 1$ の部分だけに存在する。

(6) の特異解である包絡線は $-1 \leq x \leq 0$ の部分だけだが、 y 軸上そこから上下に一般解の極限位置にある 2本の半直線 $x = 0$ ($\pm y \geq 1$) が続いて非有界な曲線を形成しているように見える。なお、特異解の表現からは $x \geq 0$ にも同様の尖点を持った曲線が現れるように見えるが、解答の途中の式 $x = -\frac{p}{(1+p^2)^{3/2}}$ から $x \leq 0$ という制限が付く。 $x \geq 0$ の部分は、もとの方程式と親戚関係にある $y = xp - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ の特異解である。

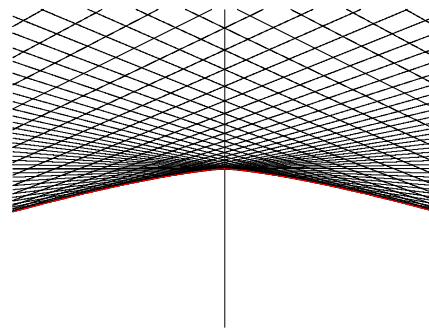
(8) の特異解である包絡線は $x \leq 0$ の部分だけだが、 y 軸上そこから上方に一般解の極限位置にある 1本の半直線 $x = 0$ ($y \geq 0$) が続いているように見える。



問題 2.11.1(9)



問題 2.11.1(10)

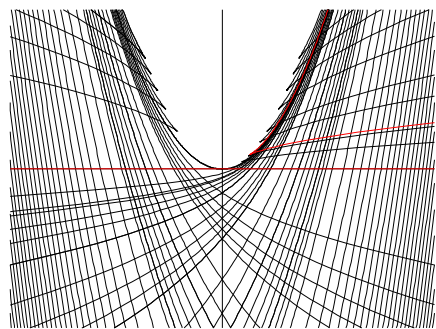


問題 2.11.1(10)(拡大図)

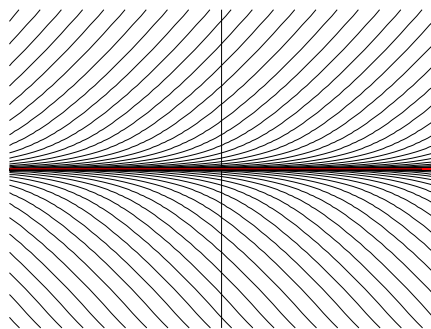
(10) の特異解は $-x^{4/3}$ の定数倍なので、原点では一応水平な接線を持つが、相当拡大しないとそのことが見えない。拡大図の描画範囲は $-0.08 \leq x \leq 0.08$, $-0.06 \leq y \leq 0.06$ である。

問題 2.12.1 の解答への補遺

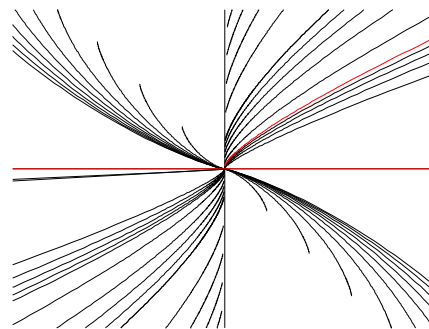
本書の解答に載せなかったものについて解曲線の図を示す。特異解は赤線で区別してある。描画範囲は特に指示されていないならば $-4 \leq x \leq 4$, $-3 \leq y \leq 3$ 。



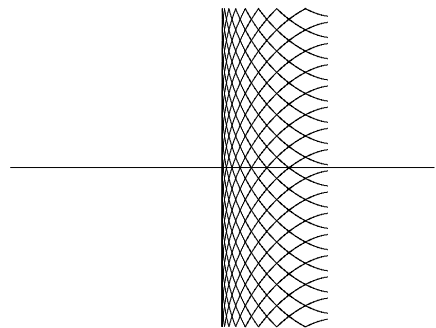
問題 2.12.1(1)



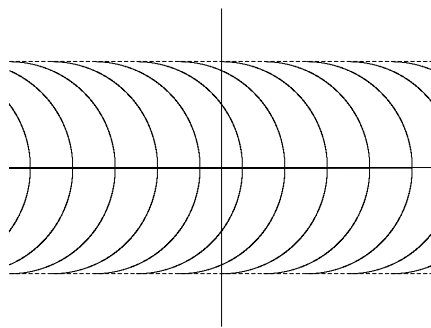
問題 2.12.1(2)



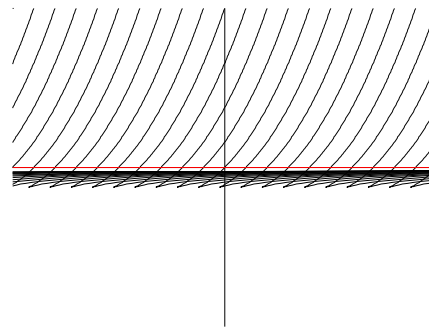
問題 2.12.1(3)



問題 2.12.1(4)

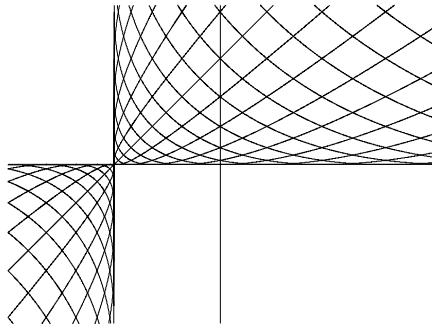


問題 2.12.1(5)

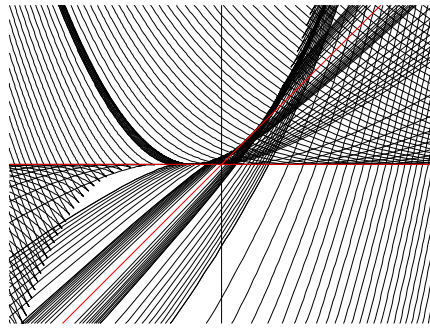


問題 2.12.1(6)

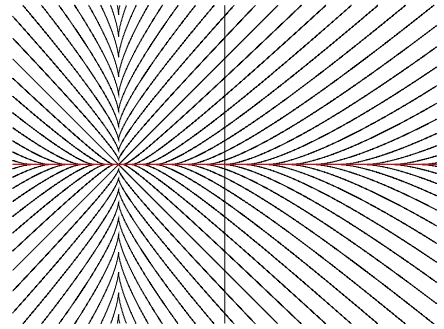
(4), (5) の描画範囲は $-2 \leq x \leq 2$, $-1.5 \leq y \leq 1.5$ 。



問題 2.12.1(7)

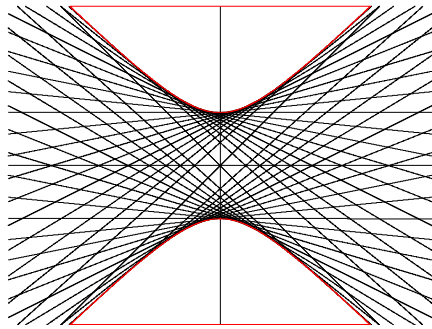


問題 2.12.1(8)

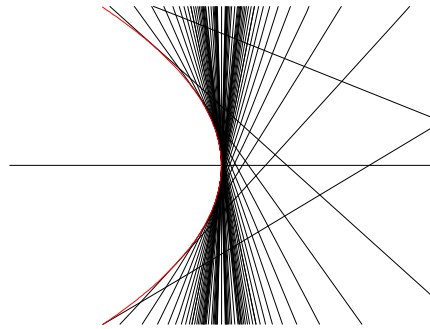


問題 2.12.1(9)

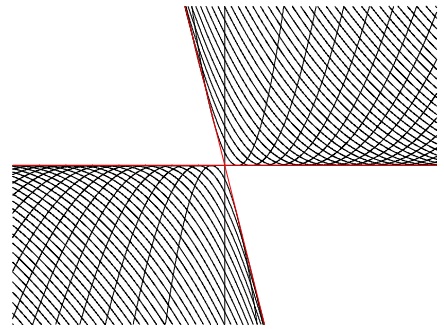
(7) の描画範囲は $-2 \leq x \leq 2, -1.5 \leq y \leq 1.5$.



