線形代数講義への補遺

この文書は，通常の訂正として教科書に追加するにはスペースの関係で長すぎるが，補っておきたい内容を，読者の参考のために提供するものです [1]．なお，第５刷以降では教科書中にこの文書への引用記号 が追加されています．

また，本書とペアの演習書として『基礎演習線形代数』が出版されています．今後新しい演習問題の追加等のサービスは，そちらのサポートページで行う予定ですので，併せてチェック頂ければ幸いです．

【p.128 への補遺】

章末問題６ (第３刷で追加されたもの) の解答です．本来なら対応する巻末の解答部分への補遺とすべきですが，分かりにくくなるので，問題に対する補遺としておきます．

(1) $\Longrightarrow$ (3)　任意のベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ がある $a_j \in V_j$ の和として一意的に表せることを示す．$n=2$ のときは定義 4.8 の後に解説されている通りである．$n-1$ まで成り立つとして，n のとき，直和の帰納的定義により $V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_{n-1} \dotplus V_n = (V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_{n-1}) \dotplus V_n$ なので，$n=2$ のときの主張から $\exists \boldsymbol{a}' \in (V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_{n-1})$, $\exists \boldsymbol{a}_n \in V_n$ が一意に存在し，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_n$ と表せる．こうして一意に定まった $\boldsymbol{a}'$ に対し，帰納法の仮定により $\boldsymbol{a}_1 \in V_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1} \in V_{n-1}$ で $\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_{n-1} = \boldsymbol{a}'$ を満たすものが一意的に定まる．

(3) $\Longrightarrow$ (2)　$V = V_1 + \cdots + V_n$ は (3) の主張の一部である．$\boldsymbol{a} \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j$ とすると，この定義により各 $j \neq i$ について $\boldsymbol{a}_j \in V_j$ が存在し，$\boldsymbol{a} = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_j$ と書けている．これは $\boldsymbol{a}_i = -\boldsymbol{a}$ と置けば $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ と書き直せるので，(3) における一意性により ($\boldsymbol{0}$ の分解は $\boldsymbol{0} + \cdots + \boldsymbol{0}$ に限られる！) $\forall j$ について $\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ となる．従って特に $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1)　$V = V_1 + \cdots + V_n$ から $V = (V_1 + \cdots + V_{n-1}) + V_n$ は明らか．$V = (V_1 + \cdots + V_{n-1}) \dotplus V_n$ であることは，(2) の条件を $i = n$ として適用すれば直ちに分かる．また (2) の条件は $i < n$ かつ $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ の場合にも成り立つので，$V_1 + \cdots + V_{n-1}$ が直和であることが同じ論法で次々に示される．(あるいはここも帰納法で証明してもよい.)

【p.141 〜 142 への補遺】

ここは，定理 5.10 の一般固有空間が直和になっているという主張を証明しているところですが，初刷 (２刷も緊急増刷だったので同じです) では勘違いして，補題 5.11 で各ペア $i \neq j$ に対して V_i と V_j が直和になっていることだけを証明していました．それだけでは不足なことは，たとえば，全空間 V が平面 $\boldsymbol{R}^2$ で，部分空間 V_j が原点を通る傾きの異なる直線のときを考えれば明らかです．$V_i \cap V_j = \{\boldsymbol{0}\}$ の証明と $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\boldsymbol{0}\}$ の証明はほとんど同じなのですが，紙数を増やさないように訂正を行った関係で，記述がやや不親切になってしまいました．要点を繰り返すと，次の通りです (以下の記述は３刷以降にのみ当てはまります)：

拡張ユークリッド互除法から得られる多項式の等式

$$1 = f(x)(x-\alpha_i)^{k_i} + g(x)\prod_{j \neq i}(x-\alpha_j)^{k_j}$$

の x に線形作用素 $\varPhi$ (行列だと思っても同じことです) を代入すると，線形作用素 (行列) の等式

$$I = f(\varPhi)(\varPhi-\alpha_i I)^{k_i} + g(\varPhi)\prod_{j \neq i}(\varPhi-\alpha_j I)^{k_j}$$

が得られます．ここで I は恒等作用素 (単位行列) です．教科書ではこの等式を $\boldsymbol{a}_i$ に適用して得られるベクトルの等式の最後の項において $\boldsymbol{a}_i$ にそれと等しい $\sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_j$ を代入して計算しているのですが，この j は動く添え字 (局所的な束縛変数) なので，$\prod_{j \neq i}$ の j とは全く別物です．ここでは分かりやすく後者の添え字に別の記号を用いて，少し違った説明の仕方をしてみましょう．上の等式は

$$I - f(\varPhi)(\varPhi-\alpha_i I)^{k_i} = g(\varPhi)\prod_{j \neq i}(\varPhi-\alpha_j I)^{k_j}$$

