『基礎演習 線形代数』ウェッブ注[1)]

p.57 要項 3.5.5 への補遺．本書では環あるいは多元環については名前だけの紹介で，問題等のテーマにはしていないが，気になる読者のためにここに定義をまとめておく．より詳しい解説は [4] などを見られたい．

一般に集合に代数構造を持たせたものを代数系と総称する．その中で最も原始的なものが群であり，2 項演算 (すなわち $G\times G\to G$ という写像) として積演算一つだけを持ち，それが p.40 の線形空間の公理 (i) の (2), (3), (4) を満たすもののことである．例としては，有限集合の置換（すなわち並べ替え）が置換の合成を演算として作る置換群や，本書でこのすぐ後に書かれている n 次正則行列が積に関して作る一般線形群 $GL(n,\boldsymbol{R})$ などがある．群に積演算の可換性 (1) を追加要請したものが可換群で，その演算を和の記号で表したものが加法群であることは脚注にも記した．

加法群に（必ずしも可換と限らない）積演算を追加し，二つの演算の間に分配律を追加したものを環と呼ぶ．通常は乗法の単位元 1 が有るものを主に扱う．積演算も可換なものは可換環と呼ばれる．可換環の代表例は整数の環 $\boldsymbol{Z}$, 実係数の 1 変数多項式環 $\boldsymbol{R}[x]$ などである．ここで紹介されている行列環 $M(n,\boldsymbol{R})$ は非可換環の代表例である．

多元環とは，環における加法の演算がそれを拡張したある体上の線形演算の一部となっているようなもののことを言う．言い換えれば，ベクトル空間に分配律を満たすような積演算を追加したものである．多項式環，行列環はそれぞれ可換，非可換な多元環の代表例である．上でこれらを環の例として挙げたのは，多元環はスカラー倍を忘れればただの環となるからである．

なお，行列の集合 $M(m,n,\boldsymbol{R})$ は $n\neq m$ のとき積が定義されていないので環ではないが，ただの加法群よりは構造が豊かで，$A\in M(m,n,\boldsymbol{R})$ には左から $M(m,\boldsymbol{R})$ の元を，また右から $M(n,\boldsymbol{R})$ の元を掛けることができ，それぞれ分配律を満たす．このようなものは左 $M(m,\boldsymbol{R})$-加群，右 $M(n,\boldsymbol{R})$-加群と呼ばれる．加法群は英語で additive group, 加群は英語で module と言い，後者は前者の略称ではないことに注意せよ．ちなみに，環の英語は ring, 多元環の英語は algebra で，代数学と同じ単語である．

p.113 への補遺．二つの冪零行列が非可換のとき，和が冪零にならない例を本書中に与えたが，非可換でも和が冪零になることもある．例えば，$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ は

$$AB=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

より非可換であるが，和 $A+B=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ は明らかに冪零である．このような例は 2 次行列では作れないことが次のようにして分かる：
まず，冪零 2 次行列 $N=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$ の一般形は，補充問題の問 2.1.6 の解答で示されているように

$$\begin{pmatrix}\pm\sqrt{ab}&-b\\a&\mp\sqrt{ab}\end{pmatrix}$$

という，2 パラメータの族を成す．(実の行列なので a,b は同符号である．) これは特別な場合として a または b のどちらか一方だけが 0 になったときの

$$\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}\qquad(a\neq 0)$$

[1)] 本文書はサイエンス社から出ているこの書名の本 (以下『本書』と略称) に対する著者からの読者サービスで，スペースの制約で載せきれなかった図版や補足説明が掲げられており，各項目は同書中の 記号に対応しています．出版社からの制約は何もありませんが，本文書の著作権は出版されている本書の延長という扱いでお願いします (©金子 晃)．なお，本書中と同様，この演習書に対応する教科書『線形代数講義』を『教科書』の略称で引用します．また引用文献の文献番号は本書のそれをそのまま使 います．

という見慣れた形のものを含んでいる．同問の解答によれば，二つの冪零行列の積が可換となるのは一方が他方のスカラー倍のときに限られるので，そうではない場合に和がべき零となるかどうかを見ればよい．

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & -b \\ a & -\sqrt{ab} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{a'b'} & -b' \\ a' & \mp\sqrt{ab} \end{pmatrix}$$

と仮定しても一般性を失わない．これらの和は

$$\begin{pmatrix} \sqrt{ab} \pm \sqrt{a'b'} & -b - b' \\ a + a' & -\sqrt{ab} \mp \sqrt{a'b'} \end{pmatrix}$$

となるが，もしこれが冪零なら，再び上に示した形をしていなければならない．特に

$$\sqrt{ab} \pm \sqrt{a'b'} = \sqrt{(a+a')(b+b')}, \quad \text{または} \quad \sqrt{ab} \pm \sqrt{a'b'} = -\sqrt{(a+a')(b+b')},$$

でなければならない．これらは 2 乗するといずれも

$$ab \pm 2\sqrt{aba'b'} + a'b' = ab + ab' + a'b + a'b', \quad \text{従って} \quad \pm 2\sqrt{aba'b'} = ab' + a'b$$

となり，再び両辺を 2 乗すると

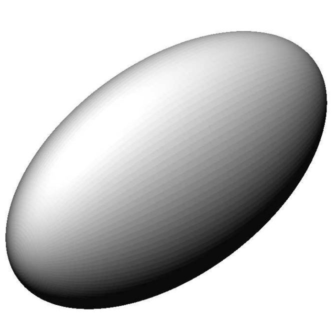
$$4aba'b' = a^2b'^2 + 2aba'b' + a'^2b^2, (ab' - a'b)^2 = 0, ab' = a'b$$

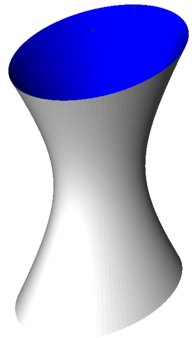
となる．これから，$a \neq 0$, $b \neq 0$ なら $a' = ka$, $b' = kb$ となり，一つ前に代入して $\pm 2\sqrt{k^2}ab = 2kab$. よって複号が正なら $k \geq 0$ で $\sqrt{a'b'} = k\sqrt{ab}$, また負なら $k \leq 0$ で $\sqrt{a'b'} = -k\sqrt{ab}$ なので，B はいずれにしても A の k 倍となり，A と可換で，除外した場合になってしまう．a, b のいずれか一方が 0 のときも a', b' の対応する一方が 0 となって A, B は可換となる．よって，2 次の冪零行列では，可換な場合以外に和が冪零となることは無い．

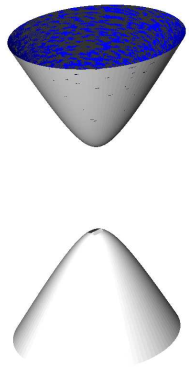
　さて，行列の次数を上げると n 次の行列全体 $M(n, \boldsymbol{R})$ の中で冪零行列の集合 $N(n, \boldsymbol{R})$ の次元（自由度）がどれくらいかはややこしいが，変数の個数 n^2, 見かけの条件の個数 n^2 であるのに対し，2 次の例で見たように，後者には無駄が有り，引き算しても零にはならず正の次元の自由度が残る．冪零行列の対は集合 $NN := N(n, \boldsymbol{R}) \times N(n, \boldsymbol{R})$ という積集合で表され，次元は 2 倍になるが，この中で積が可換であるようなものは更に条件を満たす．この集合を仮に V_A と書くと，2 次や 3 次の例は $n > 4$ 次にも埋め込まれるので，V_A は NN の次元が下がった真部分集合になっている．同様に和が再び冪零となるような対はやはり代数的な制約条件を満たし，この集合を V_B とすれば反例が存在することからこれも NN の真部分代数的集合となる．

　さて，非可換なのに和が再び冪零となるような対が例外的であるとは，$(NN \setminus V_A) \cap V_B$ が $(NN \setminus V_A) \setminus V_B$ より圧倒的に多いということであるが，$NN \setminus V_A$ は真部分代数的集合を除いただけなので，次元（自由度）は NN と変わらない．$(NN \setminus V_A) \cap V_B$ は（高々）V_B の自由度を持つだけなので，それを更に引いても次元は NN と同じである．つまり非可換な冪零行列の対の圧倒的多数は和が冪零にはならないということである．これが本書に書いた “成り立つ例は一般的ではない” の正確な意味であった．

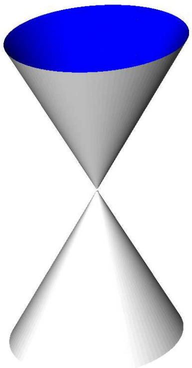
p.148 要項 6.5.1 への補遺. 2 次曲面のリストを図とともに掲げる．以下の図は面図形は OpenGL を用いて，また線図形は X11 標準ライブラリと C 言語を用いて作成されている．



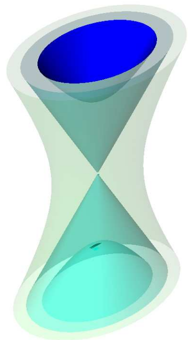




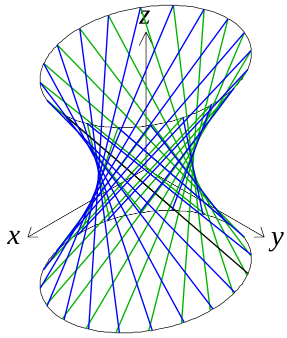
楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　　単葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$　　双葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$



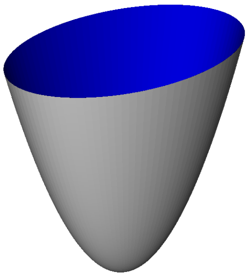
楕円錐面（注 1）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$



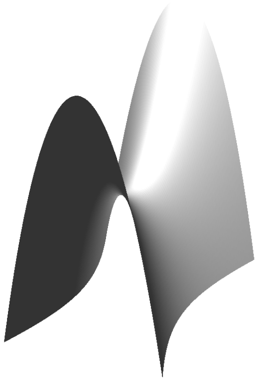
定数項のみ異なる 2 種の
双曲面と錐面の重ね描き



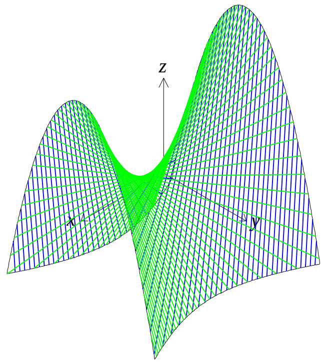
単葉双曲面が線織面で
あることを示す図（注 2）



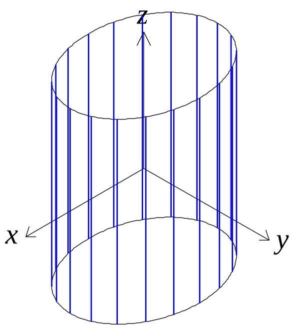
楕円放物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$



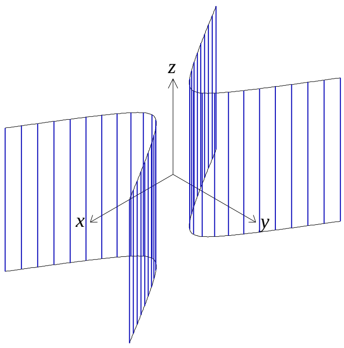
双曲放物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$



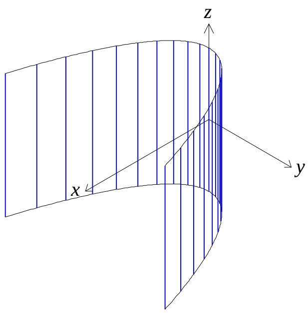
双曲放物面が線織面で
あることを示す図（注 2）



楕円柱面（注 3）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



放物柱面 $y^2=4px$

楕円柱面，双曲柱面はそれぞれ楕円面，双曲面で $c\to\infty$ とした退化図形と考えられる．放物柱面は放物面で $b\to\infty$ としたものである．この他，交わる 2 平面 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}$ (双曲柱面の退化)，平行 2 平面 $\dfrac{x^2}{a^2}=1$（同），重複 1 平面 $x^2=0$（放物柱面の退化），一点 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$（楕円面の退化），重複 1 直線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$（楕円柱面の退化），虚図形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$, $\dfrac{x^2}{a^2}=-1$（楕円面や楕円柱面の退化）が，2 次方程式により定まる図形に含まれる．2 次の項が存在する方程式については以上がすべてである．

注 1． 錐面とは，xy 平面上の平面曲線 C を導線として，xy 平面の外側の一定点と導線の各点を結ぶ直線により作られる線織面のことである．柱面と異なり，2 次の錐面は基本的に楕円錐面で尽くされる．導線を双曲線や放物線にして錐面を作り，それが楕円錐面を傾けたものとなっていることを確かめよ．

注 2 単葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ には，

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=k\Big(1-\frac{y}{b}\Big),\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\Big(1+\frac{y}{b}\Big),$$

および

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=k\Big(1+\frac{y}{b}\Big),\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\Big(1-\frac{y}{b}\Big),$$

という，2 系統の直線族より成る線織面である．実際，これらはともに k を族のパラメータとする空間直線の方程式であり，二つを掛け合わせて k を消去すればもとの双曲面の方程式が導かれるからである．この造形は和楽器の 鼓（つづみ） の形としてよく知られている．

双曲放物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$ の場合は

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=k,\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\frac{y}{b},$$

および

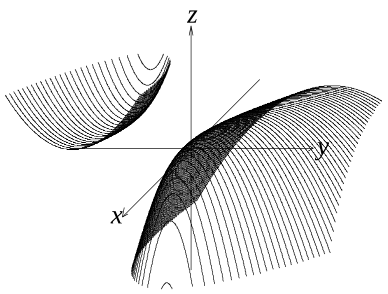
$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k,\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\frac{y}{b},$$

という，2 系統の直線族が成す線織面となっている．この形は馬の鞍型の和風腰掛けとしてよく見られる．

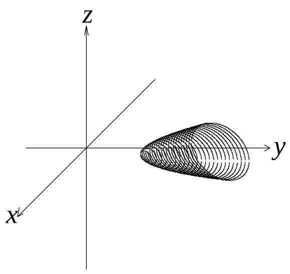
上の図はこれらの方程式で定まる空間直線を予め描画した枠の間に引き，全体を直等測投影法で 3D 的に描いたものである．

注 3. 柱面とは，xy 平面上の平面曲線 C を導線として，その各点を通る z 軸に平行な母線が作る線織面のことである．導線が 2 次曲線のときはその名前を付ける．一般には母線が傾いた平行線の斜柱面も考えられるが，2 次柱面の場合は傾けてもどうせ母線に垂直な切り口が 2 次曲線となるので，新しい図形はできない．

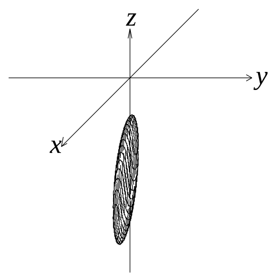
p.149 例題 6.5-1 の曲面のグラフ．
これらのグラフは，一つの座標平面に平行な平面族による与えられた曲面の切り口の曲線を斜投影法により連続的に描画したものである．OpenGL の図のような陰線処理も陰影も透視も用いていない素朴なものだが，同一のプログラムで方程式のデータを変更するだけで描け，曲面の種類を手早く知るにはこれでも十分役に立つ．