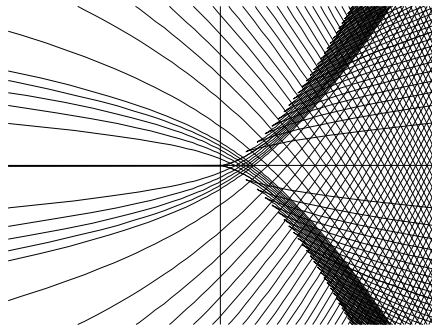
問題 2.12.1(10)



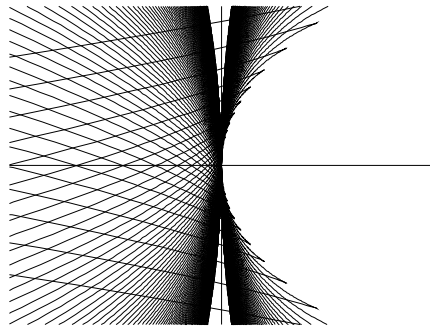
問題 2.12.1(11)



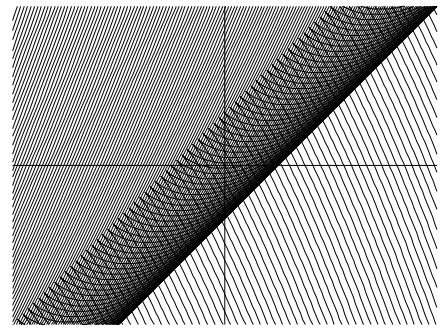
問題 2.12.1(13)



問題 2.12.1(14)

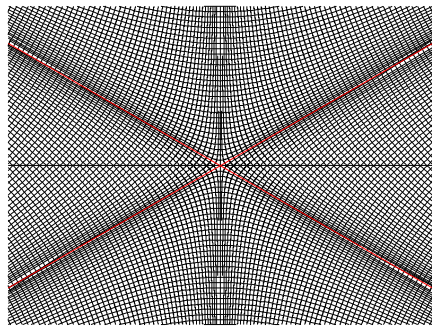


問題 2.12.1(15)

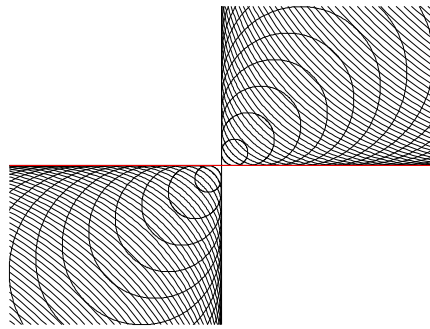


問題 2.12.1(16)

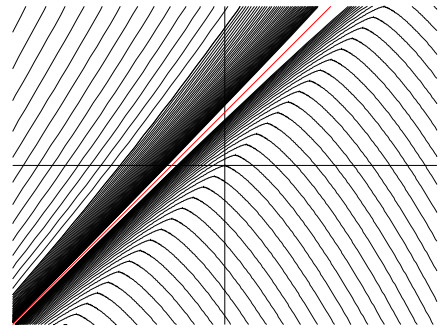
(14) の描画範囲は $-2 \leq x \leq 2, -1.5 \leq y \leq 1.5$, (15), (16) の描画範囲は $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$.



問題 2.12.1(17)

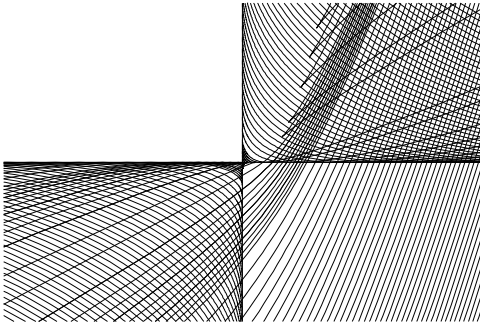


問題 2.12.1(18)

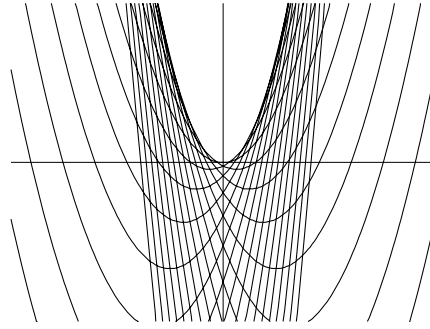


問題 2.12.1(20)

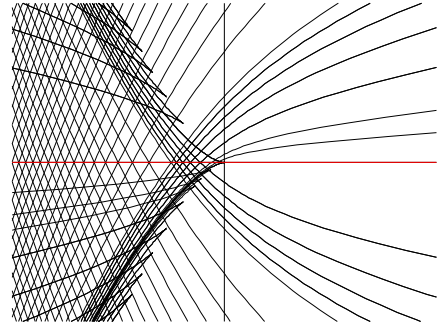
(17) の描画範囲は $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$.



問題 2.12.1(21)



問題 2.12.1(22)



問題 2.12.1(23) ($a = 2, b = 3$)

(21) の描画範囲は $-12 \leq x \leq 12, -8 \leq y \leq 8$, (22) の描画範囲は $-8 \leq x \leq 8, -6 \leq y \leq 6$.

問題 2.13.1 (9) の解答への補遺 $(xy')^3 + xy' = y^3$ を xy' の 3 次方程式と見て、カルダーノの公式を適用するため、まず公式を思い出すと、 $x^3 + qx + r = 0$ に対しては、 $D = \frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ とするとき、この量が正なら、実根はただ一つで、

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{D}}$$

で与えられる。今の場合は $D = \frac{y^6}{4} + \frac{1}{27} > 0$ なので、上の公式を適用すると

$$xy' = \sqrt[3]{-\frac{y^3}{2} + \sqrt{\frac{y^6}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{y^3}{2} - \sqrt{\frac{y^6}{4} + \frac{1}{27}}} \dots \textcircled{1}$$

従って

$$\log x + C = \int \left(\sqrt[3]{-\frac{y^3}{2} + \sqrt{\frac{y^6}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{y^3}{2} - \sqrt{\frac{y^6}{4} + \frac{1}{27}}} \right)^{-1} dy.$$

この積分は実行できそうにないが、実は本書に載せた解答も不定積分を残した形であった：

$$x = c \exp \left(\int \frac{3z^2 + 1}{3z(z^3 + z)^{2/3}} dz \right), \quad y = (z^3 + z)^{1/3} \dots \textcircled{2}.$$

後者より $y^3 = z^3 + z \dots \textcircled{3}$, 従って $3y^2 dy = (3z^2 + 1) dz$. これから z を求めて前者に代入すれば、結局上の表現に帰着する：

$$x = c \exp \left(\int \frac{3z^2 + 1}{3zy^2} dz \right) = c \exp \left(\int \frac{3y^2 dy}{3zy^2} \right) = c \exp \left(\int \frac{dy}{z} \right),$$

ここに z は 3 次方程式 ③ から y の関数として表され、それは ① に他ならない。よってこれは ② に帰着する。

問題 2.15.2 (3) の解答への補遺 例題 2.15 その 1 より、(3) の方程式 $\frac{dy}{dx} - y^2 = x^{-8/3}$ に $a = -1, b = 1, \alpha = -8/3$ として $x = A\xi, y = B\eta$, ここに $A = (-1)^{3/2} = e^{3\pi i/2}, B = -1/A = e^{-\pi i/2}$ を代入すれば (2) の方程式 $\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \xi^{-8/3}$ に (形式的に) 帰着する。($A = B = -i$ と考えてもよいが、 $A^{-8/3} = 1$ になるためには $A = -i$ は $e^{-\pi/2}$ と考えてしまってはだめである) よって、(2) の解

$$\eta = \xi^{-4/3} \frac{1 + ce^{6/\xi^{1/3}}}{1 + \frac{\xi^{1/3}}{3} + c(\frac{\xi^{1/3}}{3} - 1)e^{6/\xi^{1/3}}} + \frac{1}{\xi}$$

にこの逆変換 $\xi = x/A, \eta = y/B$ を代入すれば (3) の解が得られるはずである。(このような変換は複素変数まで広げれば正当化され、関数論の一致の定理により結果を実領域に制限したものも正しい。あるいは、ここで現れる

