

基礎演習 微分積分 — 追加問題

問題番号は暫定的です，数が集まったところで分類します。

【微分の問題 1】 積の高階微分に関するライプニッツの公式の係数が 2 項定理のそれと同じになる理由の説明法として，次の推論を完成させよ。

(1) D_x, D_y を独立な変数 x, y に関する偏微分とするとき，演算子 (作用素) の意味で 2 項定理

$$(D_x + D_y)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k D_x^{n-k} D_y^k$$

が成り立つことを示し，これより

$$(D_x + D_y)^n (f(x)g(y)) = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(y)$$

となることを示せ。

(2) 合成関数の偏微分公式より

$$D_x \{f(x, x)\} = \{(D_x + D_y)f(x, y)\} \Big|_{y=x}$$

を示せ。

(3) (2) の公式を用いて，数学的帰納法により

$$D_x^n \{f(x, x)\} = \{(D_x + D_y)^n f(x, y)\} \Big|_{y=x}$$

を示せ。

(4) (1) で導いた式で $y = x$ とすることにより，ライプニッツの公式を証明せよ。

，