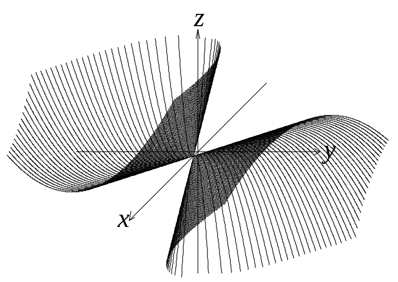
(1) $(-16\le x,y,z\le 16)$



(2) $(-8\le x,z\le 8,-4\le y\le 12)$



(3) $(-20\le x,y\le 20,-32\le z\le 8)$



(4) $(-16\le x,y,z\le 16)$

p.163 例題 7.2-2 (2) の解答への補遺．そこで省略された途中の計算過程を示す．

$$
\begin{aligned}
&S\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(2-i)t} \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{3t}-(\frac{1}{2}-i)e^{(2+i)t}-(\frac{1}{2}+i)e^{(2-i)t} & -\frac{1}{2}ie^{(2+i)t}+\frac{1}{2}ie^{(2-i)t} & e^{3t}-\frac{1}{2}e^{(2+i)t}-\frac{1}{2}e^{(2-i)t} \\ 4e^{3t}-(2-\frac{3}{2}i)e^{(2+i)t}-(2+\frac{3}{2}i)e^{(2-i)t} & (\frac{1}{2}-i)e^{(2+i)t}+(\frac{1}{2}+i)e^{(2-i)t} & 2e^{3t}-(1+\frac{1}{2}i)e^{(2+i)t}-(1-\frac{1}{2}i)e^{(2-i)t} \\ -2e^{3t}+2\,\mathrm{Re}\{(1-2i)e^{(2+i)t}\} & ie^{(2+i)t}-ie^{(2-i)t} & -e^{3t}+e^{(2+i)t}+e^{(2-i)t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{3t}-2\,\mathrm{Re}\{(\frac{1}{2}-i)e^{(2+i)t}\} & \mathrm{Re}\{ie^{(2-i)t}\} & e^{3t}-\mathrm{Re}\,e^{(2+i)t} \\ 4e^{3t}-2\,\mathrm{Re}\{(2+\frac{3}{2}i)e^{(2-i)t}\} & 2\,\mathrm{Re}\{(\frac{1}{2}-i)e^{(2+i)t}\} & 2e^{3t}-2\,\mathrm{Re}\{(1+\frac{1}{2}i)e^{(2+i)t}\} \\ -2e^{3t}+2\,\mathrm{Re}\{(1-2i)e^{(2+i)t}\} & 2\,\mathrm{Re}\{ie^{(2+i)t}\} & -e^{3t}+2\,\mathrm{Re}\,e^{(2+i)t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{3t}-e^{2t}(\cos t+2\sin t) & e^{2t}\sin t & e^{3t}-e^{2t}\cos t \\ 4e^{3t}-e^{2t}(4\cos t+3\sin t) & e^{2t}(\cos t+2\sin t) & 2e^{3t}+e^{2t}(-2\cos t+\sin t) \\ -2e^{3t}+2e^{2t}(\cos t+2\sin t) & -2e^{2t}\sin t & -e^{3t}+2e^{2t}\cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

なお，この計算を見ても分かるように，例題 5.4-1 (3) で計算した A^n の結果を用いる場合も，$\mathrm{Re}(2+i)^n$ 等のままの方が便利であり，そこのコメントで書いたような $5^{n/2}\cos n\alpha$ 等への書き換えは役に立たない．

p.166 例題 7.2-3 への補遺．
キャンベル-ハウスドルフの公式の一般項を表す漸化式を載せておく．

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^n c_n(X,Y)\Big)$$

と書いたときの係数 $c_n(X,Y)$ は次の漸化式で求められる：

$$(n+1)c_{n+1}(X,Y) = \frac{1}{2}[X-Y, c_n] + \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} K_{2m} \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_{2m-1}+j_{2m}=n} [c_{j_1}, [\cdots[c_{j_{2m-1}}, [c_{j_{2m}}, X+Y]]\cdots]], \quad \text{(S.1)}$$

ここに，K_{2m} は

$$\frac{z}{1-e^{-z}} = 1 + \frac{1}{2}z + \sum_{m=1}^{\infty} K_{2m} z^{2m}$$

の展開係数である．他方，ベルヌーイ数 B_m が

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!} B_m z^{2m}$$

で定義される（例えば [3], p.142 を見よ）ので, $z \mapsto -z$ と置き換えることにより

$$K_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)!} B_m$$

であることが分かり，従って m により正負を繰り返す．
数学辞典第 4 版に載っている公式は主要項の交換子にカンマが抜けているようである．

p.184 要項 7.6.2 への補遺
順序の公理は数学のいずれかの講義で習ったと思うが，念のためここに掲げておこう．
集合 G 上の 2 項関係 $\leq$ が順序であるとは

(1) 反射律 $\forall x \in G$ について $x \leq x$.

(2) 反対称律 $\forall x, y \in G$ について，もし $x \leq y$, $y \leq x$ なら $x = y$.

(3) 推移律 $\forall x, y, z \in G$ について，もし $x \leq y$, $y \leq z$ なら $x \leq z$.

$x \leq y$ を $y \geq x$ とも書く．また $x \leq y$ だが $x \neq y$ のとき $x < y$ と記す．

通常の実数の順序では $\forall x, y \in \boldsymbol{R}$ について $x \leq y$ か $y \leq x$ かのいずれかが成り立つが，この性質は基本的な順序の公理としては仮定しない．この性質を持つ順序は**全順序**と呼ばれる特別なクラスを成す．実数の順序では更に，

(4) $x \leq y$ なら $x + z \leq y + z$,

(5) $x \leq y$, $z \geq 0$ なら $xz \leq yz$

が成り立つ．これを $\boldsymbol{R}$ の演算と両立する順序と言う．$\boldsymbol{R}$ 上の線形空間 V の順序 $\leq$ の場合には，(1)–(3), および (4) をベクトルの加法と読み替えたものに加えて，(5) の代わりに

(5)$'$ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ を満たせば，$\forall \lambda > 0$ について $\lambda \boldsymbol{x} \leq \lambda \boldsymbol{y}$

を満たすものを線形演算と両立する順序と呼ぶ．$\boldsymbol{R}$ 上の線形空間 V にこのような順序 $\leq$ があると，$V^+ := \{\boldsymbol{x} \in V\,;\, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ と置くとき，これは $\boldsymbol{0}$ を含む凸錐となることが容易に分かる．実際，
(1) から $\forall \boldsymbol{x} \in V$ について $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \Gamma$,
(4) から $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Gamma$, すなわち $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, すなわち $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \Gamma$,
同様に (5)$'$ から $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, $\lambda > 0 \Longrightarrow \lambda \boldsymbol{x} \geq \lambda \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, すなわち $\lambda \boldsymbol{x} \in \Gamma$.

逆に，凸錐 $\Gamma \subset V$ について

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in \Gamma$$

で V に 2 項関係 $\leq$ を定める（下注 1）と，順序の公理の (3), (4), (5)$'$ が成り立つことが容易に分かる．例えば (3) の推移律については，$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{z} \iff \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in \Gamma, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y} \in \Gamma \Longrightarrow \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \in \Gamma \iff \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z}$.

更に，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \Gamma$ が (1) が成り立つための必要十分条件である．(2) が成り立つには $\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \in \Gamma$ から $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が従うことが必要十分で，これは Γ が凸という仮定の下では，それが直線を含まないことと同値である．また $-\Gamma := \{-\boldsymbol{x}\,;\, \boldsymbol{x} \in \Gamma\}$ を Γ の向きを逆転した錐とすれば，これは $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{\boldsymbol{0}\}$ とも同値である．

この要項で簡潔に述べたのは以上のような内容であった．そこで述べたように，$\boldsymbol{R}^n$ の線形演算と両立する順序の代表例は閉第 1 象限

$$\Gamma = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)\,;\, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$$

を正錐とするものであり，第 8 章の 8.4 節でも出てくるように，この順序は

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \iff x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n$$

という関係で定義される，従って第 2 象限と第 4 象限の元 $\boldsymbol{x} = (1, -1, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (-1, 1, \ldots)$ などはこの順序では比較できないペアの例となる．$\boldsymbol{R}^n$ にも（従って $\boldsymbol{C}^n$ にも）あまり実用的とは言えないかもしれない（下注 2）が，$\boldsymbol{R}$ 上の線形演算と両立する全順序を入れることはできる．例えば

$$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \iff 1 \leq \exists i \leq n \ \text{ s.t. } \ x_1 = y_1, \ldots, x_{i-1} = y_{i-1},\ x_i < y_i$$

で定義される辞書式順序である．$n = 2$ のときにこの順序の正錐がどんなものか考えてみよ．

注 1． いろんな Γ を同時に考えるときは，区別のため $\leq$ の代わりに $\leq_\Gamma$ などと記す．
注 2． Γ が閉凸錐だと，$\boldsymbol{x}_k \geq \boldsymbol{0}$ から $k \to \infty$ の極限で $\boldsymbol{x}_\infty \geq \boldsymbol{0}$ も成り立つのだが，$n \geq 2$ のとき $\boldsymbol{R}^n$ の全順序を定めるような凸錐は閉集合には成り得ない．実際，全順序を定めるには $\Gamma \cup (-\Gamma) = \boldsymbol{R}^n$ と同時に $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{\boldsymbol{0}\}$ となることが必要だが，このようなものは $\boldsymbol{R}^n$ の原点を中心とする超球面の閉集合による互いに交わらない分割を誘導してしまい，超球面の連結性に反する．上述のように極限操作で閉じていないような順序は，少なくとも解析ではあまり有用性が無いが，有限集合では辞書式順序は非常に有用である．

p.190 の最後への追加．
ここでは，最短距離を与える点の存在証明だけを載せているが，実際に最短距離を与える点の記述は例題 8.2-3

の $A^\dagger$ で与えられている．なお，これはいわゆる重回帰分析の計算と同等で，その観点からの解法は補充問題の問 8.1.4 で示されている．更に，この最短点は，初等幾何的な考察により，以下のようにしても求められる．少し長くなるが，コンパクト集合の知識が不要なので，次元を適当に下げれば高校生にも理解できるであろう．

まず，線形部分空間 $\mathrm{Image}\,A$ の点 $\boldsymbol{z}$ で, $y-\boldsymbol{z}$ が $\mathrm{Image}\,A$ に属するどのベクトルとも直交するようなものがただ一つ選べることに注意する (いわゆる垂線の足)．これは幾何学的直感では自明だが，一般次元なので代数的に考えると，$\mathrm{Image}\,A$ の基底を $\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_r$ とし，求めるベクトル $\boldsymbol{z}$ をこれらの一次結合 $\boldsymbol{z}=\sum_{i=1}^r c_i\boldsymbol{z}_i$ で表せば，直交条件を表す連立 1 次方程式は

$$\boldsymbol{z}_i^T(\boldsymbol{y}-\sum_{i=1}^r c_i\boldsymbol{z}_i)=0,\quad i=1,\dots,r,\quad \text{すなわち}\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{z}_r^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_r)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{z}_r^T\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

となるが, 係数行列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{z}_r^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_r)$ の階数が r (補充問題の問 2.3.8 (2) 参照) なので，一意に解ける．ちなみに $\boldsymbol{y}\in\mathrm{Image}\,A$ ならこの一意解は $\boldsymbol{y}$ (を上記基底で表した時の係数) となる．

さて $\boldsymbol{z}$ をこのような点, $\boldsymbol{z}'$ を $\mathrm{Image}\,A$ のそれとは異なる任意の点とすれば，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}'\|^2&=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'\|^2=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|^2+2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^T(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}')+\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'\|^2\\&=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|^2+\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'\|^2>\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|^2\end{aligned}$$

となる．(ここで，$\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'\in\mathrm{Image}\,A$ より直交性を用いた．幾何学的には直角三角形の斜辺と他の辺の大小関係に他ならない．) よって $\boldsymbol{z}$ は確かに最短点を与える．なお元の問題では $\mathrm{Image}\,A$ の点ではなく，それが A の像となるような元の空間の点を要求しているので，$\boldsymbol{z}=A\boldsymbol{x}$ という $\boldsymbol{x}$ を一つ選べば，一般の元は $\boldsymbol{x}+\mathrm{Ker}\,A$ という集合を成す.

p.197 例題 8.2-2 の基本変形計算の詳細.
せっかくなので，行列式の計算例も示しておこう.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-1&0&1\\0&1-\lambda&1&-1&-1\\-1&1&2-\lambda&-1&-1\\0&-1&-1&1-\lambda&1\\1&-1&-1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 5 行を}\\\text{第 3 行に加える}}}\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-1&0&1\\0&1-\lambda&1&-1&-1\\0&0&1-\lambda&0&1-\lambda\\0&-1&-1&1-\lambda&1\\1&-1&-1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 3 行から}\\\lambda-1\ \text{を括り出す}}}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-1&0&1\\0&1-\lambda&1&-1&-1\\0&0&-1&0&-1\\0&-1&-1&1-\lambda&1\\1&-1&-1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 5 列から}\\\text{第 3 列を引く}}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-1&0&2\\0&1-\lambda&1&-1&-2\\0&0&-1&0&0\\0&-1&-1&1-\lambda&2\\1&-1&-1&1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 3 行で展開}}$$

$$-(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0&2\\0&1-\lambda&-1&-2\\0&-1&1-\lambda&2\\1&-1&1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 3 行に加える}}}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0&2\\0&1-\lambda&-1&-2\\0&-\lambda&-\lambda&0\\1&-1&1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 3 行から}\\-\lambda\ \text{を括り出す}}}$$

$$\lambda(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0&2\\0&1-\lambda&-1&-2\\0&1&1&0\\1&-1&1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 3 列を}\\\text{第 2 列から引く}}}\lambda(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0&2\\0&2-\lambda&-1&-2\\0&0&1&0\\1&-2&1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 3 行で展開}}$$

$$\lambda(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&0&2\\0&2-\lambda&-2\\1&-2&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 1 行に加える}}}\lambda(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&2-\lambda&0\\0&2-\lambda&-2\\1&-2&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 行から}\\\lambda-2\ \text{を括り出す}}}$$

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix}-1&-1&0\\0&2-\lambda&-2\\1&-2&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 列を}\\\text{第 2 列から引く}}}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2-\lambda&-2\\1&-3&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 行で展開}}$$

$$-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix}2-\lambda&-2\\-3&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 列を}\\\text{第 2 列に加える}}}-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix}2-\lambda&-\lambda\\-3&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\-3&1\end{vmatrix}$$
$$=-\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5).$$

次に，A^TA-5E の行基本変形は

$$A^TA-5E=\begin{pmatrix}-3&0&-1&0&1\\0&-4&1&-1&-1\\-1&1&-3&-1&-1\\0&-1&-1&-4&1\\1&-1&-1&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 4 行に加える}}]{\substack{\text{第 3 行を}\\\text{第 5 行に加える}}}\begin{pmatrix}-3&0&-1&0&1\\0&-4&1&-1&-1\\-1&1&-3&-1&-1\\0&-5&0&-5&0\\0&0&-4&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行を 3 倍する}]{\substack{\text{第 5 行を }-4\text{ で割る}\\\text{第 4 行を }-5\text{ で割る}}}$$

$$\begin{pmatrix}-3&0&-1&0&1\\0&-4&1&-1&-1\\-3&3&-9&-3&-3\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を第 3 行から引く}\\\text{第 4 行の 4 倍を第 2 行に加える}}}\begin{pmatrix}-3&0&-1&0&1\\0&0&1&3&-1\\0&3&-8&-3&-4\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 5 行を第 2 行から引く}]{\substack{\text{第 4 行の 3 倍を第 3 行から引く}\\\text{第 5 行を第 1 行に加える}}}$$

$$\begin{pmatrix}-3&0&0&0&2\\0&0&0&3&-2\\0&0&-8&-6&-4\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を 2 で割る}\\\text{第 4 行を 3 倍する}}}\begin{pmatrix}-3&0&0&0&2\\0&0&0&3&-2\\0&0&-4&-3&-2\\0&3&0&3&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行を第 4 行から引く}]{\substack{\text{第 5 行の 4 倍を}\\\text{第 3 行に加える}}}\begin{pmatrix}-3&0&0&0&2\\0&0&0&3&-2\\0&0&0&-3&2\\0&3&0&0&2\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を第 2 行に加えた後}\\\text{行を並べ替える}}}\begin{pmatrix}-3&0&0&0&2\\0&3&0&0&2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&-3&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

ここで $x_5=3$ と置けば，上から順に $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=-3$, $x_4=2$ と求まる．分数が現れるのを厭わなければ普通に第 1 列から始めて消去法を用いてもよい．

次に固有値 2 に対しては，

$$A^TA-2E=\begin{pmatrix}0&0&-1&0&1\\0&-1&1&-1&-1\\-1&1&0&-1&-1\\0&-1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 5 行を第 3 行に加える}\\\text{第 4 行を第 2 行から引く}}}\begin{pmatrix}0&0&-1&0&1\\0&0&2&0&-2\\0&0&-1&0&-1\\0&-1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を 2 で割った後}\\\text{第 1,3,4 行に加える}}}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&-2\\0&-1&0&-1&0\\1&-1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 行を第 5 行から引く}]{\substack{\text{第 3 行を }-2\text{ で割った後}\\\text{これを第 2 行に加える}}}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&0\\1&0&-1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2,3 行で掃き出す}}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&0\\1&0&0&2&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{第 4 行の符号を変え}\\\text{並べ替える}}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

これより $x_3=x_5=0$ は確定である．よって $x_4=-1$ と置けば，$x_1=2$, $x_2=1$ が順に求まる．

次に，固有値 1 に対しては，

$$A^TA-E=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&-1\\-1&1&1&-1&-1\\0&-1&-1&0&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\text{その後で}\\\text{第 1 行を第 3 行に加える}}]{\text{第 3 行を第 5 行に加える}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&-1\\0&1&0&-1&0\\0&-1&-1&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 3 行を第 4 行に加える}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&-1\\0&1&0&-1&0\\0&0&-1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2 行を第 4 行に加える}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&-1\\0&1&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 4 行を }-2\text{ で割った後}\\\text{この行で掃き出す}}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を第 1 行に加えた後}\\\text{行を並べ替える}}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