微分の計算は代数的なので、代数的に変換しても微分方程式は保たれると思ってもよいだろう。) $A^{1/3} = e^{\pi/2i} = i$ に注意して

$$y = B\eta = e^{-\pi i/2} x^{-4/3} \frac{1 + ce^{-6i/x^{1/3}}}{1 + i\frac{x^{1/3}}{3} + c(i\frac{x^{1/3}}{3} - 1)e^{6i/x^{1/3}}} + \frac{AB}{x}$$

$$= x^{-4/3} \frac{i(1 + ce^{-6i/x^{1/3}})}{1 + i\frac{x^{1/3}}{3} + c(i\frac{x^{1/3}}{3} - 1)e^{-6i/x^{1/3}}} - \frac{1}{x}.$$

最後の巨大分数は c を複素数でうまく選べば実になるはずである. 今, $c = e^{-2\gamma i}$ と置いて, 分母・分子に $e^{3i/x^{1/3} + \gamma i}$ を掛けると,

$$y = x^{-4/3} \frac{i(e^{3i/x^{1/3} + \gamma i} + e^{-3i/x^{1/3} - \gamma i})}{(1 + i\frac{x^{1/3}}{3})e^{3i/x^{1/3} + \gamma i} + (i\frac{x^{1/3}}{3} - 1)e^{-3i/x^{1/3} - \gamma i}} - \frac{1}{x}$$

$$= x^{-4/3} \frac{2i \cos(\frac{3}{x^{1/3}} + \gamma)}{2i \sin(\frac{3}{x^{1/3}} + \gamma) + 2i\frac{x^{1/3}}{3} \cos(\frac{3}{x^{1/3}} + \gamma)} - \frac{1}{x}$$

$$= x^{-4/3} \frac{\cos(\frac{3}{x^{1/3}} + \gamma)}{\sin(\frac{3}{x^{1/3}} + \gamma) + \frac{x^{1/3}}{3} \cos(\frac{3}{x^{1/3}} + \gamma)} - \frac{1}{x}$$

$$= x^{-4/3} \frac{1}{\tan(\frac{3}{x^{1/3}} + \gamma) + \frac{x^{1/3}}{3}} - \frac{1}{x}$$

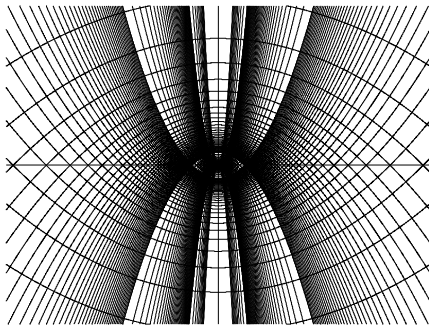
本書の方に書いたのと形が異なるが, これも確かに解である. 試しに 3 角関数の加法定理を用いてみると,

$$\frac{1}{\tan(\frac{3}{x^{1/3}} + \gamma) + \frac{x^{1/3}}{3}} = \frac{1 - \tan \frac{3}{x^{1/3}} \tan \gamma}{\tan \frac{3}{x^{1/3}} + \tan \gamma + \frac{x^{1/3}}{3}(1 - \tan \frac{3}{x^{1/3}} \tan \gamma)}$$

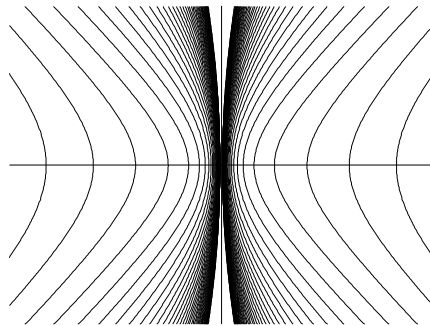
$$= \frac{1 - \tan \frac{3}{x^{1/3}} \tan \gamma}{(1 - \frac{x^{1/3}}{3} \tan \gamma) \tan \frac{3}{x^{1/3}} + \frac{x^{1/3}}{3} + \tan \gamma}$$

これは $1/\tan \gamma$ を c とすれば, 確かに本書に載せた解答と一致する. 計算としてはこちらの方が長くなってしまったかもしれない. (^-^;

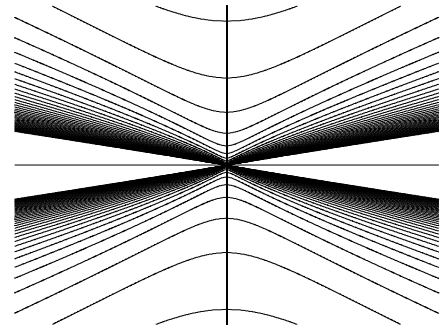
問題 2.17.1 の解曲線のグラフ 描画範囲は特に示されていないものはすべて $-4 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 3$ である.



問題 2.17.1(4)



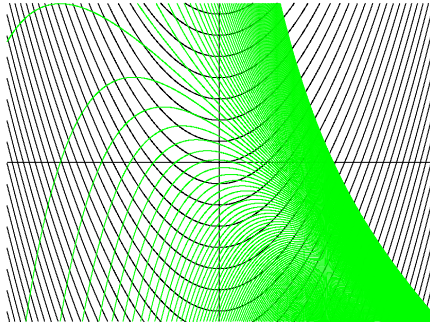
問題 2.17.1(8)



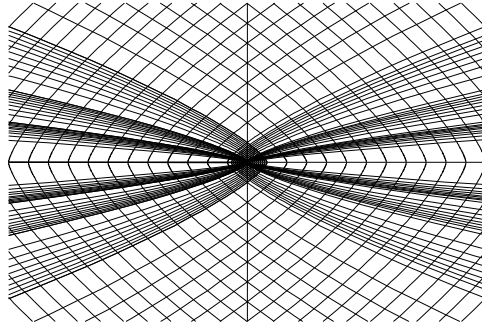
問題 2.17.1(13)

(8) は $x = -c \pm \sqrt{y^2 + c^2 + 1}$ と変形して描画した方が簡単.

(13) は $x = \pm \sqrt{2y^2(\log |y| + C)}$ として描画した. パラメータ C を等間隔でサンプリングしているのだから, x 軸の回りに穴が有るように見えるが, C の値を更に大きくしてゆくと, 解曲線はぎっしりと詰まりながら x 軸に近づいて行く. ここをきれいに描くには, C の値を等比数列的に増大させればよい.

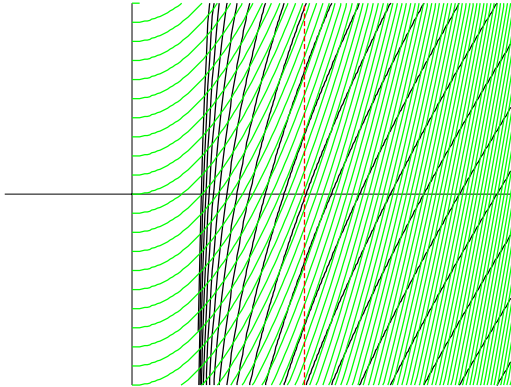


問題 2.17.1(15)

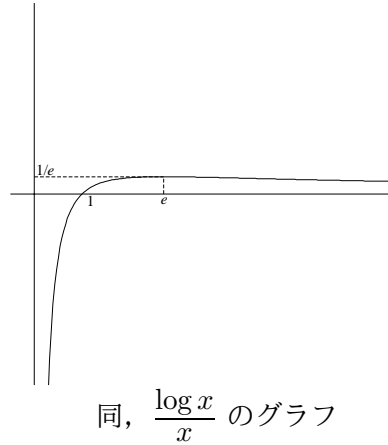


問題 2.17.1(16)

(16) の描画範囲は $-12 \leq x \leq 12, -8 \leq y \leq 8$.

