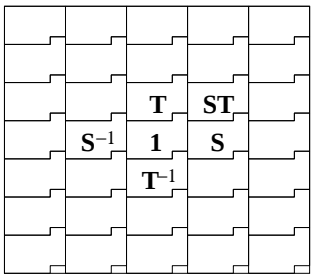
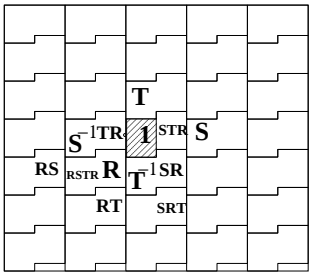
応用代数講義　ウェッブ付録A
練習問題の解答の補足

問題 3.7　の解答の詳細版：まず図 3.6 の拡大版に記号を追加したものを掲げる.



p1

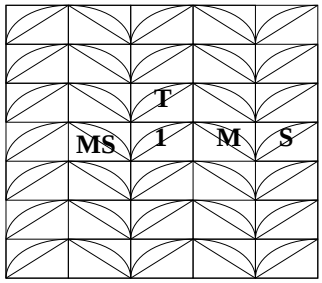
ST=TS



p2

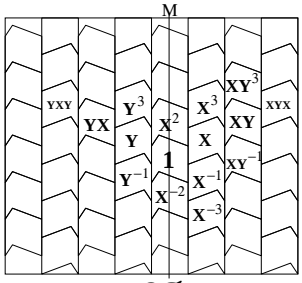
TS=ST
R^2 =1
$RSR=S^{-1}$
$RTR=T^{-1}$

other rotations:
SR=P
TR=Q



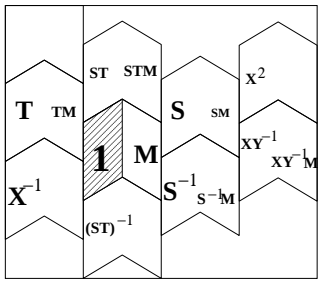
pm

ST=TS
MT=TM
M^2 =1
MS^2 =1
or
$MSM=S^{-1}$



pg

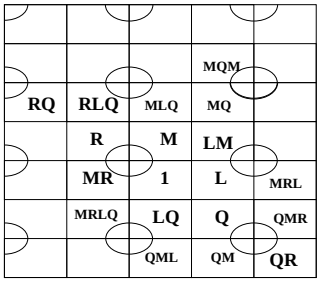
$X^2=Y^2$



cm

<X,M>
M^2=1

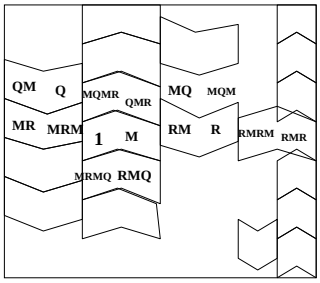
X=SM　S=XM
T=MX=MSM
Y=TM=MS=MXM



pmm

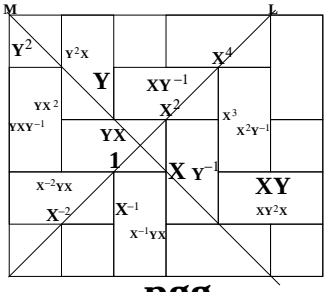
LM=ML
LQ=QL
MR=RM
$L^2=M^2=Q^2=R^2=1$
MR=RM