これより $x_1=x_2=x_4=0$ が確定し，$x_5=1$ と置けば $x_3=1$ と求まる．

最後に 0 に対しては

$$A^TA=\begin{pmatrix}2&0&-1&0&1\\0&1&1&-1&-1\\-1&1&2&-1&-1\\0&-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 5 行を第 3 行に加え}\\\text{第 2 行を第 4 行に加える}}}\begin{pmatrix}2&0&-1&0&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\1&-1&-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を第 5 行に加え}\\\text{第 3 行を第 1 行に加える}}}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&2\\0&1&1&-1&-1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行を第 2 行から引く}]{\substack{\text{第 1 行を 2 で割った後}\\\text{これを第 5 行から引く}}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

これは x_4, x_5 が自由パラメータとなるので，これらに順に $0,-1$ および $1,0$ を充てれば，本書中に書いた二

つの解が得られる．

p.200 巡回行列の定義は，教科書の第 3 章の章末問題 5 では

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & c_2 \\ c_2 & & & \ddots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix} \tag{8.8$'$}$$

を用いていた.（ただしそこでは行列式しか考えていない.）巡回行列の定義は言葉で表現すれば，“第 i 行が第 $i-1$ 行の成分を右に 1 だけ巡回シフトして得られる”，すなわち，$a_{ij}=a_{i-1,j-1}$ で，$j=1$ のときだけ $a_{i1}=a_{i-1,n}$ とする，ということなので，これと (8.8) の定義は本質的な差は無く，ただ添え字の付け方が異なるだけであり，実際 c_i は不定文字なので，両者が表現する行列の集合は変わらない．ただ，この行列を離散畳み込みの表現とみなすときは，(8.8) の方が自然で，もし (8.8)$'$ を使うと，畳み込みの式が $y_i=\sum_{j=0}^{n-1} c_{i+j}x_j$，$j=0,1,\dots,n-1$ となってしまい，習慣と合わないので，ここでは (8.8) を用いた．行列式の値を考えるときは (8.8)$'$ の方が教科書の上掲問題のように ζ の正冪：

$$\prod_{i=0}^{n-1}(c_0+c_1\zeta^i+c_2\zeta^{2i}+\cdots+c_{n-1}\zeta^{(n-1)i}) \tag{S.2}$$

で表され，より綺麗である．

p.201 例題 8.3-1 (2) の解答への補注
(8.8) と上掲 (8.8)$'$ は互いに転置なので，行列式は一致するはずであるがそうは見えないと訝る人はいないだろうか？これは上の積 (S.2) の各因子を例題 8.3-1 (2) の対応する因子と比較しようとしたときに生じる疑問で，

$$c_0+c_1\zeta^{-i}+c_2\zeta^{-2i}+\cdots+c_{n-1}\zeta^{-(n-1)i}=c_0+c_1\zeta^i+c_2\zeta^{2i}+\cdots+c_{n-1}\zeta^{(n-1)i} \tag{S.3}$$

は一般には成り立たないのであるが，$\zeta^{jn}=1$, $j=0,1,\dots,n-1$ を (S.3) の左辺の各項に順に掛けると

$$c_0+c_1\zeta^{-i}+c_2\zeta^{-2i}+\cdots+c_{n-1}\zeta^{-(n-1)i}=c_0+c_1\zeta^{n-i}+c_2\zeta^{2(n-i)}+\cdots+c_{n-1}\zeta^{(n-1)(n-i)}$$

となり，(S.3) の右辺の i を $n-i$ に変えたものとなる．よって $i=0,1,\dots,n-1$ と動かせば，左辺も右辺も同じ集合を与えるので，全部の積は同じ値となるのである．

p.203 要項 8.4.4 ペロン-フロベニウスの定理の証明と条件をはずしたときの反例.
まず，次の主張を示す：

補題 1 A は全成分が非負の行列とする．このとき，$r=\rho(A)$ は A の固有値となり，これは全成分が非負の固有ベクトルを持つ．

証明 $\varepsilon>0$ を任意に取るとき，$A_\varepsilon:=A+\varepsilon I$ は全成分が正となるので，本書の例題 8.4.3 で証明したペロンの定理により，$r_\varepsilon=\rho(A_\varepsilon)$ は A_ε の単純固有値となり，全成分が正の固有ベクトル $\boldsymbol{a}_\varepsilon$ を持つ．今，これを $\|\boldsymbol{a}_\varepsilon\|_2=1$ に正規化しておく．$\varepsilon\downarrow 0$ のとき，本書の例題 7.6-2 で証明された固有値の連続性により r_ε は A のある固有値 $r\geq 0$ に収束する．$\boldsymbol{R}^n$ の閉第 1 象限と単位球の交わりは有界閉集合なので，$\boldsymbol{a}_\varepsilon$ は収束する部分列 $\boldsymbol{a}_{\varepsilon_k}$, $k=1,2,\dots$ を持つ．この極限 $\boldsymbol{a}$ は全成分が非負であり，$\|\boldsymbol{a}\|_2=1$ なので，これは零ベクトルではない．等式 $A_{\varepsilon_k}\boldsymbol{a}_{\varepsilon_k}=r_{\varepsilon_k}\boldsymbol{a}_{\varepsilon_k}$ において $k\to\infty$ とすれば，$A\boldsymbol{a}=r\boldsymbol{a}$ が成り立つ．A_{ε_k} の任意の固有値 λ_{ε_k} は $|\lambda_{\varepsilon_k}|\leq r_{\varepsilon_k}$ を満たすので，同じく固有値の連続性により，A の任意の固有値 λ も $|\lambda|\leq r$ を満たす．よって $r=\rho(A)$ である． □

以上は A に非負以外の条件を課していないので，要項 8.4.4 のペロンの定理の主張は必ずしも成り立たない．以下これを例により確認する．ただし (2) は上で証明されたようにこの段階で成立している．

種々の例

♠ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は冪零なので $\rho(A) = 0$, 従って 0 が最大固有値である．故に (1) の前半の $r > 0$ は無条件では必ずしも成り立たない．

♡ この例では 0 は単純固有値でもないので (3) も不成立．またこれに同伴する固有ベクトルは $(1,0)^T$ の定数倍のみであり，上の定理で存在が示された全成分が非負の固有ベクトルとはなっているが，全成分が正の固有ベクトルは持たないので (1) の後半も成り立っていない．ちなみにこの行列は $\|A\|_1 = 1$ であり（実際 $\max \dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}$ は $\boldsymbol{x} = (0,1)^T$ で達成される），従って $\rho(A) < \|A\|_1$ となる例でもある．

♢ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $\rho(A) = 1$, 1 は 2 重固有値で単純ではないが，正成分の固有ベクトル $(1,1)^T$ は存在する．すなわち (1), (2) は成り立っているが, (3) は不成立である．

♣ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\rho(A) = 1$, 1 は単純固有値で，それは正成分の固有ベクトル $(1,1)^T$ を持つが，他の固有値 -1 がスペクトル半径の円周上に有る．従って (1), (2), (3) は成り立っているが (4) は成り立っていない．この行列はペロン-フロベニウスの定理の条件を満たしているので，仮定を置いても (4) の成立は期待できないことが分かる．

次に，非負行列 A に対する既約性の定義の種々の言い換えを与える．

補題 2 $A = (a_{ij})$ を n 次の非負行列とするとき，次は同値である．(1) A の非零成分を 1 で置き換えたもの $\overline{A}$ が頂点数 n の強連結な有向グラフ G_A の隣接行列となっている．
(2) 任意の i, j について整数 $k_{ij} > 0$ を適当に選べば，$A^{k_{ij}}$ の第 ij 成分が正となる．(3) A の同じ番号の対の行と列の同時置換の連鎖（すなわち，置換行列 P による相似変換 P^TAP ）では，A はブロック上三角型にはできない．

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2) A^k の第 ij 成分は

$$\sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_3=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} a_{ii_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k j} \tag{S.4}$$

となる．すべての $a_{kl} \geq 0$ なので，この項のうちのどれか一つに正のものが有れば，全体は正となる．強連結性の仮定から，頂点 v_i と v_j をこの向きに繋ぐ辺の列 $v_i \to v_{i_2} \to v_{i_3} \to \cdots \to v_{i_k} \to v_j$ が存在する．これは $a_{ii_2}, a_{i_2 i_3}, \ldots, a_{i_k j}$ がすべて正であることを意味する．よって k をこのパスの長さに取るとき，A^k の第 ij 成分は正となる．
(2) $\Longrightarrow$ (1) 上の議論は逆に辿れる：もし A^k の第 ij 成分が正なら，(S.4) のどれか一つの項はすべての因子が正でなければならず，このとき対応する添え字を持つ頂点列に対応する向き付けられたパスがグラフ G_A に存在することになる．(2) $\Longrightarrow$ (3) 対偶を証明する．置換行列 P による隣接行列 A の行と列の対の同時置換 $A \mapsto P^TAP$ は，グラフの頂点番号の付け替えに対応するので，グラフの強連結性を変えないことに注意せよ．従って (1), (2) の同値性が示されているので，A が (2) を満たすことと P^TAP が (2) を満たすことは同値である．そこで，ある置換行列 P により P^TAP がブロック上三角型 $\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$ の形となったとせよ．この形の行列は何乗しても左下のブロックは O のままで，従ってこの位置にある ij 成分について (2) の条件が満たされていない．これで $\neg$ (3) $\Longrightarrow$ $\neg$ (2) が示された．
(3) $\Longrightarrow$ (1) 対偶を取って，ある頂点 v_i から v_j へのパスが存在しないとせよ．頂点番号の付け替えで $i = n$, $j = 1$ としても一般性を失わない．更に，v_n から向きのついたパスで辿り着けない頂点が $v_1, \ldots, v_k$ $(k \leq n-1)$ であるように頂点の番号を付け替えておく．このときもちろん $a_{nj} = 0, j = 1, 2, \ldots, k$ であるが，更に. $a_{ij} = 0$, $i = k+1, \ldots, n-1, j = 1, 2, \ldots, k$ でもある．実際，$a_{ij} = 1$ がある $i \in \{k+1, \ldots, n-1\}, j \in \{k+1, \ldots, n-1\}$ について成り立てば，v_n から v_i へは仮定により向き付けられたパスが存在するので，それと辺 $\overrightarrow{\mathrm{v_i v_j}}$ を繋げば，v_n から v_j への向き付けられたパスが存在することになり，最初の仮定に反する．すると行列 A の左下の部分 $k+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$ が零行列 $O_{n-k,k}$ となり，A がブロック上三角型となってしまった．よって $\neg(1) \Longrightarrow \neg(3)$ が示された．

以上で (1) $\sim$ (3) の同値性が証明された．

例 問題 8.4.1(2) の有向グラフは強連結で，隣接行列とその冪乗は

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad A^4=I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

以後これが繰り返されるので，何乗しても全成分が正になることは無いが，どの位置の成分もこれらのどこかでは正になっている．

ペロン-フロベニウスの定理の証明 (1) 仮定により v_1 から v_2 に到る，ある長さ ν_1 の向き付けられたパスが存在する．また v_2 から v_1 に到る，ある長さ ν_2 の向き付けられたパスも存在する．これらをこの順に繋げば長さ $\nu=\nu_1+\nu_2$ の向き付けられた閉路が存在する．補題 2 の (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明において (S.4) 式を用いた議論と同様にして，任意の自然数 k に対し $A^{k\nu}$ の第 $(1,1)$ 成分は正であることが分かる．よって行列 A は冪零では有り得ず，従って $\rho(A)>0$ となる．補題 1 により行列 A は $r=\rho(A)$ を固有値に持ち，それは成分がすべて非負の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を持つことが示されているが，今補題 2 の (2) を仮定すれば，この $\boldsymbol{x}$ の成分が実はすべて正であることを結論できることを示そう．$\boldsymbol{x}$ の勝手に選んだ第 i 成分を考察する．始めからこの位置の成分 x_i が正なら証明することは無い．もしこれが 0 でも，$\boldsymbol{x}$ は零ベクトルでは無いので，少なくとも正の成分 x_j が一つは存在する．今この i,j のペアに対し，仮定により k を適当に選べば A^k の第 i,j 成分 $a_{ij}^{(k)}$ は正となる．すると

$$(A^k\boldsymbol{a})_i=\sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)}x_l\geq a_{ij}^{(k)}x_j>0$$

となる．$A^k\boldsymbol{x}=r^k\boldsymbol{x}$，従って $(A^k\boldsymbol{a})_i=r^kx_i$ であるから，これより $x_i>0$ が分かった．
(2) は既に補題 1 の段階で成立している．
(3) この証明は本書のペロンの定理における (3) の証明において，A を A^k に変えればほとんど同様にできる．すなわち,（r も込めて）ある固有値 r' が非負成分のベクトルで r の固有ベクトル $\boldsymbol{a}$ とは 1 次独立なもの $\boldsymbol{b}$ を持っていたとする．$A\boldsymbol{b}=r'\boldsymbol{b}$ より当然 $r'\geq 0$ であり，かつ $r'\leq r$ である．今 $\varepsilon\geq 0$ を $\boldsymbol{b}-\varepsilon\boldsymbol{a}$ が，すべての成分 ≥ 0 で，かつどこか，例えば i 番目に成分 0 を持つように選ぶ．具体的には $\varepsilon=\min_{1\leq j\leq n}\dfrac{b_j}{a_j}$ でよい．(特に，$\boldsymbol{b}$ 自身に 0 成分が有れば，その位置を i とし，$\varepsilon=0$ でよい．) $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と 1 次独立なので，ある j については $b_j-\varepsilon a_j>0$ となっているはずである．このとき，対 i,j に対して仮定により $(A^k)_{ij}>0$ となるような自然数 k が存在する．すると

$$\{A^k(\boldsymbol{b}-\varepsilon\boldsymbol{a})\}_i=\sum_{l=1}^n (A^k)_{il}(b_l-\varepsilon a_l)^g e(A^k)_{ij}(b_j-\varepsilon a_j)>0$$

であり，また他方で

$$\{A^k(\boldsymbol{b}-\varepsilon\boldsymbol{a})\}_i=\{(r')^k\boldsymbol{b}-r^k\varepsilon\boldsymbol{a}\}_i^l er^k(b_i-\varepsilon a_i)=0$$

であるので，$0<0$ を得て不合理である． $\square$

p.205 例題 8.4-2 の証明中に用いた，“連結グラフ G の適当な頂点を選ぶと，その頂点とそこから出るすべての辺を除去しても残りが連結になっているようにできる”，という主張を証明する．著者はグラフ理論が専門ではないので，これがどの程度周知の事実なのか判断できなかったので，一応自分が考えた証明を書いておく．

頂点数 n に関する帰納法によって証明するため，次のようなより強い主張に変えておく：

補題 頂点数 ≥ 3 の連結グラフには，削除しても残りが連結となるような頂点が少なくとも二つ存在する．

証明 帰納法の初段として，頂点数が 3 の連結グラフは，直線形か三角形かのいずれかであるが，前者は二つの端点がこの条件を満たし，後者はどの頂点もこの条件を満たす．そこで頂点数 $n\geq 4$ の連結グラフ G を考

える．もし G のどの頂点とそこから出るを辺を取り除いても残りが連結なら，最初から二つ以上省ける頂点が存在することになるので，この場合は OK である．ある頂点 v を省いたら連結でなくなったとせよ．残りのグラフの連結成分の中で頂点数 ≥ 3 のものについては，帰納法の仮定により少なくとも二つの省ける頂点を持つ．よって，それらのうちの v と結ばれていない方が G の省ける頂点となる．(両方 v と結ばれていれば，どちらも省ける.) また残った連結成分の一うち頂点数 1 または 2 のものが有れば，その頂点は v としか結ばれていないので，最初から省ける頂点を含んでいたことになる．連結成分は少なくとも二つあるから，これで少なくとも二つの省ける頂点が見つかった． □

p.223 問題 2.7.3 の解答の後の . 2 種の逆行列の一致の計算による確認．まず (2.10) と問題 2.7.2 の行列の (1,1) ブロックが一致することを見る．M, N の内容を思い出すと

$$M \underset{?}{=} A^{-1} + A^{-1}BNCA^{-1}$$

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} \underset{?}{=} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

A を左から，$(A - BD^{-1}C)$ を右から掛ける

$$A \underset{?}{=} A - BD^{-1}C + B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}(A - BD^{-1}C)$$

$$BD^{-1}C \underset{?}{=} B(D - CA^{-1}B)^{-1}(C - CA^{-1}BD^{-1}C)$$

この最後の行の右辺は

$$\begin{aligned} &= B(D - CA^{-1}B)^{-1}(I - CA^{-1}BD^{-1})C = B(D - CA^{-1}B)^{-1}(DD^{-1} - CA^{-1}BD^{-1})C \\ &= B(D - CA^{-1}B)^{-1}(D - CA^{-1}B)D^{-1}C = BID^{-1}C \end{aligned}$$