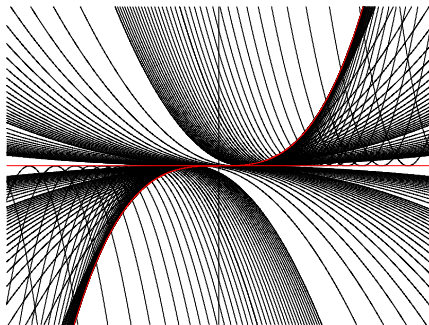


問題 2.17.1(20)

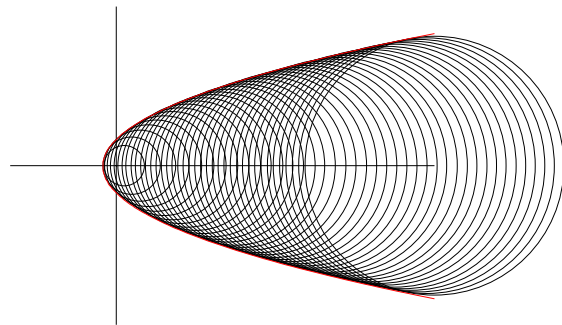


同, $\frac{\log x}{x}$ のグラフ

(20) の描画範囲は $-2 \leq x \leq 6, -3 \leq y \leq 3$ で、黒がパラメータ表示の一般解、緑が $y' = x$ の積分曲線を表す。本書の解答の注に書いたように、両者は関数 $y = \frac{\log x}{x}$ (そのグラフは右に掲げた) が最大値を取る点 $x = e$ で滑らかにつなげることができる。



問題 2.17.1(21)



問題 2.17.1(22) ($a = 1$)

(22) の描画範囲は、 $-2 \leq x \leq 6, -3 \leq y \leq 3$ だが、円の族が $x = 6$ から右に飛び出している。

問題 3.2.4 の解答への補遺 (i) 積分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}}$$

の値の計算を示す。 D を第 1 象限とし、重積分

$$\iint_D \frac{e^{-x^2-y^2}}{\sqrt{y}} dx dy$$

を直角座標と極座標の二通りで計算する。 まず直角座標は

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{y}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{-3/4} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

次に極座標では

$$\begin{aligned} &= \iint_D \frac{e^{-r^2}}{\sqrt{r \sin \theta}} r dr d\theta = \iint_D \sqrt{r} \frac{e^{-r^2}}{\sqrt{\sin \theta}} dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{-1/4} ds \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} \end{aligned}$$

ここでガンマ関数の有名な公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin s}$ を用いた。よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} &= \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3.625609908221908\dots^2}{2 \times 1.414213562373095\dots \times 1.772453850905516\dots} \\ &= 2.622057554292\dots \end{aligned}$$

(ii) 等時性の条件からそれを満たす曲線がサイクロイドになることを示す。ただし簡単のため、曲線は左右対称で、 $f(x)$ は解析関数であると仮定する。このとき 4 半周期から定数因子を除いた積分

$$\int_0^{x_C} \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{C-f(x)}} dx$$

が C によらない条件を解析すればよい。ここに $f(x_C) = C$, $x_C > 0$ とする。仮定により $f(x)$ は原点でテイラー展開

$$f(x) = a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots, \quad a_2 \geq 0$$

を持つ。ここで更に簡単のため $a_2 > 0$ と仮定すると、

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots} = \sqrt{a_2} x \{1 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \dots\}$$

という解析関数が確定する。今 $z = \sqrt{f(x)}$ と置けば、これは逆に解け、

$$x = g(z) = \frac{1}{\sqrt{a_2}} z \{1 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots\}$$

と書ける。このとき

$$1 = g'(z) \frac{dz}{dx} = g'(z) \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x),$$

従って

$$f'(x) = \frac{2z}{g'(z)}$$

が成り立つ。よって上の積分は、

$$\int_0^{\sqrt{C}} \frac{\sqrt{1 + \frac{4z^2}{g'(z)^2}}}{\sqrt{C-z^2}} g'(z) dz = \int_0^{\sqrt{C}} \frac{\sqrt{4z^2 + g'(z)^2}}{\sqrt{C-z^2}} dz$$

と変換される。ここで更に $\frac{z}{\sqrt{C}} = w$ と変換すれば、これは

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{4Cw^2 + g'(\sqrt{C}w)^2}}{\sqrt{1-w^2}} dw$$

となる。ここで、

$$g'(z) = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \{1 + 3c_2 z^2 + 5c_4 z^4 + \dots\}$$

に注意すると,

$$4Cw^2 + g'(\sqrt{C}w)^2 = +\frac{1}{a_2} + (4 + 6c_2)Cw^2 + C^2d_4w^4 + \dots$$

となる. よって

$$\sqrt{4Cw^2 + g'(\sqrt{C}w)^2} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} + (2 + 3c_2)\sqrt{a_2}Cw^2 + \dots$$

となるが, これを項別積分すると, C の冪級数が得られるが, C^n の係数は

$$\int_0^1 \frac{w^{2n}}{\sqrt{1-w^2}} dw$$

に積分する前の w^{2n} の係数が掛かったものとなる. この積分はすべて正の値なので, 上の量が C に依存しないためには, C の級数は積分する前から定数項以外すべて消えていなければならない. これは,

$$\sqrt{4Cw^2 + g'(\sqrt{C}w)^2} - \frac{1}{\sqrt{a_2}} = 0$$

が恒等的に成り立たねばならないということである. 従って $\sqrt{C}w$ を z に置き戻せば, g が満たす微分方程式

$$4z^2 + g'(z)^2 = \frac{1}{a_2}$$

が得られた. a_2 は任意定数のようなものなので, この右辺を $4c^2$ と置けば, これより

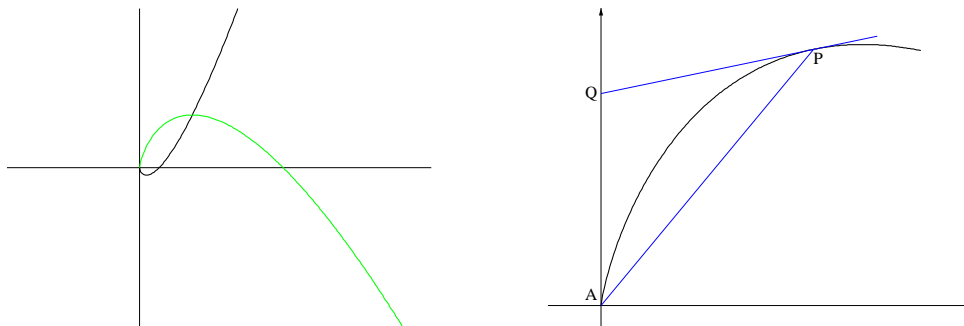
$$g'(z) = 2\sqrt{c^2 - z^2}, \quad \therefore x = g(z) = 2 \int \sqrt{c^2 - z^2} dz = z\sqrt{c^2 - z^2} + c^2 \text{Arcsin} \frac{z}{c}.$$

が得られた. これと $y = f(x) = z^2$ を合わせたものが, z をパラメータとする解となる. $z = c \sin t$ と置けば,

$$x = c^2 \sin t \cos t + c^2 t = \frac{c^2}{2}(2t + \sin 2t), \quad y = c^2 \sin^2 t = \frac{c^2}{2}(1 - \cos 2t)$$

従って, $\theta = 2t$, $a = \frac{c^2}{2}$ と置けば, 演習書の問題 3.2.4 で扱ったサイクロイドをひっくり返したものとなっていることが分かった.

問題 3.16.4 (4) の解答への補遺 下左に $c_1x + c_2x \log x$ のグラフを示す. 黒が $c_1 = c_2 = 1$, 緑が $c_1 = 1, c_2 = -1$ の場合で, 描画範囲は $-2.5 \leq x \leq 5.5, -3 \leq y \leq 3$ である. これを見ると, 問題 3.3.2 の挿絵に該当するのは $c_2 < 0$ の場合であることが分かる. そこで, 任意定数を調節して手書きの概念図に近いものを作ってみた (下右). これは $c_1 = 1.9, c_2 = -1$ のときで, 描画範囲は $-0.5 \leq x \leq 3.5, -0.2 \leq y \leq 2.8$ である.