S=MRL
T=MLQ



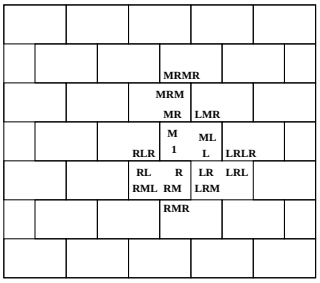
pmg

$M^2=Q^2=R^2=1$
$(MQ)^2=(RM)^2$



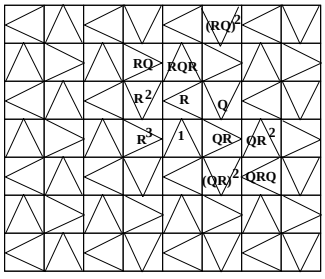
pgg

$(YX)^2=1$
$(XY^{-1})^2=1$



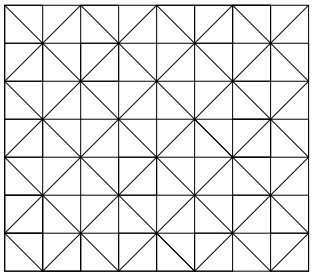
cmm

ML=LM
$M^2=R^2=L^2=1$

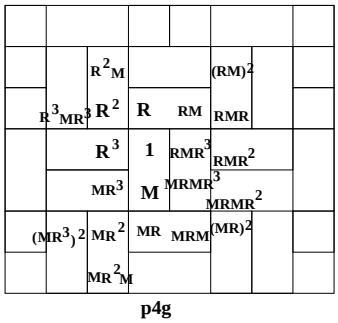


p4

$Q^2=R^4=1$
$(QR)^4=1$



p4m



p4g

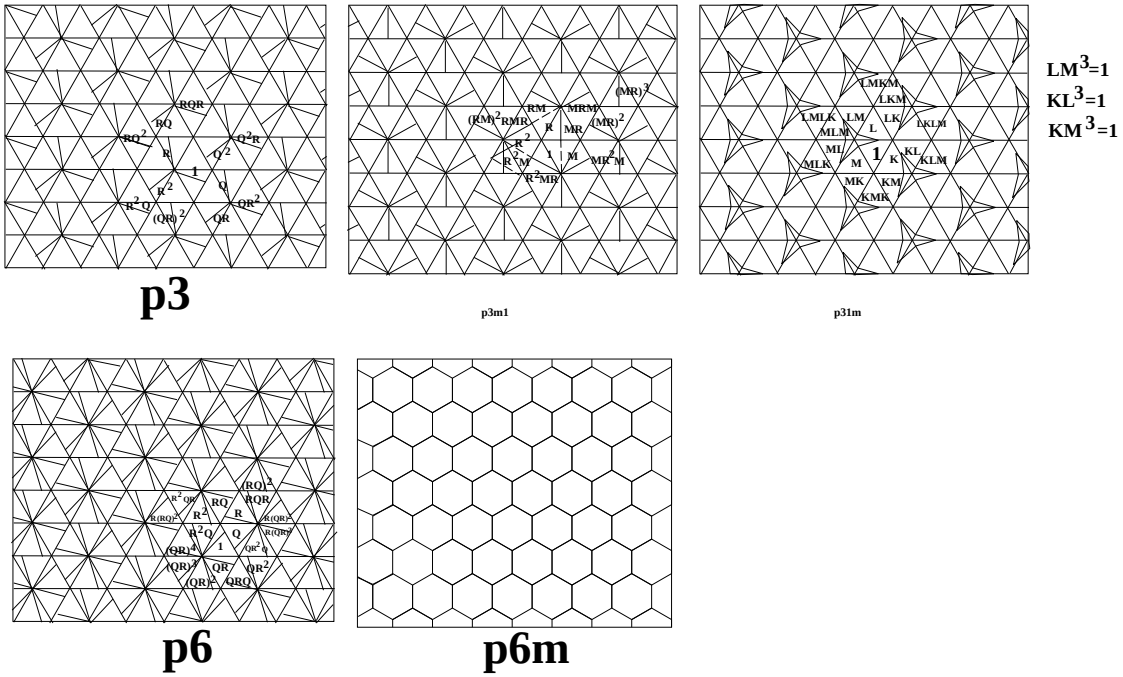


図 3.6 17 **種の繰り返し模様 (ラベルは X 線結晶学の国際標準記号)**

各パターンについて, **順に群の構造と生成元を示す**. **以下，**S, T **は二つの１次独立な平行移動を，**K, L, M, N **は異なる軸に関する鏡映を，**P_θ, Q_θ, R_θ **は異なる中心に関する角** θ **の回転を表す．また** X, Y **は並進鏡映** (**鏡映と平行移動を組み合わせたもの**) **を表す．紙数の関係で詳細な図は本書のサポートページに回す**.