となる．よってこれを逆順に並べ，$\underset{?}{=}$ を普通の $=$ に変えればフォーマルな証明となる．

これが分かれば他の成分の一致も次々に示せる：(1,2) 成分は

$$-MBD^{-1} \underset{?}{=} -A^{-1}BN$$

上で示された M の言い換えを代入

$$-(A^{-1} + A^{-1}BNCA^{-1})BD^{-1} \underset{?}{=} -A^{-1}BN$$

$-A^{-1}$ を両辺からキャンセル

$$BD^{-1} + BNCA^{-1}BD^{-1} \underset{?}{=} BN$$

$$BD^{-1} \underset{?}{=} BN(I - CA^{-1}BD^{-1}) = BN(D - CA^{-1}B)D^{-1}$$

$N = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ なので，最後は等号になっている．

(2,1) 成分と (2,2) 成分の相等は同じようにやれば示せるが，M において A と D, B と C を交換すると N になるので，これらの相等は対称性により以上から出てくる．

p.225 問題 3.2.1(6) 線形写像になることの計算の補遺.
まず簡略解法を確かめる．

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

とするとき，確かに

$$x^2 + y^2 = \frac{(1 - t^2)^2 + 4t^2}{(1 + t^2)^2} = \frac{(1 + t^2)^2}{(1 + t^2)^2} = 1.$$

逆に

$$1 + x = \frac{2}{1 + t^2}, \quad 従って \quad t = \frac{y}{1 + x}$$

である．これより，まず $t \mapsto \lambda t$ により

$$x \mapsto \frac{1 - \lambda^2 t^2}{1 + \lambda^2 t^2} = \frac{1 - (\frac{\lambda y}{1+x})^2}{1 + (\frac{\lambda y}{1+x})^2}, \quad y \mapsto \frac{2\lambda t}{1 + \lambda^2 t^2} = \frac{2\frac{\lambda y}{1+x}}{1 + (\frac{\lambda y}{1+x})^2}$$

また,

$$t_1 = \frac{y_1}{1+x_1}, \quad t_2 = \frac{y_2}{1+x_2}$$

とすれば,

$$t = t_1 + t_2 = \frac{y_1}{1+x_1} + \frac{y_2}{1+x_2}$$
$$\longleftrightarrow (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}) = \Big(\frac{1-(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2})^2}{1+(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2})^2}, \frac{2(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2})}{1+(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2})^2}\Big)$$

以上により,演算の根拠が示されたので,これで一応解答となる.しかし,この問題の趣旨は,線形空間の公理の理解のための練習なので,定義から直接公理が満たされることを確かめてみよう.

(i)(1) 加法の可換律は加法の定義式が $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ について対称になっていることからほぼ自明である.

(2) 結合律を確かめるにはは,もう一点を (x_3, y_3) とするとき,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_{12}, y_{12}), \quad ここに \quad x_{12} = \frac{1-(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2})^2}{1+(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2})^2}, \ \ y_{12} = \frac{2(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2})}{1+(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2})^2}.$$

すると,

$$\{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\} + (x_3, y_3) = (x_{12}, y_{12}) + (x_3, y_3) = \Big(\frac{1-(\frac{y_{12}}{1+x_{12}}+\frac{y_3}{1+x_3})^2}{1+(\frac{y_{12}}{1+x_{12}}+\frac{y_3}{1+x_3})^2}, \frac{2(\frac{y_{12}}{1+x_{12}}+\frac{y_3}{1+x_3})}{1+(\frac{y_{12}}{1+x_{12}}+\frac{y_3}{1+x_3})^2}\Big)$$
$$= \Big(\frac{1-(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2}+\frac{y_3}{1+x_3})^2}{1+(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2}+\frac{y_3}{1+x_3})^2}, \frac{2(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2}+\frac{y_3}{1+x_3})}{1+(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2}+\frac{y_3}{1+x_3})^2}\Big)$$

この結果が,添え字 $1, 2, 3$ について対称なので,加法の可換性を考慮すると,$(x_1, y_1) + \{(x_2, y_2) + (x_3, y_3)\}$ も同じ結果となることが分かる.

(3) 発見的考察から,$t = 0 \longleftrightarrow (1, 0)$ なので,後者が零ベクトルの性質を持つことを確かめればよい.

$$(x, y)+(1, 0) = \Big(\frac{1-(\frac{y}{1+x}+0)^2}{1+(\frac{y}{1+x}+0)^2}, \frac{2(\frac{y}{1+x}+0)}{1+(\frac{y}{1+x}+0)^2}\Big) = \Big(\frac{(1+x)^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}, \frac{2(1+x)y}{(1+x)^2+y^2}\Big) = \Big(\frac{(1+x)^2-(1-x^2)}{2+2x}, \frac{2(1+x)}{2+2x}$$

ここで $x^2 + y^2 = 1$ を用いた.(4) 逆元は,上の発見的考察で $t \mapsto -t$ とすると $(x, y) \mapsto (x, -y)$ となることから,これがそうであると当たりをつけて,

$$(x, y) + (x, -y) = \Big(\frac{1-(\frac{y}{1+x}-\frac{y}{1+x})^2}{1+(\frac{y}{1+x}-\frac{y}{1+x})^2}, \frac{2(\frac{y}{1+x}-\frac{y}{1+x})}{1+(\frac{y}{1+x}-\frac{y}{1+x})^2}\Big) = (1, 0).$$

(ii)(5) $\mu(x, y) = (x_1, y_1)$ と置くとき,

$$x_1 = \frac{1-(\frac{\mu y}{1+x})^2}{1+(\frac{\mu y}{1+x})^2}, \quad y_1 = \frac{2\frac{\mu y}{1+x}}{1+(\frac{\mu y}{1+x})^2}$$

従って

$$\frac{y_1}{1+x_1} = \frac{\mu y}{1+x} \tag{S.5}$$

であり,

$$\lambda\{\mu(x, y)\} = \lambda(x_1, y_1) = \Big(\frac{1-(\frac{\lambda y_1}{1+x_1})^2}{1+(\frac{\lambda y_1}{1+x_1})^2}, \frac{2\frac{\lambda y_1}{1+x_1}}{1+(\frac{\lambda y_1}{1+x_1})^2}\Big) = \Big(\frac{1-(\frac{\lambda\mu y}{1+x})^2}{1+(\frac{\lambda\mu y}{1+x})^2}, \frac{2\frac{\lambda\mu y_1}{1+x}}{1+(\frac{\lambda\mu y}{1+x})^2}\Big)$$

となる.これは $(\lambda\mu)(x, y)$ に他ならない.

(6) λ 倍の定義式において $\lambda = 1$ とすれば (3) の計算に帰着し $1 \cdot (x, y) = (x, y)$ を得る.(7)

$$(\lambda+\mu)(x, y) = \Big(\frac{1-(\frac{(\lambda+\mu y}{1+x})^2}{1+(\frac{(\lambda+\mu)y}{1+x})^2}, \frac{2\frac{(\lambda+\mu)y}{1+x}}{1+(\frac{(\lambda+\mu)y}{1+x})^2}\Big)$$
$$= \Big(\frac{1-(\frac{\lambda y}{1+x}+\frac{\mu y}{1+x})^2}{1+(\frac{\lambda y}{1+x}+\frac{\mu y}{1+x})^2}, \frac{2(\frac{\lambda y}{1+x}+\frac{\mu y}{1+x})}{1+(\frac{\lambda y}{1+x}+\frac{\mu y}{1+x})^2}\Big) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$$

は，スカラー倍による $\dfrac{y}{1+x}$ の変化の式 (S.5) を考慮すればほぼ自明である．
(8) $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=(x,y)$ と置けば，

$$\frac{y}{1+x}=\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+x_2} \tag{S.6}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lambda\{(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\}=\lambda(x,y)&=\Big(\frac{1-(\frac{\lambda y}{1+x})^2}{1+(\frac{\lambda y}{1+x})^2},\frac{2\frac{\lambda y}{1+x}}{1+(\frac{\lambda y}{1+x})^2}\Big)\\&=\Big(\frac{1-(\lambda\frac{y_1}{1+x_1}+\lambda\frac{y_2}{1+x_2})^2}{1+(\lambda\frac{y_1}{1+x_1}+\lambda\frac{y_2}{1+x_2})^2},\frac{2\lambda(\frac{y_1}{1+x_1}+\frac{y_2}{1+y_2})}{1+(\lambda\frac{y_1}{1+x_1}+\lambda\frac{y_2}{1+x_2})^2}\Big)=\lambda(x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2).\end{aligned}$$

1 次元では例として物足りないと思われる人は，

$$x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}},\quad y=\frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

という写像で $(u,v)\in\boldsymbol{R}^2$ から単位円板の内部 $\{(x,y)\,;\,x^2+y^2<1$ への対応を作り，後者に $\boldsymbol{R}$ 上 2 次元の線形空間の構造を入れてみよ．

p.232 問題 4.2.1 への詳細計算の補遺.
以下に示すのは計算の一例に過ぎないので，自分の計算を確かめるためには使えない．行列式を計算するツールはけっこう有るので（本サイトの『線形代数計算用アプリ』参照），心配ならそれらを用いて行列式の最後の答だけでなく途中経過でも値が変わっていないことを確かめればよいだろう．

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-9&2\\1&-4&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 3 行を第 1 行から引く}}\begin{vmatrix}0&6&0\\2&-9&2\\1&-4&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 行で展開}}-6\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}=-6\times4=-24.$

(2) $\begin{vmatrix}2&-3&2\\-1&-4&3\\4&1&-2\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 3 列を}\\\text{第 1, 2 列に加える}}}\begin{vmatrix}4&-1&2\\2&-1&3\\2&-1&-2\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 列の 2 倍を}\\\text{第 1 列に加える}}}\begin{vmatrix}2&-1&2\\0&-1&3\\0&-1&-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 列で展開}}2\begin{vmatrix}-1&3\\-1&-2\end{vmatrix}=2\times5=10.$

(3) $\begin{vmatrix}1&2&3&5\\-2&1&-4&3\\-3&-4&1&-2\\-4&-3&2&4\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 行の 2 倍を第 2 行に加える}\\\text{第 1 行の 3 倍を第 3 行に加える}\\\text{第 1 行の 4 倍を第 4 行に加える}}}\begin{vmatrix}1&2&3&5\\0&5&2&13\\0&2&10&13\\0&5&14&24\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 列で展開}}\begin{vmatrix}5&2&13\\2&10&13\\5&14&24\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 3 行から}\\\text{第 1 行を引く}}}\begin{vmatrix}5&2&13\\2&10&13\\0&12&11\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\substack{\text{第 2 行から}\\\text{第 3 行を引く}}}\begin{vmatrix}5&2&13\\2&-2&2\\0&12&11\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加える}]{\substack{\text{第 2 列を}\\\text{第 1,3 列に}}}\begin{vmatrix}7&2&15\\0&-2&0\\12&12&23\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 行}\\\text{で展開}}}-2\begin{vmatrix}7&15\\12&23\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 列の 2 倍を}\\\text{第 2 列から引く}}}-2\begin{vmatrix}7&1\\12&-1\end{vmatrix}=-2\times(-19)=38.$

(4) $\begin{vmatrix}1&1&2&3&4\\1&0&2&3&1\\2&0&1&3&2\\3&2&0&1&2\\4&-3&-2&0&1\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 行の 2 倍を第 4 行から引き}\\\text{第 1 行の 3 倍を第 5 行に加える}}}\begin{vmatrix}1&1&2&3&4\\1&0&2&3&1\\2&0&1&3&2\\1&0&-4&-5&-6\\7&0&4&9&13\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 列で展開}}-\begin{vmatrix}1&2&3&1\\2&1&3&2\\1&-4&-5&-6\\7&4&9&13\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行から第 1 行を引く}}$

$-\begin{vmatrix}1&2&3&1\\1&-1&0&1\\1&-4&-5&-6\\7&4&9&13\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 列に第 1 列を加える}\\\text{第 4 列から第 1 列を引く}}}-\begin{vmatrix}1&3&3&0\\1&0&0&0\\1&-3&-5&-7\\7&11&9&6\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行で展開}}\begin{vmatrix}3&3&0\\-3&-5&-7\\11&9&6\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 列から}\\\text{第 1 列を引く}}}\begin{vmatrix}3&0&0\\-3&-2&-7\\11&-2&6\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{第 1 行で展開}}3\begin{vmatrix}-2&-7\\-2&6\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行から第 1 行を引く}}3\begin{vmatrix}-2&-7\\0&13\end{vmatrix}=3\times(-26)=-78.$

p.238 問題 4.6.2 (3) の詳解．本書の巻末の略解に書いた方針に従い，

$$\begin{aligned}F_n(x_1,\dots,x_n)&=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\\cos x_1&\cos x_2&\dots&\cos x_n\\\cos 2x_1&\cos 2x_2&\dots&\cos 2x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\cos(n-1)x_1&\cos(n-1)x_2&\dots&\cos(n-1)x_n\end{vmatrix}\\&=(-1)^{n(n-1)/2}2^{(n-1)(n-2)/2}\varDelta(\cos x_1,\dots,\cos x_n)\end{aligned}$$

従って

$$F_{n+1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ \cos x_1 & \cos x_2 & \dots & \cos x_n & \cos x_{n+1}\\ \cos 2x_1 & \cos 2x_2 & \dots & \cos 2x_n & \cos 2x_{n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cos(n-1)x_1 & \cos(n-1)x_2 & \dots & \cos(n-1)x_n & \cos(n-1)x_{n+1}\\ \cos nx_1 & \cos nx_2 & \dots & \cos nx_n & \cos nx_{n+1}\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{n(n+1)/2}2^{n(n-1)/2}\varDelta(\cos x_1,\dots,\cos x_n,\cos x_{n+1})$$

と置くとき，

$$\sum_{l=0}^{n}F_{n+1}(x_1,\dots,x_n,\frac{2l\pi}{n+1})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & n+1\\ \cos x_1 & \cos x_2 & \dots & \cos x_n & \sum_{l=0}^{n}\cos\frac{2l\pi}{n+1}\\ \cos 2x_1 & \cos 2x_2 & \dots & \cos 2x_n & \sum_{l=0}^{n}\cos\frac{2\cdot 2l\pi}{n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \cos nx_1 & \cos nx_2 & \dots & \cos nx_n & \sum_{l=0}^{n}\cos\frac{2nl\pi}{n+1}\end{vmatrix}$$

において，複素指数函数と等比級数の和公式を用いると, $1\le k\le n$ に対し三角和の公式

$$\sum_{l=0}^{n}\cos\frac{2kl\pi}{n+1}=\mathrm{Re}\sum_{l=0}^{n}e^{\frac{2kl\pi\sqrt{-1}}{n+1}}=\mathrm{Re}\,\frac{1-e^{\frac{2k(n+1)\pi\sqrt{-1}}{n+1}}}{1-e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n+1}}}=0$$

が得られるので，上を最終列で展開すれば，求める行列式の $(-1)^n(n+1)$ 倍となる．よって答は

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{l=0}^{n}F_{n+1}(x_1,\dots,x_n,\frac{2l\pi}{n+1})\\ &=(-1)^{n+n(n+1)/2}\frac{2^{n(n-1)/2}}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\varDelta(\cos x_1,\dots,\cos x_n,\cos\frac{2l\pi}{n+1})\\ &=(-1)^{n(n-1)/2}\varDelta(\cos x_1,\dots,\cos x_n)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\prod_{i=1}^{n}(\cos x_i-\cos\frac{2l\pi}{n+1})\end{aligned}$$

となる．これが巻末に載せた解答であるが，その後に書いた補足事項を確認するため，更に変形しよう．

上の最後の積は, 各因子の符号を変えると $\cos\dfrac{2l\pi}{n+1}$ を未知数，$\cos x_i$, $i=1,\dots,n$ を根とする n 次多項式の因数分解とみなせ，従ってこれを展開したときの $\cos^k\dfrac{2l\pi}{n+1}$ の係数は，$\cos x_i$, $i=1,\dots,n$ の $n-k$ 次基本対称式の $(-1)^{n-k}$ 倍，従って符号を元に戻せば $(-1)^k$ 倍となる．故に，$s_{n,k}$ で n 変数の k 次基本対称式を表せば，上は

$$=(-1)^{n(n-1)/2}\varDelta(\cos x_1,\dots,\cos x_n)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k s_{n,n-k}(\cos x_1,\dots,\cos x_n)\sum_{l=0}^{n}\cos^k\frac{2l\pi}{n+1}\tag{S.7}$$

となる．従って対称式の部分は $s_{n,n-k}$ の係数が

$$\frac{2^{n(n-1)/2}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{l=0}^{n}\cos^k\frac{2l\pi}{n+1}\tag{S.8}$$