と変形されます．この両辺は結局同じ作用素なので，あるベクトルにどちらを施しても結果は同じになるはずです．そこで一つのベクトルの２通りの表現である $\boldsymbol{a}_i = \sum_{l \neq i} \boldsymbol{a}_l$ の左辺の表現には上の式の左辺を，また右辺の表現には上の式の右辺を施せば，

$$\Bigl(I - f(\varPhi)(\varPhi-\alpha_i I)^{k_i}\Bigr)\boldsymbol{a}_i = g(\varPhi)\prod_{j \neq i}(\varPhi-\alpha_j I)^{k_j}\sum_{l \neq i}\boldsymbol{a}_l$$

[1] この文書の著作権は，教科書の一部としての扱いとしてください．教科書をお持ちの方は印刷して教科書に挟んでご利用頂ければ幸いです．

という等式が得られます．ここから先の計算は教科書には詳しく書いてありませんが，どちらでも同じ論法を用います．すなわち，任意の j について $(\Phi-\alpha_j I)^{k_j}\boldsymbol{a}_j=\mathbf{0}$ という仮定を用いると，左辺は後の項が消えて $I\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_i$ に帰着し，また右辺は，$l\neq i$ なる任意の $\boldsymbol{a}_l$ について，Φ だけで作られた作用素因子の積の順序は変更できることから，

$$\prod_{j\neq i}(\Phi-\alpha_j I)^{k_j}\boldsymbol{a}_l=\prod_{j\neq i,l}(\Phi-\alpha_j I)^{k_j}\{(\Phi-\alpha_l I)^{k_l}\boldsymbol{a}_l\}=\prod_{j\neq i,l}(\Phi-\alpha_j I)^{k_j}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

となり，従って結局全体が $\mathbf{0}$ になります．こうして $\boldsymbol{a}_i=\mathbf{0}$ が導けます．

なお，初刷では二つより多くの部分空間の直和の定義が与えられていなかったことも判明したのですが，紙数が増えるので教科書には追加できず，上記補題の訂正の際に，第 4 章の章末問題 6 としてこれを追加しました．この問題の解答はヒントだけで分かると思いますが，詳細な解答を補遺として上に補っておきました．

【p.163 への補遺】

工学で現れる微分方程式では，係数行列が実数でも固有値には複素数が現れることがあります．このような場合にも，ここで述べた計算法を適用すれば，最終結果は自然に実数になります．その理由は微分方程式の初期値問題の一意性から，あるいは実数を成分とする行列 (実行列) の指数関数を Taylor 展開で計算することを考えれば当たり前なのですが，ここではスタンダードな計算法を見直すことでそのことを認識しておきましょう．

実行列が複素数の固有値 $\lambda=a+bi$ を持つ場合は，その共役複素数 $\overline{\lambda}=a-bi$ も固有値となります．これは，固有多項式が実係数だから明らかですね．教科書と同じ計算を複素数のままで行うと, 結果は必ずこれらを $\dfrac{1}{2}(e^{\lambda t}+e^{\overline{\lambda}t})$ あるいは $\dfrac{1}{2i}(e^{\lambda t}-e^{\overline{\lambda}t})$ と一まとまりになった形で含みます．これらを Euler の関係式 $e^{ibt}=\cos bt+i\sin bt$ を用いてそれぞれ $e^{at}\cos bt$, $e^{at}\sin bt$ に書き換えると, 実数の範囲での解の表現が得られることになります.

実は定理 6.18 を一般化した，実行列の実数の範囲での標準形の理論 (p.192 への補遺を参照) が有り，最初からこれら実ベクトルを基底として計算すれば，複素数を全く表に出さない計算も可能ですが，微積分でもそうだったように，複素指数関数を上手に使うことで，計算がより簡単になります．

例題 5.8 次の連立線形常微分方程式の一般解を計算せよ．

$$\begin{cases} y_1'=y_3-y_2\\ y_2'=y_3\\ y_3'=y_3-y_1\end{cases}$$

解答 係数行列 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ の固有値は $\pm i, 1$, Jordan 標準形は $\begin{pmatrix}i&0&0\\0&-i&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ で, 変換行列は $S=\begin{pmatrix}1-i&1+i&0\\-i&i&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

よって一般解は $S\begin{pmatrix}e^{it}&0&0\\0&e^{-it}&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}S^{-1}\boldsymbol{c}$ と表される．ここで求めた行列の部分は，実行列 A の指数函数を Taylor 展開で計算したものと一致するはずだから．全く機械的に S^{-1} を求めてこの式を計算すれば, 結果は自動的に実数になる.