p1: $\langle S, T\rangle$, **基本領域はパターン一つ分**.

p2: $\langle S, T, R_\pi\rangle$, **基本関係は** $R_\pi^2 = \mathrm{id}$, $R_\pi S R_\pi = S^{-1}$, $R_\pi T R_\pi = T^{-1}$. **または，**$\langle P_\pi, Q_\pi, R_\pi\rangle$, $S = PQ, T = RQ$ **の関係にある．基本領域はパターンの左半分**.

pm: $\langle S, T, M\rangle$, **基本関係は** $ST = TS$, $TM = MT$, $M^2 = (MS)^2 = \mathrm{id}$ **で，**$L = MS$ **が** M **に平行な軸を持つ第２の鏡映となる．あるいは** $\langle L, M, T\rangle$ (**二つの鏡映と一つの平行移動**), $S = ML$ **が残りの平行移動に対応．基本領域は長方形一つ分**. **なお，群構造は同じだが，鏡映の軸が** $45°$ **傾いたパターンも有る．**

pg: $\langle X, Y\rangle$ (**共通の対称軸を持つ二つの並進鏡映**: $X = SM$, $Y = TM$, **ただし** S, T, M **自身は含まれない**), **基本関係は** $X^2 = Y^2$. **これと** XY^{-1} **が二つの平行移動を与える．基本領域はパターン一つ分**.

cm: pg **に鏡映が加わったもの．**$\langle S, T, M\rangle$. **あるいは**, $\langle X, M\rangle$ (**一つの鏡映とそれを軸とする並進鏡映**), **ちなみに** $S = XM$, $T = MX$ **で**, **もう一つの並進鏡映は** $Y = MXM$ **で与えられる．基本領域はパターン一つの左半分**.

pmm: $\langle K, L, M, N\rangle$ (**長方形の４辺に関する鏡映**). KM, LN **が平行移動の基本ベクトルを成し，その他の組合せは可換．あるいは，**$\langle L, M, Q_\pi, R_\pi\rangle$ (**互いに垂直な軸に関する二つの鏡映とそれぞれの軸上の点を中心とする二つの** $180°$ **回転**). L **と** M, L **と** Q, M **と** R **はそれぞれ可換で，**LQ, MR **が残り二つの鏡映となる．**$S = MRL$, $T = MLQ$ **が平行移動．基本領域は長方形一つ分**.

pmg: $\langle M, Q_\pi, R_\pi\rangle$ (**一つの鏡映とその軸上に無い２点を中心とする二つの** $180°$ **回転**), **基本領域はパターンの左半分**.

pgg: $\langle X, Y\rangle$ (**二つの垂直な軸を持つ並進鏡映**), **関係式は** $(YX)^2 = (XY^{-1})^2 = 1$ **で**, **これらが** $180°$ **の回転を与える**. X^2 **と** Y^2 **が可換な平行移動となる．基本領域は長方形を細長い方に切った半分**.

cmm: $\langle L, M, R_\pi\rangle$ (**二つの垂直な鏡映と一つの** $180°$ **回転**), **関係式は** $LM = ML$, $L^2 = M^2 = R^2 = \mathrm{id}$. **基本領域は４分の１長方形**.