となることが分かる．これが常に整数となることを見るためにもう少し変形してみよう．まず，一つ前の問題の巻末解答に書いた $\cos nx$ を $\cos x$ の多項式に展開するときの漸化式は

$$\begin{aligned}\cos nx&=\cos(n-1)x\cos x-\sin(n-1)x\sin x\\ &=\cos(n-1)x\cos x-\{\sin(n-2)x\cos x+\cos(n-2)x\sin x\}\sin x\\ &=\cos(n-1)x\cos x-\cos(n-2)x(1-\cos^2 x)-\{\sin(n-2)x\sin x\}\cos x\\ &=\cos(n-1)x\cos x-\cos(n-2)x(1-\cos^2 x)-\{-\cos(n-1)x+\cos(n-2)x\cos x\}\cos x\\ &=2\cos(n-1)x\cos x-\cos(n-2)x\end{aligned}$$

と示される．これから数学的帰納法で $\cos nx$ が $2^{n-1}\cos^n x$ から始まる次数が一つ飛びの $z=\cos x$ の多項式となることが理論的に示せる．ちなみにこれはチェビシェフの多項式と呼ばれており，$T_n(z)$ で表される．上の漸化式は

$$T_n(z) = 2zT_{n-1}(z) - T_{n-2}(z) \tag{S.9}$$

と書かれ，チェビシェフ多項式の漸化式として知られているものに他ならない．我々がこれから使おうとしているのは，これを逆に解いた $\cos^n x$ を $\cos(n-2k)x$, $k=0,2,\ldots,[n/2]$ の一次結合で表す式である．手持ちの「岩波数学公式 III (1992, 初版新装 7 刷), p.89 には $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = {}_nC_r$ として，

$$z^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} T_{n-2r}(z) \tag{S.10}$$

という公式が載っているが，これは $T_0(x) = \frac{1}{2}$ としないと成立しないので，以下臨時にこの定義変更を用いよう[2)]．実際，$n=2,3$ では

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{より} \quad z^2 = \frac{1}{2}(T_2(z) + 2T_0(z)) = \frac{1}{2}(2z^2 - 1 + 2\frac{1}{2}),$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \text{より}\ z^3 = \frac{1}{4}(T_3(z) + 3T_1(z)) = \frac{1}{4}(4z^3 - 3z + 3z)$$

で成り立っている．($T_0 = 1$ のままだと 1 行目が成り立たないこともこれから分かる．) よって漸化式 (S.9) を用いて n に関する数学的帰納法で初等的に証明できそうだが，これが意外と簡単ではないので，後で解析的な証明を与えることにし，ひとまずこれを仮定すると，$T_0 = \frac{1}{2}$ と読み替えた (S.10) に $z=\cos x$ を代入して

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \cos(n-2r)x \qquad (\text{ただし}\ \cos 0\ \text{が現れたら}\ \frac{1}{2}\ \text{で置き換える})$$

となるので，(S.8) は

$$\frac{2^{n(n-1)/2}}{n+1}(-1)^k \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{r=0}^{[\frac{k}{2}]} \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} \sum_{l=0}^{n} \cos(k-2r)\frac{2l\pi}{n+1} \qquad (\text{同上の置き換え}) \tag{S.11}$$

と表される．ここで l に関する和は複素指数関数の等比級数の和に変形して実行可能で，$k-2r \neq 0$ のとき

$$\sum_{l=0}^{n} \cos(k-2r)\frac{2l\pi}{n+1} = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{l=0}^{n} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}(k-2r)}{n+1} l \right) \right\} = \mathrm{Re}\, \frac{\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}(k-2r)}{n+1}(n+1) \right) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}(k-2r)}{n+1} \right) - 1}.$$

となり，従って常に 0 である．$k-2r=0$ のときは，級数は $\cos 0 = \frac{1}{2}$ とみなす約束だったので，上は

$$\sum_{l=0}^{n} \cos(k-2r)\frac{2l\pi}{n+1} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

となる．よって，(S.11) は k が奇数のとき 0 で，偶数のときは $k=2r$ の項のみが上の値で残り，

$$\frac{2^{n(n-1)/2}}{n+1}(-1)^k \frac{1}{2^{k-1}} \begin{pmatrix} k \\ [k/2] \end{pmatrix} \frac{n+1}{2} = 2^{n(n-1)/2-k} \begin{pmatrix} k \\ [k/2] \end{pmatrix}$$

[2)] 最近の刷ではこの公式は修正され，これと同等な $z^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} T_{|n-2r|}(z)$ という式が載っているそうである．

という整数になる．これを (S.9) に代入すると，最終的な答として以下を得る：

$$\boxed{(-1)^{n(n-1)/2}\Delta(\cos x_1,\dots,\cos x_n)\sum_{r=0}^{[n/2]}2^{n(n-1)/2-2r}\binom{2r}{r}s_{n-2r}(\cos x_1,\dots,\cos x_n)} \tag{S.12}$$

最後に (S.10) の証明をしておこう．$T_n(z)$ の構造から，

$$z^n=\sum_{k=0}^{[n/2]}a_{n,k}T_{n-2k}(z) \tag{S.13}$$

の形の表現が存在することは分かっているので，係数を定めるだけでよい．これには, チェビシェフ多項式に関する次の有名な直交関係を用いる：

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(z)T_n(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz=\begin{cases}0 & m\neq n,\\ \pi/2 & m=n\neq 0,\\ \pi & m=n=0 \quad (\text{ただし } T_0=1 \text{ の場合})\end{cases}$$

実際，左辺の積分は $z=\cos x$ と変数変換すると, 三角関数の積和公式を用いて

$$\begin{aligned}&=\int_{\pi}^{0}\frac{T_m(\cos x)T_n(\cos x)}{\sin x}(-\sin x)dx=\int_0^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big]_0^{\pi}\quad (\text{ただし } m\neq n \text{ のときは第 2 項は } x \text{ となる})\end{aligned}$$

から確かめられる．$m=n=0$ のときの計算は別途容易にできる．

よって (S.13) の両辺に $T_{n-2k}(z)$ を掛けて積分すれば,

$$\int_{-1}^{1}\frac{z^nT_{n-2k}(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz=a_{n,k}\frac{\pi}{2}\quad (n\neq 2k \text{ のとき}),\qquad \int_{-1}^{1}\frac{z^nT_0(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz=a_{n,[n/2]}\pi\quad (n=2k \text{ のとき}) \tag{S.14}$$

となる．ここで $n\neq 2k$ なら，

$$\begin{aligned}I_{n,k}&:=\int_{-1}^{1}\frac{z^nT_{n-2k}(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz=\int_0^{\pi}\cos^n x\cos(n-2k)xdx=\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\cos(n-2k)x\cos xdx\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}x\{\cos(n-2k-1)x+\cos(n-2k+1)x\}dx\\&=\frac{1}{2}I_{n-1,k}+\frac{1}{2}I_{n-1,k-1}\end{aligned}$$

この漸化式から

$$I_{n,k}=\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{k}\frac{\pi}{2} \tag{S.15}$$

を n についての帰納法で示そう．このため，便宜上 2 項係数の定義を $k<0$ へも拡張しておく．それには，高校数学でもおなじみの 2 項係数の有名な関係式

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}\frac{n}{n-r}=\binom{n-1}{r}\Big(1+\frac{r}{n-r}\Big)=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

を用いて

$$\binom{n}{-k}=\binom{n+1}{-k+1}-\binom{n}{-k+1}$$

により帰納的に定義する．すなわち上の関係式が常に成り立つように定める．他方，$I_{n,k}$ の定義は自然に $k<0$ に拡張され，(S.15) は $\forall k$ について成り立つ．実は $k<0$ のときは両辺とも 0 になることが容易に分かる．

さて，$n=0$ のときは直接計算で，

$$I_{0,k}=\int_0^\pi \cos(-2kx)dx=0 \quad (k\neq 0), \qquad I_{0,0}=\int_0^\pi dx=\pi$$

また

$$I_{1,k}=\int_0^\pi \cos x\cos(1-2k)xdx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\{\cos(2-2k)x+\cos(-2kx)\}dx=0 \quad (k\neq 0,1),$$
$$I_{1,0}=I_{1,1}=\frac{\pi}{2}$$

よって以下，

$$I_{m,k}=\frac{1}{2^{m-1}}\binom{m}{k}\frac{\pi}{2}$$

が $\forall m\le n-1$, $\forall k$ について成り立つと仮定すると，上の漸化式から 2 項係数の関係式を用いて

$$I_{n,k}=\frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-2}}\binom{n-1}{k}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-2}}\binom{n-1}{k-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right\}=\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{k}$$

となる．これで (S.15) が示された．すると，(S.14) から，$n\neq 2k$ のとき

$$\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{k}\frac{\pi}{2}=a_{n,k}\frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad a_{n,k}=\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{k},$$

また $n=2k$ のとき

$$\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{k}\frac{\pi}{2}=a_{n,k}\pi \quad \text{より} \quad 2a_{n,k}=\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{k},$$

よって，展開の基底を $T_0=1$ でなく $T_0/2$ にしておけば，統一した右辺の表現が展開係数となる．以上により (S.10) が確かめられた．

p.244 問題 5.2.6 の詳解を示す．本書に載せた解答例はコンピュータで生成したものであるが，故意にそのデータを参照せず最初から解いてみた結果を示す．これにより解答，特に変換行列 S のバラエティが示され，自分の解答のチェックの仕方も分かるであろう．

(1) まず固有値を求める．

$$A-\lambda E=\begin{vmatrix}-\lambda-2 & -1 & 0 & -1\\ 4 & -\lambda+3 & 0 & 4\\ 3 & 3 & -\lambda-1 & 3\\ -3 & 5 & -8 & -\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 4 列を第 1,2 列から引く}}\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -\lambda-1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -\lambda-1 & 3\\ \lambda-3 & \lambda+5 & -8 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{\text{第 1 行の 4 倍を第 2 行に加える}\\ \text{第 1 行の 3 倍を第 3 行に加える}}}\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 0 & 0 & -1\\ -4\lambda-4 & -\lambda-1 & 0 & 0\\ -3\lambda-3 & 0 & -\lambda-1 & 0\\ \lambda-3 & \lambda+5 & -8 & -\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2,3 行から}\\ -(\lambda+1)\ \text{を括り出す}}}(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 0 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ \lambda-3 & \lambda+5 & -8 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{\text{第 2 列の 4 倍を}\\ \text{第 1 列に加える}}}(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ -3\lambda-23 & \lambda+5 & -8 & -\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 3 列の 3 倍を}\\ \text{第 1 列から引く}}}(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -3\lambda+1 & \lambda+5 & -8 & -\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行で展開}}$$

$$(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -3\lambda+1 & -8 & -\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{再び第 2 行で展開}}(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1 & -1\\ -3\lambda+1 & -\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行から第 1 行を引く}}(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-1 & -1\\ -2\lambda+2 & -\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 2 行から}\ (\lambda-1)\ \text{を括り出す}}(\lambda+1)^2(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda-1 & -1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2.$$

以上より固有値は 1, -1 (どちらも重根).

固有値 1 に対する固有ベクトルを求めると

$$A-E=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0 & -1\\ 4 & 2 & 0 & 4\\ 3 & 3 & -2 & 3\\ -3 & 5 & -8 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行から第 1 行を引く}]{\substack{\text{第 2 行を 2 で割る}\\ \text{第 3 行に第 1 行を加える}}}\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 6 & -8 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 3,4 行を 2 で割る}\\ \text{第 1 行に第 2 行を加える}}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を第 2 行に加える}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -4 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行の 4 倍を}\\ \text{第 4 行から引く}}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を第 4 行に加える}\\ \text{第 1 行を第 3 行から引く}}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

この階数は 3 なので，固有ベクトルは 1 本 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみ．よってこれを右辺に置いて $(A-E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ を解いて一般固有ベクトルを求めなければならない．上で実行した $A-E$ の行基本変形を $\boldsymbol{v}_1$ に施すと，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解いて $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

次に，固有値 -1 に対する固有ベクトルは

$$A+E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行の 3 倍を第 4 行から引く}]{\substack{\text{第 1 行の 4 倍を第 2 行に加える} \\ \text{第 1 行の 3 倍を第 3 行に加える}}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 4 行から 4 を括り出す}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

この階数は 2 なので固有ベクトルは 2 本有り，例えば $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$．（この選択は本書の解答と異なるが，お互いに書き換え可能なことは直ちに分かるであろう．）以上に求めたベクトルを並べた

$S = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ により，$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ というジョルダン標準形になる．

(2) まず固有値を求めると

$$\begin{vmatrix} -\lambda-3 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & -\lambda-13 & -7 & 25 \\ -16 & 8 & -\lambda+1 & -8 \\ 4 & -8 & -4 & -\lambda+15 \end{vmatrix} \overset{\text{第 2 列を第 4 列に加える}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -\lambda-3 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & -\lambda-13 & -7 & -\lambda+12 \\ -16 & 8 & -\lambda+1 & 0 \\ 4 & -8 & -4 & -\lambda+7 \end{vmatrix} \overset{\text{第 3 行を第 4 行に加える}}{=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda-3 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & -\lambda-13 & -7 & -\lambda+12 \\ -16 & 8 & -\lambda+1 & 0 \\ -12 & 0 & -\lambda-3 & -\lambda+7 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{第 2 列の 2 倍を} \\ \text{第 1 列に加える}}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -\lambda-3 & 0 & -1 & 2 \\ -2\lambda-20 & -\lambda-13 & -7 & -\lambda+12 \\ 0 & 8 & -\lambda+1 & 0 \\ -12 & 0 & -\lambda-3 & -\lambda+7 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{第 4 列の 2 倍を} \\ \text{第 1 列に加える}}}{=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda+1 & 0 & -1 & 2 \\ -4\lambda+4 & -\lambda-13 & -7 & -\lambda+12 \\ 0 & 8 & -\lambda+1 & 0 \\ -2\lambda+2 & 0 & -\lambda-3 & -\lambda+7 \end{vmatrix} \overset{\text{第 1 列から } -(\lambda-1) \text{ を括り出す}}{=\!=\!=} -(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -\lambda-13 & -7 & -\lambda+12 \\ 0 & 8 & -\lambda+1 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda-3 & -\lambda+7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{第 1 列を第 3 列に加える} \\ \text{第 1 列の 2 倍を第 4 列から引く}}}{=\!=\!=} -(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -\lambda-13 & -3 & -\lambda+4 \\ 0 & 8 & -\lambda+1 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda-1 & -\lambda+3 \end{vmatrix} \overset{\text{第 1 行で展開}}{=\!=\!=} -(\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda-13 & -3 & -\lambda+4 \\ 8 & -\lambda+1 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 & -\lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{第 2 列を第 3 列に加える}}{=\!=\!=} -(\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda-13 & -3 & -\lambda+1 \\ 8 & -\lambda+1 & -\lambda+1 \\ 0 & -\lambda-1 & -2*\lambda+2 \end{vmatrix} \overset{\text{第 3 列から } -(\lambda-1) \text{ を括り出す}}{=\!=\!=} (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-13 & -3 & 1 \\ 8 & -\lambda+1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{第 2 行を第 1 行から引く} \\ \text{第 2 行の 2 倍を第 3 行から引く}}}{=\!=\!=} (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-21 & \lambda-4 & 0 \\ 8 & -\lambda+1 & 1 \\ -16 & \lambda-3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{第 3 列で展開}}{=\!=\!=} -(\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-21 & \lambda-4 \\ -16 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{\text{第 1 行を第 2 行から引く}}{=\!=\!=}$$

$$-(\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-21 & \lambda-4 \\ \lambda+5 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2 \times \{-\lambda-21-(\lambda^2+\lambda-20)\} = (\lambda-1)^2 \times (\lambda^2+2\lambda^2+1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2.$$

よって固有値は ± 1 （ともに 2 重）．

固有値 1 に対する固有ベクトルを求めると

$$A-E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & -14 & -7 & 25 \\ -16 & 8 & 0 & -8 \\ 4 & -8 & -4 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第 1 行の 4 倍を第 3 行から引く} \\ \text{第 1 行を第 4 行に加える}}} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & -14 & -7 & 25 \\ 0 & 8 & 4 & -16 \\ 0 & -8 & -5 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を} \\ \text{第 4 行に加える}}} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & -14 & -7 & 25 \\ 0 & 8 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 行の 4 倍を第 3 行に加える}]{\substack{\text{第 4 行を第 1 行から引く} \\ \text{第 4 行の 7 倍を第 2 行から引く}}} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & -14 & 0 & 25 \\ 0 & 8 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を 2 で割る} \\ \text{第 3 行を 8 で割る}}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -14 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行の 3 倍を第 2 行に加える} \\ \text{第 3 行の 14 倍を第 2 行に加える}}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$．これは階数 3 なので，固有ベクトルは 1 本のみ．$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