問題 3.16.4 (5) の解答への補遺 x を求める積分計算は, そう複雑ではないが, mathematica や maxima ではなかなか人間に分かりやすい出力が得られず, それを変形して人間に分かりやすい形にするのは, 手で計算するのと同じくらい間違いが入り込みやすい. (実際, これらのソフトでは, 積分したものを微分しても元には戻らないくらいなので, 自分の計算結果を微分しても容易に検算できるとは限らない.) よって読者の検算の便を考えて計算の詳

細を書いておく. $\sqrt{1+p^2} = p+z$ と置くと $1+p^2 = p^2+2pz+z^2$, $p = \frac{1-z^2}{2z}$, $dp = \frac{-2z^2 - (1-z^2)}{2z^2} = -\frac{1+z^2}{2z^2}$ となるので,

$$\int \frac{dp}{M+m\sqrt{1+p^2}} = -\int \frac{1}{M+m(\frac{1-z^2}{2z}+z)} \frac{1+z^2}{2z^2} dz = -\int \frac{1}{m(1+z^2)+2Mz} \frac{1+z^2}{z} dz$$

ここで部分分数分解を慎重にやると

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(1+z^2)+2Mz} \frac{1+z^2}{z} &= \frac{1}{m} \frac{1}{z^2+1} \frac{1+z^2+2\frac{M}{m}z-2\frac{M}{m}z}{z} \\ &= \frac{1}{mz} - \frac{2M}{m^2} \frac{1}{z^2+1+2\frac{M}{m}z} = \frac{1}{mz} - \frac{2M}{m^2} \frac{1}{(z+\frac{M}{m})^2 - \frac{M^2-m^2}{m^2}} \\ &= \frac{1}{mz} + \frac{M}{m\sqrt{M^2-m^2}} \left(\frac{1}{z+\frac{M+\sqrt{M^2-m^2}}{m}} - \frac{1}{z+\frac{M-\sqrt{M^2-m^2}}{m}} \right) \end{aligned}$$

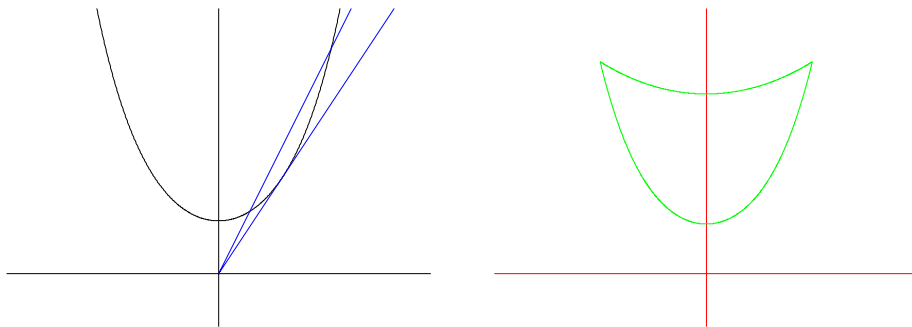
従って最初の積分は

$$\begin{aligned} -\int \frac{1}{m(1+z^2)+2Mz} \frac{1+z^2}{z} dz &= -\frac{1}{m} \log z + \frac{M}{m\sqrt{M^2-m^2}} \log \frac{z+\frac{M-\sqrt{M^2-m^2}}{m}}{z+\frac{M+\sqrt{M^2-m^2}}{m}} \\ &= -\frac{1}{m} \log z + \frac{M}{m\sqrt{M^2-m^2}} \log \frac{mz+M-\sqrt{M^2-m^2}}{mz+M+\sqrt{M^2-m^2}} \end{aligned}$$

となるので,

$$\int \frac{dp}{M+m\sqrt{1+p^2}} = -\frac{1}{m} \log(\sqrt{1+p^2}-p) + \frac{M}{m\sqrt{M^2-m^2}} \log \frac{m(\sqrt{1+p^2}-p)+M-\sqrt{M^2-m^2}}{m(\sqrt{1+p^2}-p)+M+\sqrt{M^2-m^2}}$$

問題 3.16.4 (7) の解答への補遺 $\frac{b}{a} = 1.50887956 \dots$ のとき, $y = \frac{b}{a}x$ は $y = \cosh x$ と $x = 1.19967864 \dots = c_1a$ において接する. よって $c_1 = \frac{1}{a}1.19967864 \dots$ のときの $y = \frac{1}{c_1} \cosh c_1x$ が唯一の解となる. $\frac{b}{a}$ がこれより大きいときは, c_1 の可能性, すなわち, $\cosh c_1a = c_1b$ の解が二つ生じるが, 例えば $\frac{b}{a} = 2$ のときは $c_1a = 0.58938776 \dots$, $2.12679989 \dots$ の二つの値となる (下図左). これらに対する $y = \frac{1}{c_1} \cosh c_1x$ のグラフは下図右のようになる.



ここで $y = b$ のときの回転面, すなわち円柱面の表面積を見ると,

$$S_0 = 2\pi b \times 2a = 4\pi ab \tag{W.4}$$

である. また一種の極限状態として, 曲線のほとんどが x 軸に縮退したときは, 回転面は $x = \pm a, y = 0$ を中心とする半径 b の 2 枚の円板と x 軸上の線分 $[-a, a]$ から成り, その表面積は

$$S_\infty = 2\pi b^2 \tag{W.5}$$

この値に上からいくらかでも近い値を持つ滑らかな回転面が、この図形を近似するもので得られることに注意せよ。 $S_\infty < S_0$ となるのは $b < 2a$ のときである。これらに対して $y = f(x) = \frac{1}{c_1} \cosh c_1 x$ を回転したときの表面積は、対称性を考慮して

$$\begin{aligned} S &= 4\pi \int_0^a f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 4\pi \int_0^a \frac{1}{c_1} \cosh c_1 x \sqrt{1 + \sin^2 c_1 x} dx = \frac{4\pi}{c_1} \int_0^a \cosh^2 c_1 x dx \\ &= \frac{4\pi}{c_1} \int_0^a \frac{1 + \cosh 2c_1 x}{2} dx = \frac{2\pi}{c_1} \left[x + \frac{1}{2c_1} \sinh 2c_1 x \right]_0^a = \frac{2\pi}{c_1} \left(a + \frac{1}{2c_1} \sinh 2c_1 a \right) = \frac{2\pi}{c_1} \left(a + \frac{1}{c_1} \sinh c_1 a \cosh c_1 a \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\cosh c_1 a = c_1 b$ より

$$\sinh c_1 a = \sqrt{\cosh^2 c_1 a - 1} = \sqrt{c_1^2 b^2 - 1}$$

よって上は

$$S = \frac{2\pi}{c_1} \left(a + \frac{1}{c_1} \sqrt{c_1^2 b^2 - 1} c_1 b \right) = \frac{2\pi a^2}{c_1 a} \left(1 + \frac{b}{a} \sqrt{(c_1 a)^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1} \right) \quad (\text{W.6})$$

特に、上の $\frac{b}{a} = 2$ のときの例では、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2\pi a^2}{0.58938776 \dots} \left(1 + 2\sqrt{4 \times 0.58938776 \dots^2 - 1} \right) = 4\pi a^2 \times 1.9072 \dots, \\ S_2 &= \frac{2\pi a^2}{2.12679989 \dots} \left(1 + 2\sqrt{4 \times 2.12679989 \dots^2 - 1} \right) = 4\pi a^2 \times 2.1790 \dots \end{aligned}$$

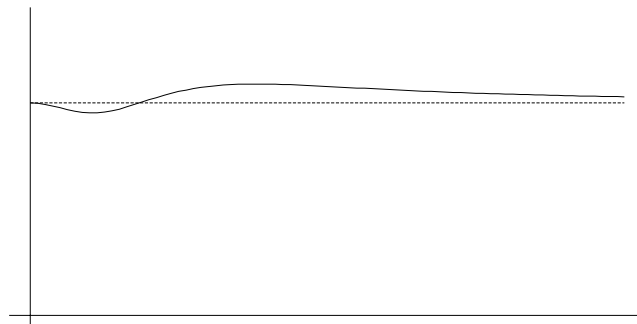
円柱面の表面積 (W.4) $S_0 = 4\pi a \times 2a = 4\pi a^2 \times 2$ 、及び退化した場合の値 $S_\infty = 2\pi b^2 = 4\pi a^2 \times 2$ と比べて前者の方が最小値を与えそうである。そこで、停留条件をはずして、単に指定された両端を通るカテナリ曲線

$$y = f(x; c) = b \frac{\cosh cx}{\cosh ca} \quad (\text{W.7})$$

に対する回転体の表面積

$$S(c) = 4\pi \int_0^a f(x; c) \sqrt{1 + f'(x; c)^2} dx = 4\pi \int_0^a b \frac{\cosh cx}{\cosh ca} \sqrt{1 + b^2 c^2 \frac{\sinh^2 cx}{\cosh^2 ca}} dx \quad (\text{W.8})$$