p4: p4m **から鏡映を除いたもの** $\langle S, T, R_{\pi/2}\rangle$. **あるいは** $\langle Q_\pi, R_{\pi/2}\rangle$ (**一つの** 180° **回転と一つの** 90° **回転**), **関係式は** $Q_\pi^2 = R_{\pi/2}^4 = \mathrm{id}$, $(Q_\pi R_{\pi/2})^4 = \mathrm{id}$. **平行移動は** $S = QR^2$, $T = RQR$, **基本領域は正方形１個分**.
p4m: **平行移動と** D_4 **の合成**. **あるいは直角２等辺３角形の３辺に関する鏡映**. **基本領域は直角２等辺３角形１個分**.
p4g: $\langle R_\pi, M\rangle$ (**一つの鏡映とその上に無い点を中心とする一つの** 90° **回転**), **基本領域は長方形の半分を成す正方形**.
p3: p6 **から鏡映を除いたもの**. **二つの** 120° **回転** Q, R
で生成される．もう一つの回転は (QR) **で** $(QR)^3 = \mathrm{id}$ **が関係式**. Q^2R **と** RQ^2 **が独立な平行移動となる**. **基本領域は正３角形２個が成す菱形**.
p3m1: $\langle R_{2\pi/3}, M\rangle$ (**一つの鏡映と一つの** 120° **回転**), **関係式は** $M^2 = R_{2\pi/3}^3 = 1$. $(MR_{2\pi/3})^2$ **と** $(R_{2\pi/3}M)^2$ **が独立な平行移動となる．基本領域は正６角形の頂点と中心を結ぶ線分を対称軸とする６分の１領域**.
p31m: **平行移動と** D_3 **の合成** $\langle S, T, R_{2\pi/3}, M\rangle$, **基本関係は** $R_{2\pi/3}^3 = M^2 = \mathrm{id}$, $R_{2\pi/3}S = SR_{2\pi/3}$, $R_{2\pi/3}M = MR_{2\pi/3}$. **あるいは** $\langle K, L, M\rangle$ (**正３角形の３辺に関する鏡映**), **基本関係は** $K^2 = L^2 = M^2 = \mathrm{id}$, $(KL)^3 = (KM)^3 = (LM)^3 = \mathrm{id}$. **ちなみに**, $S = LKLM$, $T = LMLK$ **が独立な平行移動**. **基本領域は正３角形１個分**.
p6: p6m **から鏡映を除いたもの．最小生成元としては，**$\langle$
$Q_\pi, R_{2\pi/3}\rangle$ (**一つの** 180° **回転と一つの** 120° **回転**) **が取れる**. QR **が** -60° **の回転**, $S = R(QR)^2$, $T = R(RQ)^2$ **が独立な平行移動となる．基本領域は正３角形一つ分**.
p6m: **正６角形の対称群** D_6 **とその中心の平行移動より成る．これは，**D_6 **が正６角形に作用するときの基本領域である** 30°, 60° **の直角３角形の３辺に関する鏡映** K, L, M **でも生成される．基本関係は** $K^2 = L^2 = M^2 = \mathrm{id}$, $(KM)^2 = (ML)^3 = (KL)^6 = \mathrm{id}$. **基本領域は上述の直角３角形１個分**.

著作権の関係で, **あまり芸術的でない図を自分で描いたが**, **教科書の参考文献に載せた** Weyl **や** Coxeter **の本**, **あるいはウェッブサイトには美しい模様が載っており**, **実際にアルハンブラ宮殿の装飾模様なども手に入るので**, **サーチして見られるとよい**.

問題 8.3 の解答の詳細版：練習として, **手始めに** $\boldsymbol{F}_{2^3}$ **を** $\boldsymbol{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ **として定義したときの演算の表を作ってみる**.

加法

$\diagdown$	0	1	α	$\alpha+1$	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α	α^2+1	α^2	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$
α	α	$\alpha+1$	0	1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2	α^2+1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	α^2+1	α^2
α^2	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$	0	1	α	$\alpha+1$
α^2+1	α^2+1	α^2	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	1	0	$\alpha+1$	α
$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2	α^2+1	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	α^2+1	α^2	$\alpha+1$	α	1	0

乗法

$\diagdown$	0	1	α	$\alpha+1$	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$	α^2	α^2+1	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$
α	0	α	α^2	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha+1$	1	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2+1
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	α^2+1	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2	1	α
α^2	0	α^2	$\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$	α	α^2+1	1
α^2+1	0	α^2+1	1	α^2	α	$\alpha^2+\alpha+1$	$\alpha+1$	$\alpha^2+\alpha$
$\alpha^2+\alpha$	0	$\alpha^2+\alpha$	$\alpha^2+\alpha+1$	1	α^2+1	$\alpha+1$	α	α^2
$\alpha^2+\alpha+1$	0	$\alpha^2+\alpha+1$	α^2+1	α	1	$\alpha^2+\alpha$	α^2	$\alpha+1$