を取ろう．これに対して $(A-E)\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1$ を満たす一般固有ベクトルを取るため，$\boldsymbol{v}_1$ に上と同じ行基本変形を施すと

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2\\11\\-8\\-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\11\\-1\\-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

これを右辺として $\begin{pmatrix}-2&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ を解くと，$\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ などが取れる．

次に，固有値 -1 に対する固有ベクトルを求めると

$$A+E=\begin{pmatrix}-2&0&-1&2\\6&-12&-7&25\\-16&8&2&-8\\4&-8&-4&16\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行の 2 倍を第 4 行に加える}]{\substack{\text{第 1 行の 3 倍を第 2 行に加える}\\\text{第 1 行の 8 倍を第 3 行から引く}}}\begin{pmatrix}-2&0&-1&2\\0&-12&-10&31\\0&8&10&-24\\0&-8&-6&20\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 3,4 行を 2 で割る}}$$

$$\begin{pmatrix}-2&0&-1&2\\0&-12&-10&31\\0&4&5&-12\\0&-4&-3&10\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を第 4 行に加える}\\\text{第 3 行の 3 倍を第 2 行に加える}}}\begin{pmatrix}-2&0&-1&2\\0&0&5&-5\\0&4&5&-12\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を第 3 行から引く}\\\text{第 4 行を 2 で割る}}}\begin{pmatrix}-2&0&-1&2\\0&0&5&-5\\0&4&0&-7\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\substack{\text{第 4 行を第 1 行に加える}\\\text{第 4 行の 5 倍を第 2 行から引く}}}\begin{pmatrix}-2&0&0&1\\0&0&0&0\\0&4&0&-7\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$. この階数は 3 なので，固有ベクトルはやはり 1 本しかない．例えば $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}2\\7\\4\\4\end{pmatrix}$ を取り，これを右辺に置いて一般固有ベクトルの方程式 $(A+E)\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{v}_3$ を解く．そのため，上の $A+E$ に対する行基本変形を $\boldsymbol{v}_3$ にも施すと，

$$\begin{pmatrix}2\\7\\4\\4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2\\13\\-12\\8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2\\13\\-6\\4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2\\-5\\-6\\-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\\-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

よって $\begin{pmatrix}-2&0&0&1\\0&0&0&0\\0&4&0&-7\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ を解いて，例えば $\boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

以上により $S=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\4&1&7&-2\\0&1&4&-2\\2&1&4&-1\end{pmatrix}$ により $S^{-1}AS=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ というジョルダン標準形になる．

なお，本書の巻末解答では最後の列が $\begin{pmatrix}1\\5\\2\\3\end{pmatrix}$ になっているが，これは $\boldsymbol{v}_4+\boldsymbol{v}_3$ に等しい．最後の $\boldsymbol{v}_3$ は $A+E$ により消えるので，一般固有ベクトルとしてはこの何倍を加えても効果は変わらない．

(3) まず固有値を求める．

$$\begin{vmatrix}-\lambda+5&-7&-1&1\\3&-\lambda-5&0&1\\1&-1&-\lambda&0\\6&-15&3&-\lambda+4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 行から第 2 行を引く}}\begin{vmatrix}-\lambda+2&\lambda-2&-1&0\\3&-\lambda-5&0&1\\1&-1&-\lambda&0\\6&-15&3&-\lambda+4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 列に第 1 列を加える}}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda+2&0&-1&0\\3&-\lambda-2&0&1\\1&0&-\lambda&0\\6&-9&3&-\lambda+4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 列から第 3 列を引く}}\begin{vmatrix}-\lambda+1&0&\lambda-1&0\\3&-\lambda-2&0&1\\1&0&-\lambda&0\\6&-9&3&-\lambda+4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 行から }(\lambda-1)\text{ を括り出す}}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1&0&1&0\\3&-\lambda-2&0&1\\1&0&-\lambda&0\\6&-9&3&-\lambda+4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 列に第 3 列を加える}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}0&0&1&0\\3&-\lambda-2&0&1\\-\lambda+1&0&-\lambda&0\\9&-9&3&-\lambda+4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 行で展開}}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}3&-\lambda-2&1\\-\lambda+1&0&0\\9&-9&-\lambda+4\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行で展開}}(\lambda-1)^2\begin{pmatrix}-\lambda-2&1\\-9&-\lambda+4\end{pmatrix}=(\lambda-1)^2\{(\lambda+2)(\lambda-4)+9\}$$

$=(\lambda-1)^2(\lambda^2-2*\lambda+1)=(\lambda-1)^4$. よって固有値は 1 (4 重).

固有ベクトルを求めると

$$A-E=\begin{pmatrix}4&-7&-1&1\\3&-6&0&1\\1&-1&-1&0\\6&-15&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第2行を第1行から引く}\\\text{第2行の2倍を第4行から引く}}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\3&-6&0&1\\1&-1&-1&0\\0&-3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第1行を第3行から引く}\\\text{第2行の3倍を第2行から引く}}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&-3&3&1\\0&0&0&0\\0&-3&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行を第4行から引く}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&-3&3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ これは階数 2 なので，固有ベクトルは 2 本有り，例えば $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix}$ が取れる．

これらを並べて行列にしたものに上と同じ行基本変形を施し，右辺に置いたときの解け方を観察する．

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\\1&0\\0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&0\\-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\0&0\\-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

すると，一般固有ベクトルを求める方程式 $\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&-3&3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\\x_4&y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$ はどちらも解けてしまい，例えば $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\-1&0\\1&1\end{pmatrix}$ が解となるので，$\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3$ に対する一般固有ベクトルとして取れば，$S=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&0&1&0\\1&-1&0&0\\0&1&3&1\end{pmatrix}$ を変換行列として $S^{-1}AS=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ というジョルダン標準形になる．

この問題は固有ベクトルの選び方が無限にあるが，本書の解答に載せたものは $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_3$ の位置が入れ替わっており，$\boldsymbol{v}_3$ に対応する一般固有ベクトルは，$\boldsymbol{v}_4$ に固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_3$ を加えたものになっている．また $\boldsymbol{v}_1$ に対応する一般固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_2$ に $\boldsymbol{v}_3$ を加えたものとなっている．この構造では一般固有ベクトルに任意の固有ベクトルを加えても問題無い．

(4) まず固有値を求めると

$$\begin{vmatrix}-\lambda-9&-2&-1&16\\-5&-\lambda+2&-2&7\\3&4&-\lambda-1&-7\\-7&-1&-1&-\lambda+12\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第3列から第2列を引く}}\begin{vmatrix}-\lambda-9&-2&1&16\\-5&-\lambda+2&\lambda-4&7\\3&4&-\lambda-5&-7\\-7&-1&0&-\lambda+12\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第2行に第3行を加える}}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda-9&-2&1&16\\-2&-\lambda+6&-9&0\\3&4&-\lambda-5&-7\\-7&-1&0&-\lambda+12\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第1行から第4行を引く}}\begin{vmatrix}-\lambda-2&-1&1&\lambda+4\\-2&-\lambda+6&-9&0\\3&4&-\lambda-5&-7\\-7&-1&0&-\lambda+12\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第4列に第1列を加える}}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda-2&-1&1&2\\-2&-\lambda+6&-9&-2\\3&4&-\lambda-5&-4\\-7&-1&0&-\lambda+5\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第2行に第1行を加える}\\\text{第3行に第1行の2倍を加える}}}\begin{vmatrix}-\lambda-2&-1&1&2\\-\lambda-4&-\lambda+5&-8&0\\-2\lambda-1&2&-\lambda-3&0\\-7&-1&0&-\lambda+5\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第2行から}\\\text{第3行の2倍を引く}}}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda-2&-1&1&2\\3\lambda-2&-\lambda+1&2*\lambda-2&0\\-2\lambda-1&2&-\lambda-3&0\\-7&-1&0&-\lambda+5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第2列に第3列を加える}}\begin{vmatrix}-\lambda-2&0&1&2\\3\lambda-2&\lambda-1&2\lambda-2&0\\-2\lambda-1&-\lambda-1&-\lambda-3&0\\-7&-1&0&-\lambda+5\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第3列から}\\\text{第2列の2倍を引く}}}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda-2&0&1&2\\3\lambda-2&\lambda-1&0&0\\-2\lambda-1&-\lambda-1&\lambda-1&0\\-7&-1&2&-\lambda+5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第4列から第3列の2倍を引く}}\begin{vmatrix}-\lambda-2&0&1&0\\3\lambda-2&\lambda-1&0&0\\-2\lambda-1&-\lambda-1&\lambda-1&-2\lambda+2\\-7&-1&2&-\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第4列から}\\(\lambda-1)\text{を括り出す}}}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda-2&0&1&0\\3\lambda-2&\lambda-1&0&0\\-2\lambda-1&-\lambda-1&\lambda-1&-2\\-7&-1&2&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第2列から第4列を引く}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda-2&0&1&0\\3\lambda-2&\lambda-1&0&0\\-2\lambda-1&-\lambda+1&\lambda-1&-2\\-7&0&2&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第2列から}\\(\lambda-1)\text{を括り出す}}}$$

$$(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-2&0&1&0\\3\lambda-2&1&0&0\\-2\lambda-1&-1&\lambda-1&-2\\-7&0&2&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第3列に第2列を加える}}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-2&0&1&0\\3\lambda-2&1&0&0\\\lambda-3&0&\lambda-1&-2\\-7&0&2&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第2列で展開}}$$

$$(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-2&1&0\\\lambda-3&\lambda-1&-2\\-7&2&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第1列から}\\\text{第3列を引く}}}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-2&1&0\\\lambda-1&\lambda-1&-2\\-6&2&-1\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第1列の2倍を}\\\text{第3列から引く}}}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-\lambda-2&1&0\\\lambda-1&\lambda-1&-2\\2*\lambda-2&0&-1\end{vmatrix}$$

$\xlongequal[\text{第 2 行から引く}]{\text{第 3 行の 2 倍を}} (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 1 & 0 \\ -3*\lambda+3 & \lambda-1 & 0 \\ 2*\lambda-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[(\lambda-1)\text{ を括り出す}]{\text{第 2 行から}} (\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2*\lambda-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 3 列で展開}}$

$-(\lambda-1)^3 \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3 \times (-\lambda+1) = (\lambda-1)^4$. よって固有値は 1 (4 重). 行列式の計算にかなり苦労したが，この問題は恐らくさっさと展開してしまい，得られた 4 次式を因数分解する方が速いだろう．

固有ベクトルを求めると

$A-E = \begin{pmatrix} -10 & -2 & -1 & 16 \\ -5 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & -1 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を第 4 行から引く}]{\substack{\text{第 2 行の 2 倍を第 1 行から引く} \\ \text{第 2 行を第 3 行に加える}}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & -2 & 7 \\ -2 & 5 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を} \\ \text{第 4 行から引く}}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & -2 & 7 \\ -2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{\text{第 3 行の 2 倍を} \\ \text{第 2 行から引く}}]{\substack{\text{第 1 行の 2 倍を} \\ \text{第 4 行から引く}}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 2 \\ -1 & -9 & 6 & 7 \\ -2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第 4 行の 4 倍を} \\ \text{第 1 行に加える}}]{\substack{\text{第 2 行の 2 倍を} \\ \text{第 3 行から引く}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -9 & 6 & 7 \\ 0 & 23 & -16 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第 4 行の 23 倍を} \\ \text{第 3 行から引く}}]{\substack{\text{第 4 行の 9 倍を} \\ \text{第 2 行に加える}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行の 3 倍を第 2 行から引く} \\ \text{第 1 行の 7 倍を第 3 行に加える}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. これは階数 3 なので，固有ベクトルは 1 本のみで，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．従ってジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に決まる．あとは 3 段階の一般固有ベクトルを順に求める．

$\boldsymbol{v}_1$ に上の行基本変形を施すと，

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. これを右辺として方程式 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を解くと，例えば $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求まる．次にこれを右辺にして再び方程式を解くため，同じ行基本変形を施すと，

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -35 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

方程式 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は，例えば $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ という解を持つ．最後にこれを再び右辺に置いて同じ方程式を解くため，上述の行基本変形を施すと，

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -18 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ 28 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

よって方程式 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ を解いて，最後のベクトルとして例えば $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ を取れる．以上に求めたものを列に持つ $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ により，$S^{-1}AS$ は始めに示したジョルダン標準形に帰着される．

なお，本書に載せた解答は $\boldsymbol{v}_1$ は同じだが，$\boldsymbol{v}_2$ のところが $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ になっており，そのため以下順に $\boldsymbol{v}_3$ のところが $\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_4$ のところが $\boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_3$ に取り替わっている．

(5) まず固有値を求めると

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -\lambda-3 & 6 \\ 1 & -5 & -4 & -\lambda+7 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{\text{第 3 行を} \\ \text{第 2 行から引く}}} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -\lambda-3 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{\text{第 4 行から} \\ (\lambda-1)\text{ を括り出す}}} (\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -\lambda-3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{第 4 列を第 3 列に加える}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 2 & -2\\ 0 & -\lambda & 1 & 1\\ 1 & -5 & -\lambda+3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 4 行で展開}} -(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 2\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & -5 & -\lambda+3\end{vmatrix}\xlongequal[\text{第 2 列に加える}]{\text{第 3 列の }\lambda\text{ 倍を}}$$

$$-(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda & 2\lambda+1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -\lambda^2+3\lambda-5 & -\lambda+3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 3 列で展開}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda & 2\lambda+1\\ 1 & -\lambda^2+3\lambda-5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 列の 3 倍を第 2 列に加える}}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}-\lambda & -\lambda+1\\ 1 & -\lambda^2+3\lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 列から }(\lambda-1)\text{ を括り出す}}(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda+2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行を第 1 行に加える}}$$

$$(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-\lambda+1 & -\lambda+1\\ 1 & -\lambda+2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 1 行から }(\lambda-1)\text{ を括り出す}}(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3\times(\lambda-1)=(\lambda-1)^4.$$

よって固有値は 1 (4 重).

固有ベクトルを求めると

$$A-E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 4 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -5 & -4 & 6\\ 1 & -5 & -4 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 1 行を第 3, 4 行に加える}}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 4 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 0 & 4\\ 0 & -4 & 0 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行を第 1 行に加える}]{\substack{\text{第 3 行を第 4 行から引く}\\ \text{第 2 行の 4 倍を第 3 行から引く}}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

これは階数 2 なので，固有ベクトルが 2 本，たとえば $\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}4\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ が取れる．一般固有ベクトルを求めるため，これを右辺に置いた方程式を解く．まとめて行列にして上と同じ行基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & 0\\ -1 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & 0\\ -5 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

方程式 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=a\boldsymbol{w}_1+b\boldsymbol{w}_2$ が解けるのは，$\boldsymbol{v}_1:=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$ の 1 次元だけなので，この時点でジョルダン標準形は $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ と分かる．取り敢えず右辺を $\boldsymbol{v}_1$ の変形後の表現 $\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ にして方程式を解くと，例えば $\boldsymbol{w}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ が求まる．ちなみに変形前の座標では $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ となっているが，$\boldsymbol{w}_3$ は変形前の座標による表現であることに注意せよ．よってこれを右辺にして方程式を解くことを試みるのだが，まずはこれに上と同じ行基本変形を施してみると

$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1\\-1\\5\\-1\end{pmatrix}$. これは解けないので，固有ベクトルで調節して $\boldsymbol{w}_3$ を $\boldsymbol{v}_2:=\boldsymbol{w}_3+\boldsymbol{w}_1$ に取り替えると，変形後のベクトルが $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ となって，$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ は例えば解 $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ を持つ．最後の固有ベクトルは何でもよいが，$\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{w}_2$ を取れば，結局 $S=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4)=\begin{pmatrix}3&-1&1&4\\1&0&0&0\\1&1&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$ により $S^{-1}AS$ が上述の標準形に帰着する．

本書の解答では，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ は同じ，$\boldsymbol{v}_3$ はここの $\boldsymbol{v}_3$ に固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_4$ を加えたものとなっている．この位置の一般固有ベクトルには任意の固有ベクトルを加えられることに注意せよ．(これに対して，$\boldsymbol{v}_2$ の位置には $\boldsymbol{v}_1$ の定数倍しか加えられず，同時に $\boldsymbol{v}_2$ をこれと同じ定数倍したものを $\boldsymbol{v}_3$ の位置に加えておかねばならない.)