を $a = 1, b = 2$ に対してパラメータを変更していったときのの変化を見ると、下図のような変化を示す。(値は因子 4π で割った分である。変分方程式を満たさないときは、表面積の積分は楕円関数になるので、この値の計算には台形公式を用いた。破線は $y = 2.0$ のレベル、すなわち $S_0 = S_\infty$ に対応するレベルを示す。)



このグラフは、 $c \rightarrow \infty$ においてカテナリ曲線 (W.7) の谷底 $\frac{b}{\cosh ca}$ が x 軸に接する状態となるが、そこから先は曲線をどんどん x 軸に押し付けてゆくと、最終的には極限として S_∞ の状態まで表面積は減少する一方であることが明らかである。実際にこれを本書の本文解答で述べたように、二つの針金の円周とシャボン膜で実験すると、この場合 b は一定なので a を大きく、すなわち針金の間隔を広げてゆくことで $\frac{b}{a}$ の値を小さくして行けば、遂にシャボン膜は二つにちぎれて縦 2 枚の独立した円板となってしまうが、その過程で一瞬この極限図形が観察される。

さて、上の図を見ると、数値計算の誤差を無視すれば、交点が二つ有る場合には、前者は極小、後者は極大のようである（1次元の切り口だけを見ているので、そう結論はできないが、少なくともその反対ではありえない。）極小値を極限状態の値 S_∞ と比較してみると、極小値が最小値であるためには

$$\frac{2\pi a^2}{c_1 a} \left(1 + \frac{b}{a} \sqrt{(c_1 a)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}\right) \leq 2\pi b^2, \quad \text{すなわち} \quad c_1 a \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1 \geq \frac{b}{a} \sqrt{(c_1 a)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}$$

より、 $c_1 a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq 1$ として、両辺を平方して整理すると

$$(2c_1 a - 1) \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 1$$

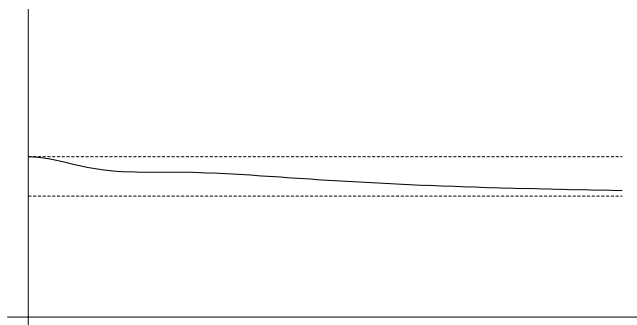
という条件を得る。これを等式で置き換えたものと、極値の条件式 $c_1 a \frac{b}{a} = \cosh c_1 a$ とから $\frac{b}{a}$ を消去すると

$$\cosh c_1 a = \frac{c_1 a}{2c_1 a - 1}$$

という超越方程式を得る。この数値解は、

$$c_1 a = 0.798884 \dots, \quad \text{このとき} \quad \frac{b}{a} = 1.6728894 \dots$$

よって $1.50887956 \dots a < b < 1.6728894 \dots a$ のときは、 c_1 が小さい方のカテナリ曲線は表面積を極小にはするかもしれないが最小ではない。なお、 $b < 1.50887956 \dots a$ の場合には変分問題の極値すら存在しないが、このときは上の図に相当するグラフは単調減少となる。以下に限界の $b = 1.50887956 \dots a$ の場合の (W.8) の函数 $S(c)$ のグラフを示すが、臨界点 $c_1 a = 1.19967864 \dots$ において停留点を成していることが分かるであろう。破線は S_0 と S_∞ に対応する値（これらを $4\pi a^2$ で割ったもの、すなわち $1.50887956 \dots$ と $1.13836 \dots$ ）を示す。ちなみに停留値は (W.6) より $1.36566 \dots (\times 4\pi a^2)$ である。



以上に述べたことを正当化するには正確には変分法のさらに深い議論を必要とするが、それは本書の範囲外なので、本書では取り敢えずこれくらいで解答としておく。

問題 3.16.4 (8) の解答への補遺 +++++

問題 3.16.4 (11) の解答への補遺 解答で見つけた極値の候補 $\sqrt{2an}\pi \sin n\pi x$ の微小摂動

$$\frac{\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon)}{n\pi} \sin n\pi x + \varepsilon \sin m\pi x$$

(ただし $m \neq n$ とする) に対する対象汎関数の値を調べてみよう。拘束条件を満たさねばならないので、

$$\int_0^1 \left((\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon)) \cos n\pi x + \varepsilon m\pi \cos m\pi x \right)^2 dx = a$$

この積分は

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left\{ (\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon))^2 \cos^2 n\pi x + 2(\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon))\varepsilon m\pi \cos n\pi x \cos m\pi x + \varepsilon^2 m^2 \pi^2 \cos^2 m\pi x \right\} dx \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon))^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 m^2 \pi^2 \end{aligned}$$

となる. ここで $n \neq m$ より

$$\int_0^1 \cos n\pi x \cos m\pi x dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \{ \cos(n+m)\pi x + \cos(n-m)\pi x \} dx = 0$$

となることを用いた. これより

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon))^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 m^2 \pi^2,$$

従って

$$(\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon))^2 = 2a - \varepsilon^2 m^2 \pi^2, \quad \therefore \varphi(\varepsilon) = \sqrt{2a} - \sqrt{2a - m^2 \pi^2 \varepsilon^2} \doteq \frac{m^2 \pi^2}{4a} \varepsilon^2$$

に選んでおけばよいことが分かる. さてこの摂動関数に対する目標汎関数の値は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \frac{\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon)}{n\pi} \sin n\pi x + \varepsilon \sin m\pi x \right\}^2 dx &= \int_0^1 \left\{ \frac{(\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon))^2}{n^2 \pi^2} \sin^2 n\pi x + \varepsilon^2 \sin^2 m\pi x \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\sqrt{2a} - \varphi(\varepsilon))^2}{n^2 \pi^2} + \varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

となる. ここで再びクロスタームの積分が消えることを用いた. 最後の値は, 上の $\varphi(\varepsilon)$ の選び方から

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2a - \varepsilon^2 m^2 \pi^2}{n^2 \pi^2} + \varepsilon^2 \right\} = \frac{a}{n^2 \pi^2} + \left(1 - \frac{m^2}{n^2} \right) \varepsilon^2$$

となる. $n > 1$ のときは m は n より大きくも小さくも選べるので, これはもとの値より小さくも大きくもできる. よって $n > 1$ のときは極値ではなく停留値となっていることが確かめられた.

問題 4.3.3 (3) の解答への注 導いた単独方程式⑥からもとの連立方程式を復元する際に共通因子 $y_2^2 - y_3^2$ で割り算したが, もしこの因子が 0 なら, $y_2^2 = y_3^2$ の両辺を微分して $2y_2 y_2' = 2y_3 y_3'$. 従って⑨と併せて $y_2 y_2' = y_3 y_3'$ = $y_1 y_1' = y_1 y_2 y_3$. これから $y_2' = y_1 y_3$ と $y_3' = y_1 y_2$ を得て, ⑧と併せてやはりもとの連立方程式が復活する. なお, もともと $y_2 y_2' = y_3 y_3'$ が成り立っているので, $y_2^2 - y_3^2$ は 0 でない場合も定数になっている.

問題 5.4.1 (2) の解答への注 もし周期境界条件を満たすような $y'' + ay' + by = f(x)$ の特殊解 $h(x)$ が得られれば, $z = y - h$ と変換した z に対する境界条件は再び周期境界条件となるが, このときは方程式 $z'' + az' + bz = 0$ から $z''(0) = z''(1)$, 従って以下方程式を微分して $z^{(n)}(0) = z^{(n)}(1)$, $n = 3, 4, \dots$ も得られるから, すべての解が周期 1 の周期関数となる. 従ってこの方程式の特性根はある整数 n について $\pm 2n\pi i$ 以外には有り得ず, このとき方程式の係数は $a = 0, b = 4n\pi^2$ に限られる. なお, $h(x)$ は 2 階以上の導関数については周期境界条件を満たす必要はないので, 周期関数とは限らない. もし $h(x)$ が周期関数で取れれば, もとの方程式から $f(x)$ も周期関数となるが, このような $f(x)$ はそのフーリエ展開が $e^{2nm\pi ix}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ を含んではならない.