$S^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1+i&-1+i&1-i\\1-i&-1-i&1+i\\-2&2&2\end{pmatrix}$ なので, 求める一般解は

$$\begin{pmatrix}1-i&1+i&0\\-i&i&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{it}&0&0\\0&e^{-it}&0\\0&0&e^t\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+i&-1+i&1-i\\1-i&-1-i&1+i\\-2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}&-i\frac{e^{it}-e^{-it}}{2}&i\frac{e^{it}-e^{-it}}{2}\\ \frac{e^{it}+e^{-it}}{4}-i\frac{e^{it}-e^{-it}}{4}-\frac{e^t}{2}&\frac{e^{it}+e^{-it}}{4}+i\frac{e^{it}-e^{-it}}{4}+\frac{e^t}{2}&-\frac{e^{it}+e^{-it}}{4}-i\frac{e^{it}-e^{-it}}{4}+\frac{e^t}{2}\\ \frac{e^{it}+e^{-it}}{4}+i\frac{e^{it}-e^{-it}}{4}-\frac{e^t}{2}&-\frac{e^{it}+e^{-it}}{4}+i\frac{e^{it}-e^{-it}}{4}+\frac{e^t}{2}&\frac{e^{it}+e^{-it}}{4}-i\frac{e^{it}-e^{-it}}{4}+\frac{e^t}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&\sin t\\ \frac{1}{2}(\cos t+\sin t-e^t)&\frac{1}{2}(\cos t-\sin t+e^t)&\frac{1}{2}(-\cos t+\sin t+e^t)\\ \frac{1}{2}(\cos t-\sin t-e^t)&\frac{1}{2}(-\cos t-\sin t+e^t)&\frac{1}{2}(\cos t+\sin t+e^t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

実は，未定係数法を用いた計算の方が更に簡単なのですが，それは行列の計算からやや離れてしまうので，微分方程式講義の方に譲ります．

【p.192 への補遺】

直交行列について定理 6.18 に述べたことを一般化して，一般の実行列の実数の範囲での標準形を求めることは問 6.18 で取り上げましたが，スペースの関係で解答が詳しく書かれていないので，ここに詳説しておきます．まず基本的なことは,

♡ 実行列 A の固有値が虚数になるときは, 共役複素数のペアとして現れる: $\lambda = a + bi$ が固有値なら, $\overline{\lambda} = a - bi$ も固有値.

このことは，既に p.163 への補遺中でも述べたように，固有多項式が実数係数であることから直ちに分かりますが，次のように固有ベクトルと一まとめにして説明することもできます：

♡ $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ が固有値 λ に対応する A の固有ベクトルなら, $\overline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v}$ は $\overline{\lambda} = a - bi$ に対応する固有ベクトルとなる.

実際,

$$A\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0} \qquad \Longrightarrow \qquad A\overline{\boldsymbol{w}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{w}}, \quad \overline{\boldsymbol{w}} \neq \boldsymbol{0}.$$

λ が実数でなければ，$\overline{\lambda} \neq \lambda$, 従って一般論によりそれらの固有ベクトル $\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}$ は (複素数体上でさえ) 一次独立．よって実ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ も (複素数体上で, 従って $\boldsymbol{R}$ 上も) 一次独立となります．$A\boldsymbol{w} = (a + ib)\boldsymbol{w}$ の実部, 虚部をとると,

$$A\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} - b\boldsymbol{v}, \qquad A\boldsymbol{v} = b\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}.$$

従って, 固有ベクトルの実部, 虚部を並べたものは, 行列を次のような実標準形に導きます:

$$A[\ldots, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, \ldots] = [\ldots, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}, \ldots] \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \lambda & 0 & \\ & 0 & \overline{\lambda} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

の代わりに

$$A[\ldots, \boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}, \ldots] = [\ldots, \boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}, \ldots] \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & a & -b & \\ & b & a & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

以上により，行列 A が複素数の範囲で対角化可能なら, 実数の範囲では, 実固有値についてはそのまま対角線に, 虚固有値に対しては共役固有値を二つずつペアにして上の形の 2 次行列がブロックとして対角線に, 並ぶ形の標準形に変換できることが分かりました. 定理 6.18 に述べた直交行列の実標準形は，ここで $a^2 + b^2 = 1$ という特別な場合となっています．

対角化可能ではない場合は次のようになります：

♡ 固有値 $\lambda = a + ib$ に対応する一つの Jordan ブロックを

$$A[\boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{w}_{m-1}, \ldots, \boldsymbol{w}_1] = [\boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{w}_{m-1}, \ldots, \boldsymbol{w}_1] \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

$$A\boldsymbol{w}_k = \lambda\boldsymbol{w}_k + \boldsymbol{w}_{k+1}, k = 1, \ldots, m-1, \quad A\boldsymbol{w}_m = \lambda\boldsymbol{w}_m$$

とすれば, これと複素共役なブロックが必ず存在する.