(6) まず固有値を求めると

$$\begin{vmatrix}-\lambda-1 & -2 & 2 & 4\\ -4 & -\lambda-3 & 4 & 8\\ 4 & 4 & -\lambda-3 & -8\\ -5 & -5 & 5 & -\lambda+11\end{vmatrix}\xlongequal[\text{第 3 列の 2 倍を第 4 列から引く}]{\text{第 3 列を第 1,2 列に加える}}\begin{vmatrix}-\lambda+1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -\lambda+1 & 4 & 0\\ -\lambda+1 & -\lambda+1 & -\lambda-3 & 2*\lambda-2\\ 0 & 0 & 5 & -\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal[(\lambda-1)\text{ を括り出す}]{\text{第 1,2,4 列から}}$$

$$(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}1&0&2&0\\0&1&4&0\\1&1&-\lambda-3&2\\0&0&5&-1\end{vmatrix}\overset{\text{第 4 列の 5 倍を第 3 列に加える}}{=\!=\!=\!=}(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}1&0&2&0\\0&1&4&0\\1&1&-\lambda+7&2\\0&0&0&-1\end{vmatrix}\overset{\text{第 4 行で展開}}{=\!=\!=\!=}-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&4\\1&1&-\lambda+7\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{第 3 行から第 2 行を引く}}{=\!=\!=\!=}-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&4\\1&0&-\lambda+3\end{vmatrix}\overset{\text{第 2 列で展開}}{=\!=\!=\!=}-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}1&2\\1&-\lambda+3\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^3\times(-\lambda+1)=(\lambda-1)^4.$$

よって固有値は 1 (4 重).
固有ベクトルを求めると，

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&-2&2&4\\-4&-4&4&8\\4&4&-4&-8\\-5&-5&5&10\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行の 2 倍を第 4 行から引く}]{\substack{\text{第 1 行の 2 倍を第 2 行から引く}\\ \text{第 1 行の 2 倍を第 3 行に加える}}}\begin{pmatrix}-2&-2&2&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 4 行の 2 倍を第 1 行から引く}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-1&1&2\end{pmatrix}.$$

これは階数 1 なので固有ベクトルは 3 本取れ，例えば，$\boldsymbol{v}_1:=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2:=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3:=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

これらの 1 次結合 $a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2+c\boldsymbol{v}_3$ の中で右辺に置いて一般固有ベクトルを求められるものが 1 本有る．それを求めるため，これらをまとめて行列にし，上と同じ行基本変形を施すと，

$\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\-3&-2&0\\2&3&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&5&2\\-3&-2&0\\2&3&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}=$ . これを $A-E$ の行基本変形の結果と比較すると，これらの 1 次結合で上三つの成分が零となるものを探せばよいのだが，暗算では無理だし，わざわざ未定係数法を使うのも面倒なので，上 3 行だけに更に行基本変形を施すと

 $\xrightarrow{\text{第 1 行に第 2 行を加える}}\begin{pmatrix}2&3&2\\-3&-2&0\\2&3&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行から第 3 行を引く}\\ \text{その後で第 3 行に第 2 行を加える}}}\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&-2&0\\-1&1&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$.

これを見ると $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\\5\end{pmatrix}$ を右から掛ければ，上三つの成分が零になることが暗算で読み取れる．つまり右辺に置くべきベクトルは $\boldsymbol{w}_1:=4\boldsymbol{v}_1-6\boldsymbol{v}_2+5\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\\-5\end{pmatrix}$ であるが，上の基本変形後は $\begin{pmatrix}5&5&2\\-3&-2&0\\2&3&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ となっている.（計算が必要なのは最後の成分だけである！）

よって一般固有ベクトルは $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ を解いて，例えば $\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ などが取れる.

よって例えば $S=(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\-4&0&-1&0\\4&0&0&1\\-5&0&0&0\end{pmatrix}$ と取れば，$S^{-1}AS=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ というジョルダン標準形になる.

本書の解答と比較すると，$\boldsymbol{w}_1$ の符号が異なっており，それに応じて $\boldsymbol{w}_2$ の符号も異なっている．最後の 2 本は偶然一致しているが，ここは $\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ を選んでも良いし，その他無限の可能性がある.

p.250 問題 5.6.2 (2) の詳解．漸化式を間違いなく導くため，行列式のサイズを右下に括弧付きの添え字として記す.

$$D_n=\begin{vmatrix}a&0&1&0&\cdots&0\\0&a&0&1&\ddots&\vdots\\1&0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&&1\\\vdots&\ddots&\ddots&0&a&0\\0&\cdots&0&1&0&a\end{vmatrix}_{(n)}\overset{\substack{\text{第 1 列で}\\ \text{展開}}}{=\!=\!=\!=}a\begin{vmatrix}a&0&1&0&\cdots&0\\0&a&0&1&\ddots&\vdots\\1&0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&&1\\\vdots&\ddots&\ddots&0&a&0\\0&\cdots&0&1&0&a\end{vmatrix}_{(n-1)}+\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&&&\cdots&0\\a&0&1&0&0&\cdots&\cdots&0\\1&0&a&0&1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&1&0&a&0&1&0\\\vdots&&\ddots&1&0&a&0&1\\\vdots&&&0&1&0&a&0\\0&\cdots&&\cdots&0&1&0&a\end{vmatrix}_{(n-1)}.$$

ここで右辺の一つ目の行列式は D_{n-1} に他ならない．二つ目は直ちに第 1 行で展開できて

$$
-\begin{vmatrix}
a & 1 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\
1 & a & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\
0 & 0 & a & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\
0 & 1 & 0 & a & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 1 \\
\vdots & & & 0 & 1 & 0 & a & 0 \\
0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & 0 & a
\end{vmatrix}_{(n-2)}
$$

に帰着する．この（先頭の符号を省いた）行列式部分を更に第 1 列で展開すると

$$
a\begin{vmatrix}
a & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 1 \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & a & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a
\end{vmatrix}_{(n-3)}
-\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & a & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\
1 & 0 & a & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & a & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & a
\end{vmatrix}_{(n-3)}
$$

となるが，一つ目は D_{n-3} であり，二つ目は第 1 行で展開すると D_{n-4} となる．よって以上に符号や係数を付けてまとめれば，

$$
D_n = aD_{n-1} - aD_{n-3} + D_{n-4}
$$

という漸化式が得られた．

以下この漸化式を解く．この特性方程式は $\lambda^4 - a\lambda^3 + a\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 - a\lambda + 1) = 0$ と因数分解でき，従って漸化式の一般解として

$$
c_1 + c_2(-1)^n + c_3\Big(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\Big)^n + c_4\Big(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\Big)^n
$$

が得られる．初期値として

$$
\begin{aligned}
&D_1 = a \quad , D_2 = a^2 \quad , D_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a, \\
&D_4 = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a(a^3 - a) - (a^2 - 1) = a^4 - 2a^2 + 1
\end{aligned}
$$

を与えると，

$$
c_1 = -\frac{1}{2(a-2)}, \quad c_2 = \frac{1}{2(a+2)}, \quad c_3 = \frac{a^2 - 2 + a\sqrt{a^2-4}}{2(a^2-4)}, \quad c_4 = \frac{a^2 - 2 - a\sqrt{a^2-4}}{2(a^2-4)}
$$

という解が得られる．故にこれらを係数として

$$
\begin{aligned}
D_n &= -\frac{1}{2(a-2)} + (-1)^n\frac{1}{2(a+2)} + \frac{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}{2(a^2-4)}\Big(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\Big)^n + \frac{a^2-2-a\sqrt{a^2-4}}{2(a^2-4)}\Big(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\Big)^n \\
&= -\frac{1}{2(a-2)} + (-1)^n\frac{1}{2(a+2)} + \frac{1}{a^2-4}\Big(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\Big)^{n+2} + \frac{1}{a^2-4}\Big(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\Big)^{n+2} \\
&= -\frac{1}{2(a-2)} + \frac{(-1)^n}{2(a+2)} + \frac{(a+\sqrt{a^2-4})^{n+2} + (a-\sqrt{a^2-4})^{n+2}}{2^{n+2}(a^2-4)}
\end{aligned}
$$

を得る．最後の項の分子を展開すると根号の奇数冪がすべて打ち消しあうので有理式となる．更に，全体を通分すると分子が $a^2 - 4$ で割り切れて常に多項式になることが分かる．これは $\sqrt{a^2-4}$ の 2 以上の偶数冪を含む因子については自明なので，それ以外の部分

$$
-\frac{1}{2(a-2)} + \frac{(-1)^n}{2(a+2)} + \frac{2a^{n+2}}{2^{n+2}(a^2-4)} = \frac{-2^n(a+2) + 2^n(-1)^n(a-2) + a^{n+2}}{2^{n+1}(a^2-4)}
$$

について確かめればよいが，n が偶数の時は上の分子は

$$a^{n+2}-2^{n+2}=(a^2-4)\{(a^2)^{n/2}+4(a^2)^{n/2-1}+\cdots+4^{n/2}\}$$

となり，また n が奇数のときは

$$a^{n+2}-2^{n+1}a=a(a^{n+1}-2^{n+1})=a(a^2-4)\{(a^2)^{(n-1)/2}+4(a^2)^{(n-1)/2-1}+\cdots+4^{(n-1)/2}\}$$

となって，いずれも a^2-4 で割り切れている．

p.252 問題 6.1.4 のこの文章はスペースの関係でやや端折った書き方になっているので，ここで詳細を補っておく．

まず，$Q_1^{-1}Q_2=R_1R_2^{-1}$ の左辺は二つの直交行列の積で，これが再び直交行列となることは要項 6.1.8 に述べたが，これは例えば直交行列がベクトルの長さを保存するという特徴付けから容易に示される．他方，右辺の上三角行列同士の積が再び上三角型になることは，行列の積の定義を頭の中で思い浮かべながら結果の対角線より下の成分を暗算してみれば容易に分かる．最後に上三角型行列 $R=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ が直交行列でもあるとき，これが対角型となることは，$\boldsymbol{v}_1$ が第 1 成分 v_{11} 以外零であることに注意すると，$j>1$ に対し $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_j)=v_{11}v_{j1}=0$ となることから, $\boldsymbol{v}_j$ の第 1 成分がすべて零，従って特に $\boldsymbol{v}_2$ は第 2 成分 v_{22} 以外零となる．次に $j>2$ に対して $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_j)=v_{22}v_{j2}=0$ より $\boldsymbol{v}_j$ の第 2 成分はすべて零となる．これを繰り返せば，$\boldsymbol{v}_i$ は第 ii 成分 v_{ii} 以外すべて零，従って行列 R が対角型であることが結論される．

p.255 問題 6.2.1 の計算の補遺

(5) の計算の詳細　まず固有多項式を求める行列式の計算例を示す．

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 行を}\\\text{第 2 行から引く}}}\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\\lambda-1&1-\lambda&0\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 行から}\\\lambda-1\text{ を括り出す}}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&-1&0\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 列を}\\\text{第 2 列に加える}}}$$
$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&3-\lambda&2\\1&0&0\\2&4&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行で展開}}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\4&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 行から}\\\text{第 2 行を引く}}}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1-\lambda&1+\lambda\\4&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 行から}\\\lambda+1\text{ を括り出す}}}$$
$$-(\lambda-1)(\lambda+1)\begin{vmatrix}-1&1\\4&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-5).$$

次に $A-5E$ の行基本変形は

$$\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-3&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 1 行に加える}}}\begin{pmatrix}-2&-2&4\\1&-3&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を第 3 行に加えた後}\\\text{第 1 行を 2 で割る}}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-3&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を}\\\text{第 2 行に加える}}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&-4&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 4 で割る}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 2 行を第 1 行から引く}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

次に，$A-E$ の行基本変形は

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を第 2 行から引く}\\\text{第 1 行の 2 倍を第 3 行から引く}}}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を }-4\text{ で割り}\\\text{第 2 行と交換}}}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

最後に $A-(-1)E=A+E$ の行基本変形は

$$\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&2\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行 }\times3\text{ を第 1 行から引く}\\\text{第 2 行 }\times2\text{ を第 3 行から引く}}}\begin{pmatrix}0&-8&-4\\1&3&2\\0&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行 }\times2\text{ を第 1 行から引く}\\\text{第 2 行に 2 を掛ける}}}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&6&4\\0&-4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を }-2\text{ で割り}\\\text{その 3 倍を第 2 行から引く}}}$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&1\\0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行を並べ替える}}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(6) の計算の詳細　固有多項式は

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 3 行を}\\\text{第 2 行から引く}}}\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&\lambda-1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 行から}\\\lambda-1\text{ を括り出す}}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&-1&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 2 列を}\\\text{第 3 列に加える}}}$$
$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\0&-1&0\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2 行を第 1 行から引く}}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}1-\lambda&\lambda-1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{\text{第 1 行から}\\\lambda-1\text{ を括り出す}}}=-(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}-1&1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$-(\lambda-1)^2(\lambda-4)$.

$A-4E$ の行基本変形は

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 1 行に加える}}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を}\\\text{第 2,3 行に加える}}}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を 3 で割}\\\text{それを第 1 行から引く}}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(7) の計算の詳細　行列式の計算は

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&3-\lambda&1\\2&1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 3 行を}\\\text{第 1 行から引く}}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}-\lambda&0&\lambda\\1&3-\lambda&1\\2&1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 1 行から}\\\lambda\text{ を括り出す}}}{=\!=\!=}\lambda\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&3-\lambda&1\\2&1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 1 列を}\\\text{第 3 列に加える}}}{=\!=\!=}$$

$$\lambda\begin{vmatrix}-1&0&0\\1&3-\lambda&2\\2&1&4-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 1 行}\\\text{で展開}}}{=\!=\!=}-\lambda\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\1&4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-7\lambda+10)=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-5).$$

$A-5E$ の行基本変形は

$$\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-2&1\\2&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を}\\\text{第 1 行から引く}}}\begin{pmatrix}-5&0&5\\1&-2&1\\2&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を}\\\text{5 で割る}}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-2&1\\2&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を第 2 行に加える}\\\text{第 1 行の 2 倍を第 3 行に加える}}}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-2&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を 2 で割り}\\\text{その結果を第 3 行に加える}}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$A-2E$ の行基本変形は

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行の 2 倍を}\\\text{第 3 行から引く}}}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を第 3 行に加え}\\\text{第 2 行から引く}}}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行を並べ替え}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

最後に $A-0E=A$ の行基本変形は

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\1&3&1\\2&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を第 3 行から引いた後}\\\text{第 2 行の 2 倍を第 1 行から引く}}}\begin{pmatrix}0&-5&0\\1&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を }-5\text{ で割った後}\\\text{結果の 3 倍を第 2 行から引く}}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行を並べ替え}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(8) の計算の詳細　行列式の計算は

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&4-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 3 行を}\\\text{第 1 行から引く}}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1-\lambda&0&\lambda-1\\1&4-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 1 行から}\\\lambda-1\text{ を括り出す}}}{=\!=\!=}(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&4-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 1 列を}\\\text{第 3 列に加える}}}{=\!=\!=}$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix}-1&0&0\\1&4-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{vmatrix}\overset{\text{第 1 行で展開}}{=\!=\!=}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda^2-7\lambda+10)=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5).$$

$A-5E$ の行基本変形は

$$\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 1 行に加える}}}\begin{pmatrix}-2&0&2\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を 2 で割った後}\\\text{それを第 2,3 行に加える}}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 3 行に加える}}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

その他は暗算でもできるので略す.

(9) の計算の詳細　行列式の計算は

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 1 行から引く}}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}2-\lambda&\lambda-2&0\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 1 行から}\\\lambda-2\text{ を括り出す}}}{=\!=\!=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}-1&1&0\\-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&-1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 1 列を}\\\text{第 2 列に加える}}}{=\!=\!=}$$

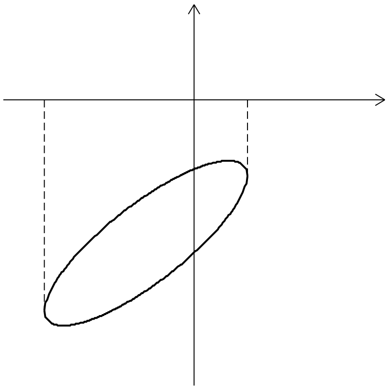
$$(\lambda-2)\begin{vmatrix}-1&0&0\\-1&-\lambda&-1\\-1&-2&-1-\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{第 1 行}\\\text{で展開}}}{=\!=\!=}-(\lambda-2)\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\-2&-1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda-2)=-(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+2).$$

他は暗算できるので $A+2E$ の行基本変形の計算例だけ示す.

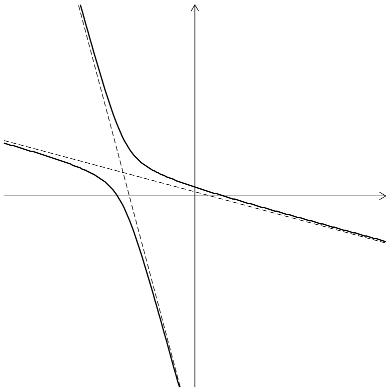
$$\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{第 1 行に加える}}}\begin{pmatrix}2&2&-2\\-1&3&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を}\\\text{2 で割る}}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を}\\\text{第 2,3 行に加える}}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&4&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 2 行を}\\\text{2 で割る}}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{第 1 行を 2 倍し}\\\text{それから第 2 行を引く}}}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

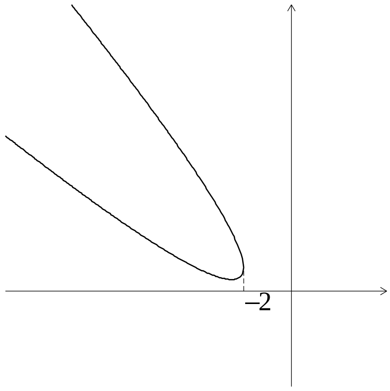
p.261　問題 6.4.1 の曲線の概形.