例題 7.4 の解答の補遺 まず, (2) の場合, すなわち $\gamma = m$ が 2 以上の整数で, かつ $\gamma - \alpha, \gamma - \beta \notin \{1, 2, \dots, m-2\}$ のときの漸化式の解を導く. この漸化式を代数的に解くのは容易ではないが, 小さな係数から具体的に求めて答を予測し, それが漸化式を満たすことを数学的帰納法によって証明することは可能である. ここでは始めに, 極限論法で解答を見出そう. γ は m に近い非整数として (7.15) 式 (の任意定数を省略した)

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n (\beta - \gamma + 1)_n}{(2 - \gamma)_n n!} x^{n+1-\gamma} \\ &= \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n (\beta - \gamma + 1)_n}{(2 - \gamma)_n n!} x^{n+1-\gamma} + \sum_{n=m-1}^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n (\beta - \gamma + 1)_n}{(2 - \gamma)_n n!} x^{n+1-\gamma} \end{aligned}$$

を取り上げる. $\gamma \rightarrow m$ のとき, 最後の辺の一つ目はそのまま負幂の有限級数

$$\sum_{n=0}^{m-2} \frac{(\alpha - m + 1)_n (\beta - m + 1)_n}{(2 - m)_n n!} x^{n+1-m}$$

に収束する．二つ目の無限級数はすべての項が 0 に近づく因子 $m-\gamma$ を分母に含むが， $\frac{(\alpha-\gamma+1)_{m-1}(\beta-\gamma+1)_{m-1}}{(2-\gamma)_{m-1}}$ という共通因子を持ち，これを取り除いたものは，最初に求めた整級数 (7.13) の定数倍

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(m+n-1)! n!} x^n$$

に収束することに注意せよ．そこで，これに共通因子を掛けたものを引き算した

$$\sum_{n=m-1}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma+1)_n(\beta-\gamma+1)_n}{(2-\gamma)_n n!} x^{n+1-\gamma} - \frac{(\alpha-\gamma+1)_{m-1}(\beta-\gamma+1)_{m-1}}{(2-\gamma)_{m-1}} \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n$$

を考えると，これは

$$\begin{aligned} &= \frac{(\alpha-\gamma+1)_{m-1}(\beta-\gamma+1)_{m-1}}{(2-\gamma)_{m-2}} \\ &\times \frac{1}{m-\gamma} \left\{ \sum_{n=m-1}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma+m)_{n-m+1}(\beta-\gamma+m)_{n-m+1}}{(1-\gamma+m)_{n-m+1} n!} x^{n+1-\gamma} - \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n \right\} \\ &= \frac{(\alpha-\gamma+1)_{m-1}(\beta-\gamma+1)_{m-1}}{(2-\gamma)_{m-2}} \\ &\times \frac{1}{m-\gamma} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma+m)_n(\beta-\gamma+m)_n}{(1-\gamma+m)_n(n+m-1)!} x^{n+m-\gamma} - \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n \right\} \end{aligned}$$

よって各 n について

$$\lim_{\gamma \rightarrow m} \frac{1}{m-\gamma} \left\{ \frac{(\alpha-\gamma+m)_n(\beta-\gamma+m)_n}{(1-\gamma+m)_n(n+m-1)!} x^{n+m-\gamma} - \frac{1}{(m-1)!} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n \right\}$$

を計算すればよい．対応する因子の差はどれも $m-\gamma$ で割りきれるので，結果は全ての因子の対についてそれらをペアで消したものの和となる．簡単な例で説明すると，

$$a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 = (a_1 - a_2) b_1 c_1 + a_2 (b_1 - b_2) c_1 + a_2 b_2 (c_1 - c_2)$$

のような変形をして，ペアの差は 0 になる因子で極限を計算し，ペア以外の因子は単に極限で置き換えるのである．ただし， $x^{n+m-\gamma} - x^n$ については，商の極限では微分 $x^n \log x$ が現れることに注意せよ．分母にある因子についても，

$$\frac{1}{m-\gamma} \frac{1}{j-\gamma+m} - \frac{1}{j} = \frac{m-\gamma}{(j-\gamma+m)j} \rightarrow -\frac{1}{j^2}$$

となるが，これも微分と考えられる．よって今，ポホハンマーの記号をもじって

$$(a)_{[0:n] \setminus j} := a(a+1) \cdots (a+j-1)(a+j+1) \cdots (a+n-1)$$

という記号を使うことにすると，極限の結果は

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(\alpha)_{[0:n] \setminus j}(\beta)_n}{n!(n+m-1)!} + \frac{(\alpha)_n(\beta)_{[0:n] \setminus j}}{n!(n+m-1)!} - \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(n+m-1)!(j+1)} + \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(m+n-1)!(m+j)} \right) x^n \\ &+ \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(m+n-1)!} x^n \log x \end{aligned}$$

となる。以上をまとめると、最終的な極限值は

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(\alpha - m + 1)_n (\beta - m + 1)_n}{(2 - m)_n n!} x^{n+1-m} \\
&+ \frac{(\alpha - m + 1)_{m-1} (\beta - m + 1)_{m-1}}{(2 - m)_{m-2}} \\
&\times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{(\alpha)_{[0:n] \setminus j} (\beta)_n}{n!(n+m-1)!} + \frac{(\alpha)_n (\beta)_{[0:n] \setminus j}}{n!(n+m-1)!} - \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(n+m-1)!(j+1)} + \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(m+n-1)!(m+j)} \right) x^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(m)_n n!} x^n \log x \right\}
\end{aligned}$$

となる。

ここでもし $\alpha - m + 1 + n = 0$, または $\beta - m + 1 + n = 0$ が $n = 0, 1, \dots, m-2$ のいずれかで成り立つと, 無限級数全体にかかっている定数が 0 になり, 解は最初の項の有限和のみとなる。これが例題 7.4 本文の $\gamma - \alpha$ または $\gamma - \beta \in \{1, 2, \dots, \gamma - 1\}$ の場合に相当する。

問題 8.4.1 (2) の解答の続き

軌道に沿って不変な量 L を

$$L = x^2 + y^2 + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \cdots + \varphi_n(x, y) + \cdots \quad (\text{W.9})$$

の形で見出す。ここに φ_n は x, y の n 次同次多項式とする。

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial L}{\partial y} = (y - x^2) \frac{\partial L}{\partial x} + (-x + y^2) \frac{\partial L}{\partial y}$$

であり, 微分演算子としても,

$$\frac{d}{dt} = \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

が成り立つ。この右辺の第 1 項は単項式の次数を変えず, 第 2 項は次数を 1 だけ増やす。よって今 $\varphi_2 = x^2 + y^2$ と置くと, (W.9) から

$$\frac{dL}{dt} = \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left\{ \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi_n + \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi_{n-1} \right\} \quad (\text{W.10})$$

となり, 級数の各項は n 次の同次多項式である。よってこれを零と置いたものが φ_n について解を持てば, 級数

(W.9) が形式的に求まる．始めの方を未定係数法で強引に解いてみると，

$$\varphi_2 = x^2 + y^2; \quad \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_2 = 0,$$

$$\psi_3 = \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_2 = 2(y^3 - x^3);$$

$$\varphi_3 = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + \frac{4}{3}y^3 = \frac{4}{3}(x^3 + y^3) + 2(x+y)xy; \quad \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_3 - \psi_3 = 0 \quad (\text{以下略}),$$

$$\psi_4 = \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_3 = -4x^4 - 4x^3y + 4xy^3 + 4y^4 = 4(y^4 - x^4) + 4(y^2 - x^2)xy;$$

$$\varphi_4 = 4x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + a(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 4(x^2 + y^2)xy + 2x^2y^2 + a\{(x^4 + y^4) + 2x^2y^2\}$$