$\boldsymbol{F}_{2^4}=\boldsymbol{F}_2[x]/(x^4+x+1)$ **の場合は**, $c_3\alpha^3+c_2\alpha_2+c_1\alpha+c_0$ **を** $c_3c_2c_1c_0$ **と略記すると**,

加法

$\diagdown$	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0000	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0001	0001	0000	0011	0010	0101	0100	0111	0110	1001	1000	1011	1010	1101	1100	1111	1110
0010	0010	0011	0000	0001	0110	0111	0100	0101	1010	1011	1000	1001	1110	1111	1100	1101
0011	0011	0010	0001	0000	0111	0110	0101	0100	1011	1010	1001	1000	1111	1110	1101	1100
0100	0100	0101	0110	0111	0000	0001	0010	0011	1100	1101	1110	1111	1000	1001	1010	1011
0101	0101	0100	0111	0110	0001	0000	0011	0010	1101	1100	1111	1110	1001	1000	1011	1010
0110	0110	0111	0100	0101	0001	0000	0011	0010	1101	1100	1111	1110	1001	1000	1011	1010
0111	01111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000	1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000
1000	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
1001	1001	1000	1011	1010	1101	1100	1111	1110	0001	0000	0011	0010	0101	0100	0111	0119
1010	1010	1011	1000	1001	1110	1111	1100	1101	0010	0011	0000	0001	0110	0111	0100	0101
1011	1011	1010	1001	1000	1111	1110	1100	1100	0011	0010	0001	0000	0111	0110	0101	0100
1100	1100	1101	1110	0011	1000	1001	1010	1011	0100	0101	0110	0111	0100	0101	0110	0111
1101	1101	1100	1110	1111	1001	1000	1011	1010	0101	0100	0111	0110	0001	0000	0011	0010
1110	1110	1111	1100	1101	1010	1011	1000	1001	01110	0011	0100	0101	0010	0011	0000	0001
1111	1111	1110	1101	1100	1010	1010	1001	1000	0001	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000

乗法

$\diagdown$	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
0001	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0010	0000	0010	0100	0110	1000	1010	1100	1110	0011	0001	0111	0101	1011	1001	1111	1101
0011	0000	0011	0110	0101	1100	1111	1010	1001	1011	1000	1101	1110	0111	0100	0001	0010
0100	0000	0100	1000	1100	0011	0111	1011	1111	0110	0010	1110	1010	0101	0001	1101	1001
0101	0000	0101	1010	1111	0111	0010	1101	1000	1110	1011	0100	0001	1001	1100	0011	0110
0110	0000	0110	1100	1010	1011	1101	0111	0001	0101	0011	1001	1111	1110	1000	0010	0100
0111	0000	0111	1110	1001	1111	1000	0001	0110	1101	1010	0011	0100	0010	0101	1100	1011
1000	0000	1000	0011	1011	0110	1110	0101	1101	1100	0100	1111	0111	1010	0010	1001	0001
1001	0000	1001	0001	1000	0010	1011	0011	1010	0100	1101	0101	1100	0110	1111	0111	1110
1010	0000	1010	0111	1101	1110	0100	1001	0011	1111	0101	1000	0010	0001	1011	0110	1100
1011	0000	1011	0101	1110	1010	0001	1111	0100	0111	1100	0010	1001	1101	0110	1000	0011
1100	0000	1100	1011	0111	0101	1001	1110	0010	1010	0110	0001	1101	1111	0011	0100	1000
1101	0000	1101	1001	0100	0001	1100	1000	0101	0010	1111	1011	0110	0011	1110	1010	0111
1110	0000	1110	1111	0001	1101	0011	0010	1100	1001	0111	0110	1000	0100	1010	1011	0101
1111	0000	1111	1101	0010	1001	0110	0100	1011	0001	1110	1100	0011	1000	0111	0101	1010