(1)

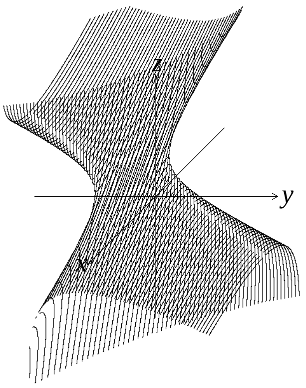


(2)

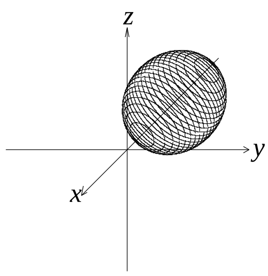


(3)

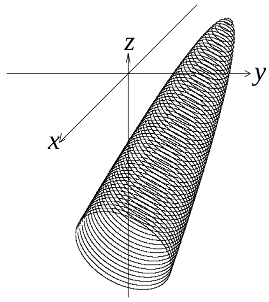
p.262 問題 6.5.1 の曲面の概形.
これも例題 6.5-1 と同様，斜投影法で切り口を連続描画している．



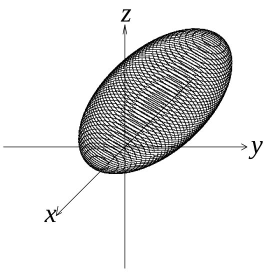
(1) $(-8 \leq x, y, z \leq 8)$



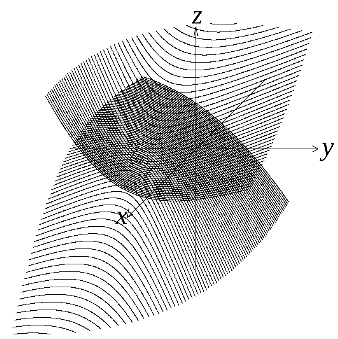
(2) $(-8 \leq x \leq 4, -5 \leq y, z \leq 5)$



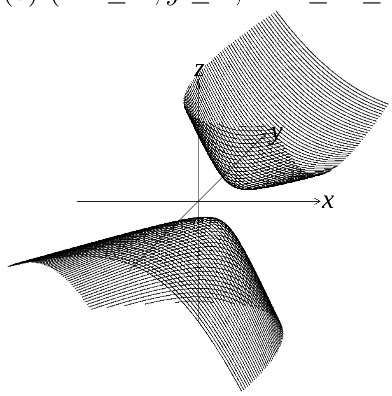
(3) $(-4 \leq x, y \leq 4, -11 \leq z \leq 1)$



(4) $(-4 \leq x, y, z \leq 4)$



(5) $(-8 \leq x, y, z \leq 8)$



同 (z 軸を 90° 回った方角から)

p.272 問題 7.5.3 の詳解.
本書の解答略解に書いたように，A をジョルダン標準形に変換する行列を S とすれば，$S^{-1}(A - zI)S = S^{-1}AS - zI$ であり，各ジョルダンブロックではこれは

$$\begin{pmatrix} \lambda - z & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - z & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda - z & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda - z \end{pmatrix}$$

となる．よって $S^{-1}(A-zI)^{-1}S=\{S^{-1}(A-zI)S\}^{-1}=(S^{-1}AS-zI)^{-1}$ は例題 2.6-3 等によりブロック毎に

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-z} & -\frac{1}{(\lambda-z)^2} & \frac{1}{(\lambda-z)^3} & \cdots & \frac{(-1)^{n-2}}{(\lambda-z)^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1}}{(\lambda-z)^n} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-z} & -\frac{1}{(\lambda-z)^2} & \ddots & & \frac{(-1)^{n-2}}{(\lambda-z)^{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{\lambda-z} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{(\lambda-z)^3} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{\lambda-z} & -\frac{1}{(\lambda-z)^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda-z} \end{pmatrix}$$

となる．C を λ を正の向きに一周する積分路とし，上を z について成分毎に周回積分を行うと，複素関数論で最初に習う公式

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C \frac{1}{(z-\lambda)^n}dz=\begin{cases} 1, & n=1\text{ のとき}, \\ 0, & n>1\text{ のとき} \end{cases}$$

を用いて，

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C \begin{pmatrix} \lambda-z & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda-z & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda-z & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda-z \end{pmatrix}^{-1} dz=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．これを本問題の状況に当てはめると，$\lambda=\lambda_1$ に対しては全体の符号を変えてこの計算が当てはまり，他の固有値に対応するブロックは積分路内に極が存在しないので積分ですべて消失する．その結果，

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint(zI-S^{-1}AS)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{S.16}$$

となる．ここに，対角線の 1 はちょうど λ_1 に属する全ジョルダンブロックに相当する位置だけに存在する．故にこれを S と S^{-1} で挟んで戻したものは，λ_1-一般固有空間への射影作用素となる．

別解　関数論の知識をもう少し使うと，ごつい行列の計算が不要になる：出てくる行列は A の有理関数だけなので，積の順序を気にする必要はないから，以下 $(zI-A)^{-1}$ の代わりに直感性にすぐれた書き方 $\dfrac{I}{zI-A}$ を用いよう．まず，A の固有値を λ_1 (ν_1 重), $\dots$, λ_s (ν_s 重), とする．これらすべてを内部に含むような正の向きの単純閉曲線 Γ を取れば，

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_\Gamma \frac{I}{zI-A}dz$$

は，一方で Γ を無限遠点に向けて遠ざけてゆくと，$z=\dfrac{1}{w}$ という変数変換で

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{-\gamma}\frac{I}{\frac{1}{w}I-A}\Big(-\frac{1}{w^2}\Big)dw=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_\gamma \frac{I}{I-wA}\frac{dw}{w}$$

となる．ここで γ は Γ を無限遠点 $w=0$ から見たものであるが，負の向きに回っているのでマイナスを付けた．$\dfrac{I}{I-wA}$ は $w=0$ のとき値 I を取り，そこで正則なので，この積分値は I となる．

他方，Γ を縮めてゆくと，これは各固有値 λ_j を正の向きに一周する小さな独立した周回積分に分解し

$$=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{C_j}\frac{I}{zI-A}dz$$

となる．この各項を E_j と置くとき，これが射影作用素の条件 $E_jE_k=\delta_{jk}I$ を満たすことを見よう．まず $j\neq k$ のとき

$$E_jE_k=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{C_j}\frac{I}{zI-A}dz\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{C_k}\frac{I}{\zeta I-A}d\zeta=\frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{C_j}\oint_{C_k}\frac{I}{zI-A}\frac{I}{\zeta I-A}d\zeta dz \tag{S.17}$$

ここでレゾルベント方程式と呼ばれる次の等式を用いる：

$$\frac{I}{zI-A}\frac{I}{\zeta I-A}=\frac{1}{\zeta-z}\Big(\frac{I}{zI-A}-\frac{I}{\zeta I-A}\Big)$$

すると (S.17) は

$$=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\oint_{C_j}dz\oint_{C_k}\frac{1}{\zeta-z}\frac{I}{zI-A}d\zeta-\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\oint_{C_k}d\zeta\oint_{C_j}\frac{1}{\zeta-z}\frac{I}{\zeta I-A}dz=0-0=0$$

となる．ここで C_k は z を内部に含まず，また C_j も ζ を内部に含まないことから，どの項も内側の積分がコーシーの積分定理により零となった．次に $j=k$ のときは，二つ目の積分路を大きめに取り，$C_k=C_j'$ が C_j を内部に含むようにすると，上は第 2 項は先と同じ理由で消えるが，第 1 項の ζ に関する積分が $\zeta=z$ に留数 1 を残すので

$$E_j^2=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\oint_{C_j}dz\oint_{C_j'}\frac{1}{\zeta-z}\frac{I}{zI-A}d\zeta=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{C_j}\frac{I}{zI-A}dz=E_j$$

となる．以上で $I=E_1+\cdots+E_s$ が射影作用素への直和分解となることが分かった．後は $(\lambda_jI-A)^{\nu_j}E_j=O$ を言えば，$\mathrm{Image}\,E_j$ が λ_j-一般固有空間に含まれ，従ってこの分解が A の一般固有空間 V_{λ_j} への直和分解を与えることが分かる．

$(zI-A)^{-1}$ は余因子行列を用いて表現すると，分母が $\det(zI-A)$, すなわち A の固有多項式で，残りの因子は z の多項式を成分とすることが分かる．故に C の内部で分母を 0 にするのは $(z-\lambda_1)^{\nu_1}$ という因子だけであるから，$\dfrac{(z-\lambda_1)^{\nu_1}I}{zI-A}$ は C の内部で正則となり，その周回積分は 0 である．ところで

$$\begin{aligned}(z-\lambda_1)^{\nu_1}I&=\{(zI-A)-(\lambda_1I-A)\}^{\nu_1}\\&=(zI-A)^{\nu_1}+\nu_1(zI-A)^{\nu_1-1}(\lambda_1I-A)+\cdots+\nu_1(zI-A)(\lambda_1I-A)^{\nu_1-1}+(\lambda_1I-A)^{\nu_1}\\&=B(z)(zI-A)+(\lambda_1I-A)^{\nu_1}\end{aligned}$$

と書ける．ここに $B(z)$ は z の多項式を成分とする行列であり，従ってその周回積分も 0 となる．故に

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C\frac{(z-\lambda_1)^{\nu_1}I}{zI-A}dz=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C B(z)dz+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C\frac{(\lambda_1I-A)^{\nu_1}}{zI-A}dz=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C\frac{(\lambda_1I-A)^{\nu_1}}{zI-A}dz\\&=(\lambda_1I-A)^{\nu_1}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C\frac{I}{zI-A}dz=(\lambda_1I-A)^{\nu_1}E_1\end{aligned}$$

（2 行目への変形は積分演算の線形性を用いた．）これで $\mathrm{Image}\,E_1\subset V_{\lambda_1}$ が分かり，どちらも $\boldsymbol{R}^n$ の直和分解を与えているので E_1 が V_{λ_1} への射影作用素であることが示された．

(2) $A(zI-A)^{-1}$ に対する周回積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C S^{-1}AS(zI-S^{-1}AS)^{-1}dz \tag{S.18}$$

は，もし λ_1 の部分が半単純なら，上の計算全体に λ_1 が掛かるだけなので，結果は 1 の代わりに λ_1 が並ぶ．従って λ_1 の重複度を ν_1 とすれば，トレースを取ることによりスカラー $\nu_1\lambda_1$ が得られる．よって特に題意のように $\nu_1=1$ なら λ_1 が得られる．この積分は A の成分が少し動いても，固有値が積分路をまたぐことはないので，積分表現は有効性を保ち，従って局所的に成分の正則関数となる．従って λ_1 も成分の正則関数となる．

1. A の成分が大きく動くと積分表現が無効になるので，大域的には正則性は言えない．一般には重複固有値のところで分岐する代数関数となる．

2. 重複度 $\nu_1 > 1$ のときには，この公式からは固有値の解析性に関して（連続性に関してすら）何も言えない．実際，ν_1 は成分に対して連続ではなく，一般に微小な摂動でほぼ常に単純固有値になってしまうからである．

3. A が λ_1 について半単純ではないときは，積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_C A(zI-A)^{-1}dz$$

は A の λ_1-一般固有空間への制限を与える．これは計算しなくても一般論から分かることであるが，一つのジョルダンブロックで計算で確認するには，(S.16) のような具体的な表現よりも $J=\lambda I+N$ として問題 7.2.5 の解答で与えた $(J-zI)^{-1}=\frac{1}{\lambda-z}I-\frac{1}{(\lambda-z)^2}N+\frac{1}{(\lambda-z)^3}N^2-+\cdots+\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\lambda-z)^{\nu}}N^{\nu-1}$ という表現の方が分かりやすい．するとこのブロックに対応する $A(A-zI)^{-1}$ の部分は，J, I, N をこのブロックサイズ ν のものとして

$$\begin{aligned}
&J(J-zI)^{-1}\\
&=(\lambda_1 I+N)\{\frac{1}{\lambda_1-z}I-\frac{1}{(\lambda_1-z)^2}N+\frac{1}{(\lambda_1-z)^3}N^2-+\cdots+\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\lambda_1-z)^{\nu}}N^{\nu-1}\}\\
&=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-z}I-\Big(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-z)^2}-\frac{1}{\lambda_1-z}\Big)N+\Big(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-z)^3}-\frac{1}{(\lambda_1-z)^2}\Big)+\cdots+(-1)^{\nu-1}\Big(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-z)^{\nu}}-\frac{1}{(\lambda_1-z)^{\nu-1}}\Big).
\end{aligned}$$

よってこれを z につき C 上で周回積分すれば，確かに $\lambda_1 I+N$ が残る．他のブロックは積分で消失するので，これを相似変換で戻せば A の λ_1-一般固有空間への射影成分が得られていることが分かる．従って全体のトレースを取れば，トレースの相似変換不変性によりこの場合も $\nu_1\lambda_1$ が得られる．

p.275 問題 8.2.1 (2) の解答への補遺

本書中で指示されているように，

$$Q=\begin{pmatrix}
-\frac{2\sqrt{3}+5}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}\sqrt{24-6\sqrt{3}}} & \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} & \frac{-2\sqrt{3}+5}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}\sqrt{24+6\sqrt{3}}}\\
\frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}\sqrt{24-6\sqrt{3}}} & -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}\sqrt{24+6\sqrt{3}}}\\
\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}\sqrt{24-6\sqrt{3}}} & \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} & \frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}\sqrt{24+6\sqrt{3}}}
\end{pmatrix}$$

である．ここで $\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, また

$$\sqrt{5+2\sqrt{3}}\sqrt{24-6\sqrt{3}}=\sqrt{120-36+(48-30)\sqrt{3}}=\sqrt{84+18\sqrt{3}}=\sqrt{3}\sqrt{28+6\sqrt{3}}=\sqrt{3}(1+3\sqrt{3}) \tag{S.19}$$

と簡単になる．同様に

$$\sqrt{5-2\sqrt{3}}\sqrt{24+6\sqrt{3}}=\sqrt{120-36-(48-30)\sqrt{3}}=\sqrt{84-18\sqrt{3}}=\sqrt{3}\sqrt{28-6\sqrt{3}}=\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1). \tag{S.20}$$

これらを上の Q の表現に代入すると

$$\begin{aligned}
Q&=\begin{pmatrix}
-\frac{2\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}(1+3\sqrt{3})} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1)}\\
\frac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}(1+3\sqrt{3})} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1)}\\
\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(1+3\sqrt{3})} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1)}
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
-\frac{(5+2\sqrt{3})(3\sqrt{3}-1)}{26\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{(5-2\sqrt{3})(3\sqrt{3}+1)}{26\sqrt{3}}\\
\frac{-(4-\sqrt{3})(3\sqrt{3}-1)}{26\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{(\sqrt{3}+4)(3\sqrt{3}+1)}{26\sqrt{3}}\\
\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}
-\frac{13\sqrt{3}+13}{26\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{13\sqrt{3}-13}{26\sqrt{3}}\\
-\frac{13\sqrt{3}-13}{26\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{13\sqrt{3}+13}{26\sqrt{3}}\\
\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\\
-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\\
\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

検算してみると，この Q は $Q^TQ=E$ を満たしていることが確かめられる．割と簡単だが自明ではない直交行列の例はけっこう希少なので，各自確かめて見られたい．

最後に一般可逆を求める．これは公式により

$$
\begin{aligned}
A^{\dagger} &= P\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{24-6\sqrt{3}}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{24+6\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{24-6\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{24+6\sqrt{3}}} & -\frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8-2\sqrt{3}}} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{24-6\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{24+6\sqrt{3}}} & -\frac{1}{\sqrt{13}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{3}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}+1)} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1)} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}+1)} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1)} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+1} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}+1)} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(3\sqrt{3}-1)} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}+1} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{5}{26} & \frac{3}{26} & \frac{11}{26} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{5}{26} & \frac{3}{26} & \frac{11}{26} \\ -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 8 & -16 & 2 \\ 5 & 3 & 11 \\ 8 & 10 & 2 \\ 5 & 3 & 11 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ここで (S.19), (S.20) を用いた 2 重根号の簡略化を行った．