実際，上で固有値と固有ベクトルについて行った議論をそのまま真似して，固有値 λ に関する一般固有ベクトルの式を並べて書き，一斉にそれらの複素共役を取れば，固有値 $\overline{\lambda}$ に関する一般固有ベクトルの式となります．これらを組み合わせると, $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{u}_k + i\boldsymbol{v}_k$ は

$$A\boldsymbol{u}_k = a\boldsymbol{u}_k - b\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{u}_{k+1}, \quad A\boldsymbol{v}_k = b\boldsymbol{u}_k + a\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, m-1, \quad A\boldsymbol{u}_m = a\boldsymbol{u}_m - b\boldsymbol{v}_m, \quad A\boldsymbol{v}_m = b\boldsymbol{u}_m + a\boldsymbol{v}_m$$

を満たすので,

$$
\begin{aligned}
&A[u_m, -v_m, u_{m-1}, -u_{m-1}, \ldots, u_1, -v_1] \\
&= [u_m, -v_m, u_{m-1}, -u_{m-1}, \ldots, u_1, -v_1]
\begin{pmatrix}
a & -b & 1 & 0 & & & & \\
b & a & 0 & 1 & \ddots & & & \\
 & & a & -b & & \ddots & & \\
 & & b & a & \ddots & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & a & -b \\
 & & & & & & b & a
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となります．以上により, このような実基底を用いて A を変換すれば, ここで示されたような対角線から 2 行上までに成分が拡がる行列をブロックとする標準形に変換できることが分かります.

【p.220 への補遺】 問題 2 (1) の解答の最後への補遺：
以上に得た条件を代入して得られる $x = aX + c$, $y = 2acX + a^2Y + c^2$ を素直に行列で表現すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2ac & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

従ってこれを解くと

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{2c}{a} & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ \frac{c^2}{a^2} \end{pmatrix}$$

が答ではないかと思われるかもしれない．確かにこれも答ではあるが，一般形としてはなるべく簡単な方が良く，従って $a \neq 0$ に注意してパラメータを $-\dfrac{c}{a} \mapsto c$, $\dfrac{1}{a} \mapsto a$ と取り替えてもよいので，結局教科書に載せた形の解が得られる．実は, 最初から $X = ax + by + c$, $Y = dx + ey + f$ を $Y = X^2$ に代入して $y = x^2$ となるための条件を求めれば，素直に最初から教科書に載せた解が得られるのだが，その場合は逆変換が同じ条件を満たすこととものとの問題が同値であることを一言断る必要が論理的にはあるだろう．逆にそれを認識していさえすれば，上で逆に解いてみる計算は不要になる．

【p.230 への補遺】 問 3.11 (2) の解答
点 (x, y) が円周 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ の内部にある条件は $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c < 0$ です．これは平方完成しなくても，円周が平面を内部と外部に 2 分していること，及び遠くの点，すなわち $|x|, |y|$ が十分大きいところでは $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c > 0$ となることから直ちに分かります．前問で与えた円周の方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{C}$$

は，左辺の行列式を展開すると $x^2 + y^2$ の係数が

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{D}$$

になるので，内部に入る条件は，この D が正なら (C) の左辺の行列式が負，負なら逆に正となることが必要十分条件となります．ここで今 $z_i = x_i^2 + y_i^2$, $i = 1, 2, 3$ と置くと，方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{E}$$

は三点 (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$ を通る平面の方程式を与え，それは空間 $\boldsymbol{R}^3$ を二つの領域に分けるので，z を正で大きくすると D が正なら (E) の左辺は正に，また D が負なら負になります．従ってこれが点 (x, y, z) がこの平面の上方に有るための条件となります．符号を逆にすると平面の下方に有るための条件となりますが，それは正に $z = x^2 + y^2$ としたときの行列式 (C) の符号について最初に述べられた条件と一致します．

【p.230 への補遺】 問 3.13 への補遺
x^2 の項を欠く 3 次方程式の判別式の計算では $D = (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2$ を $q = -\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_3$, $r = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

で表すのに $(\alpha_1-\alpha_2)^2=-4q-3\alpha_1^2$ 等々を用いましたが,

$$(\alpha_2-\alpha_3)^2=(\alpha_2+\alpha_3)^2-4\alpha_2\alpha_3=\alpha_1^2-4\alpha_2\alpha_3=-q+3\alpha_2\alpha_3$$

という変形を用い，対称性により $(\alpha_3-\alpha_1)^2=-q+3\alpha_3\alpha_1$, $(\alpha_1-\alpha_2)^2=-q-3\alpha_1\alpha_2$ となることを用いると

$$\begin{aligned}D&=(-q-3\alpha_1\alpha_2)(-q-3\alpha_3\alpha_1)(-q-3\alpha_2\alpha_3)\\&=-q^3-3q^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_1+\alpha_2\alpha_3)-9q(\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2)-27\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\\&=-q^3-3q^3-27r^2=-4q^3-27r^2\end{aligned}$$

と計算が少し簡単になります.