(以下 $a = 0$ と置けば十分);

$$\psi_5 = \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_4 = -12x^4y + 12xy^4 = 12(y^3 - x^3)xy;$$

$$\varphi_5 = -\frac{12}{5}(x^5 + y^5);$$

$$\psi_6 = 12x^6 - 12y^6 = -12(y^6 - x^6);$$

$$\begin{aligned} \varphi_6 &= -12x^5y - 20x^3y^3 - 12xy^5 + a(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6) \\ &= -12(x^4 + y^4)xy - 20(xy)^3 + a\{x^6 + y^6 + 3(x^2 + y^2)x^2y^2\} \end{aligned}$$

(以下 $a = 0$ と置けば十分);

これらの例を見ると分かるように， φ_n は x, y の対称式， ψ_n は交代式となっている．実際， n に関する帰納法で，もし φ_n が対称式なら $\left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right)$ が交代的な微分演算子であることから

$$\psi_{n+1} = \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_n$$

は交代式となる．これから微分方程式

$$\left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_{n+1} = \psi_{n+1}$$

の解を求めるのに， $\left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right)$ も交代的な微分演算子なので，解 φ_{n+1} が有ったとして，その対称式と交代式への和分解

$$\varphi_{n+1}(x, y) = \frac{\varphi_{n+1}(x, y) + \varphi_{n+1}(y, x)}{2} + \frac{\varphi_{n+1}(x, y) - \varphi_{n+1}(y, x)}{2}$$

を考えると，後者は有ってはならないことが分かるからである． φ_2 は明かに対称式なので，それから出発し， ψ_n が交代式と仮定して， $\left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_{n+1} = \psi_n$ に解が存在することを示せばよい．議論の見通しをよくするため，ここで極座標 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\theta = \text{Arctan} \frac{y}{x}$ を導入すると，

$$\begin{aligned} y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} &= y \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Arctan} \frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} - x \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \text{Arctan} \frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \\ &= \frac{-x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} &= -x^2 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \text{Arctan} \frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} + y^2 \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \text{Arctan} \frac{y}{x} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \\ &= \frac{-x^3 + y^3}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2y + xy^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} = -2(x^3 - y^3) \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{x^2y + xy^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

よって r を固定して不定積分 $\int \psi_n(x, y) d\theta$ が一価な函数として定まることを見れば良い．このための条件は，周回積分が零となることであるが， $d\theta = \frac{-ydx + xdy}{r^2}$ に注意すると， C_r で原点を中心とする半径 r の円周に正の

向きをつけたものとするれば

$$\int_0^{2\pi} \psi_n(x, y) d\theta = \oint_{C_r} \psi_n(x, y) \frac{-ydx + xdy}{r^2}$$

ここで $(x, y) \mapsto (y, x)$ という変換を考えると,

$$= \oint_{-C_r} \psi_n(y, x) \frac{-xdy + ydx}{r^2} = - \oint_{C_r} \psi_n(x, y) \frac{-ydx + xdy}{r^2}$$

すなわち、最初の積分は同じものの符号を変えたものと等しいので、零でなければならない。これで (W.10) を形式的に零とするような $\varphi_n(x, y)$ が求まることが分った。

最後に、こうして得られた形式解が原点の近傍で収束することを見よう。 θ に関する積分は、被積分函数の最大値ノルムを高々 2π 倍しか増やさない。しかし微分作用素 $\left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right)$ の影響は慎重に調べる必要がある。粗く見積もると係数が $n!$ のオーダーになり、発散級数となってしまう。そこで、 φ_{n-1} から φ_n への対応をもう少し正確に調べるため、少し工夫してみよう。2変数の対称多項式は $x+y$ と xy の多項式で書けるという初等代数学の定理を思い出して

$$\varphi_{n-1}(x, y) = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k (x+y)^{n-2k-1} (xy)^k, \quad \varphi_n(x, y) = \sum_{k=0}^{[n/2]} b_k (x+y)^{n-2k} (xy)^k,$$

と表してみると、漸化式は少し簡単になるが、やってみると係数が正負に大きく揺れて、もとの原始的な表現の係数より大分大きくなってしまい、収束の証明には逆効果のようである。そこで、最初に実験的に求めた小さい n に対する φ_n の表現を観察して、

$$\varphi_{n-1}(x, y) = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k (x^{n-2k-1} + y^{n-2k-1})(xy)^k, \quad \varphi_n(x, y) = \sum_{k=0}^{[n/2]} b_k (x^{n-2k} + y^{n-2k})(xy)^k, \quad (\text{W.11})$$

という表現が可能であろうと予測し、計算してみると

$$\begin{aligned} & \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \{(x^{n-2k-1} + y^{n-2k-1})(xy)^k\} \\ &= (n-2k-1)(y^{n-2k} - x^{n-2k})(xy)^k + (x^{n-2k-1} + y^{n-2k-1})k(y-x)(xy)^k \\ &= (n-k-1)(y^{n-2k} - x^{n-2k})(xy)^k - k(y^{n-2k-2} - x^{n-2k-2})(xy)^{k+1} \end{aligned}$$

ただし $n-2k=1$ のときは例外で、第2項は0となる。

$$\begin{aligned} & \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) \{(x^{n-2k} + y^{n-2k})(xy)^k\} \\ &= (n-2k)(x^{n-2k-2} - y^{n-2k-2})(xy)^{k+1} + (x^{n-2k} + y^{n-2k})k(y^2 - x^2)(xy)^{k-1} \\ &= k(y^{n-2k+2} - x^{n-2k+2})(xy)^{k-1} - (n-k)(y^{n-2k-2} - x^{n-2k-2})(xy)^{k+1} \end{aligned}$$

ただし $n-2k=0, 1$ のときは例外で、それぞれ第2項が0、及び $+(n-k)(y-x)(xy)^k$ となる。従ってこれらの例外を含みつつ、添え字が負の係数は0とみなして

$$\begin{aligned} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_{n-1}(x, y) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \{(n-k-1)a_k - (k-1)a_{k-1}(y^{n-2k} - x^{n-2k})(xy)^k\}, \\ \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi_n(x, y) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \{(k+1)b_{k+1} - (n-k+1)b_{k-1}\}(y^{n-2k} - x^{n-2k})(xy)^k \end{aligned}$$

となるから、係数を比較して

$$\begin{aligned} b_1 &= (n-1)a_0, \quad 2b_2 - nb_0 = (n-2)a_1, \quad 3b_3 - (n-1)b_1 = (n-3)a_2 - a_1, \dots, \\ (k+1)b_{k+1} - (n-k+1)b_{k-1} &= (n-k-1)a_k - (k-1)a_{k-1}, \dots, \end{aligned}$$

また最後のところは、 n が偶数のときは、最後の一つが

$$\frac{n}{2}b_{n/2} - \left(\frac{n}{2} + 2\right)b_{n/2-2} = \frac{n}{2}a_{n/2-1} - \left(\frac{n}{2} - 2\right)a_{n/2-2}$$

で例外とはならない。よってこの場合は、奇数添え字の係数 b_1, b_3, \dots , が漸化式から a_j で表され、偶数添え字の b_2, b_4, \dots が同様に a_j と b_0 で表され、 b_0 が自由に選べる定数となる。他方、 n が奇数のときは、最後の一つが

$$\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)b_{[n/2]} - \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 2\right)b_{[n/2]-1} = \left[\frac{n}{2}\right]a_{[n/2]} - \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)a_{[n/2]-1}$$

という例外式となる。よって、 b_1 から出発して奇数添え字の係数が最高次まで次々決定された後、例外式により偶数添え字の最高次 ($[\frac{n}{2}]$ の偶奇により一つ上だったり、逆に一つ下だったりする) が決定され、以下そこから逆に辿って偶数添え字の係数が最後の b_0 まで一意に決定される。よってこの場合は任意性は無い。以上で、 $\varphi_n(x, y)$ は (W.11) の形の n 次の多項式として (W.10) の右辺を 0 とするように必ず取れることが分かった。しかも n が奇数のときは一意に定まり、 n が偶数のときは (W.11) の $x^n + y^n$ の係数を 0 に選択していつでも求まることが分かった。 $n = 20$ ぐらいまでを計算機で求めてみると、どうやら係数は $n!$ ではなく a^n ($a < 10$) 程度で増大しているようである。上の漸化式からこのような評価を帰納的に導くことができれば、正の収束半径が保証されるが、これはまだ途中である。

別解として、関数論の初歩の助けを借りて複素微分を使うことも考えたが、あまり簡単にはならないようなのでやめた。