第1章　微分方程式とは？

この章では駆け足で常微分方程式について概観する．次章以降への読書案内として適宜参照を記した．ここでは細かいことは気にせず, 大まかな概念を掴んでほしい．

1.1　微分方程式の意味とその導出

a) 最も基本的な微分方程式とその例

一般に関数が未知数である方程式を関数方程式と呼ぶが，その中でもとりわけ重要なのが，微分方程式と呼ばれる，未知関数が導函数として含まれる方程式である．含まれる導函数の最高階数を微分方程式の階数と云う．微分方程式としては多変数の未知関数の偏微分を含む“ 偏微分方程式 ”が最も一般であるが，ここでは特に，基本的な場合である未知関数が一変数のものを考察する．区別のためにこれを，“ 常微分方程式 ”と呼ぶが，以下では誤解の恐れが無い限り単に微分方程式と呼ぶことにする．

例えば

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.1}$$

は，独立変数 x の一変数関数 $y = y(x)$ を未知数とする一階の微分方程式である．特に

$$\frac{dy}{dx} = ay \tag{1.2}$$

は，未知量 y の増加率がその現在量に比例するという法則を式に表したもので，いろいろな場面で現れる重要なものである．次に

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, \frac{dx}{dt}) \tag{1.3}$$

は t を独立変数とする未知数 x の二階微分方程式であるが，これは Newton の運動方程式として力学的問題に登場し，微分方程式全体としても最も重要なものである．今ここで運動量に相当する未知数

$$p = \frac{dx}{dt}$$

を補助的に導入すれば，上は

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p, \\ \dfrac{dp}{dt} = f(t, x, p) \end{cases} \tag{1.4}$$

と，一階の連立微分方程式になる．(1.3) と (1.4) は数学的には全く同値であるが，その表現するところの意味は微妙に異なる．最も簡単な例として

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1.5}$$

をとろう．これは直線上を単位質点が原点からの距離に比例した復元力を受けて運動する状態を記述するもので，“ 単振動の方程式 ”と呼ばれる．これを一階連立化したものは

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p, \\ \dfrac{dp}{dt} = -kx \end{cases} \tag{1.6}$$

である．

問 1.1 長さ l の振り子を振動させたときの振り子の振れの角 θ が満たす運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

となることを示せ. ただし g は重力の加速度とする. ［方程式 (1.5) はここで $\sin\theta$ を θ で近似したものである.］

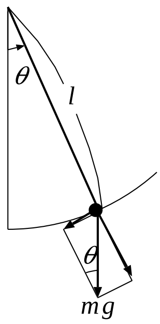


図 1.1

b) 微分方程式の解の意味

与えられた微分方程式を“ 満足する ”関数，すなわち微分方程式の未知関数のところに代入すると方程式が成立するような関数を，この微分方程式の解という．微分方程式とその解の意味は，具体的な問題から導かれたものについては当然元の問題の意味に他ならない．だが，数学の抽象性から得られる一般的特質として，一度微分方程式という抽象的な式で与えられたものは，同じ式に帰着する他の如何様なものにも解釈できるということがあり，このような読み換えが時には思いがけない発見をもたらしてきたことを考えると，代表的な意味付けについて一通り知っておくことは大切なことである．

一階の方程式 (1.1) については，解 $y = u(x)$ はそのグラフがその上の各点 (x, y) において与えられた量に等しい傾き $u'(x) = f(x, y)$ を持つようなものである，という解釈が基本的である．そこで平面の各点 (x, y) においてそこを通って傾き $f(x, y)$ の微小線分を引き，いわゆる“ 傾きの場 ”を描いてみる．この場合線分の長さは意味が無いので，描画の細かさに応じた一定の長さを採用しておけばよい．この平面に各点でこの線分に接するような曲線が引ければ，それが方程式 1.1 の解のグラフ，すなわち“ 解曲線 ”である．(近似的には，この傾きの線分を次々と繋いで行けばよい．このようにして得られる近似解を Euler-Cauchy の折れ線近似解と呼ぶ.) ところでこのような曲線はいくらでも引けることが想像されるであろう．解を一つに決めるには，どの点を通すかを指定する．普通はこれで一本の解曲線が確定する．次図は, 方程式 $y' = x - y^2$ について勾配場 (左) と, 折れ線近似解の族 (右) を示したものである. この方程式の解は, 初等函数にはならない (付録 A 参照).

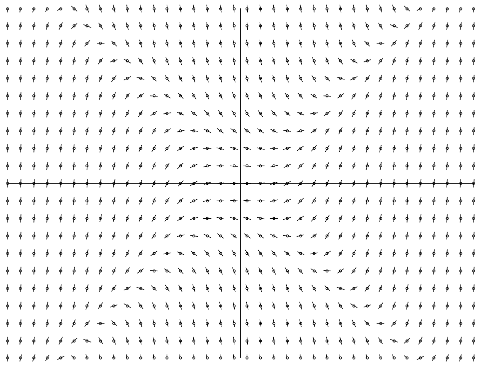


図 1.2a

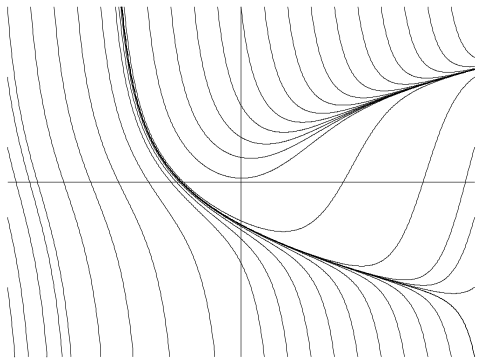


図 1.2b

二階の方程式 (1.3) の場合は運動方程式としての解釈が基本的である．ここでは独立変数 t は時刻を表し，未知関数 x は直線上を運動する質点の時刻 t における位置座標を表している．Newton の運動方程式 (1.3) は運動の加速度 d^2x/dt^2 がこの単位質点に働く力に等しいことを述べたもので，これを積分して，すなわち微分方程式を解いて位置 x を時刻 t の関数として具体的に表すのが力学の目標である．運動を決定するには初期時刻において，質点の初期位置と初期速度とを与えなければならない．このとき, その後の運動が完全に決定されるという決定論 (古典的因果律) は, 物理的信念というよりもむしろ微分方程式の数学的特性の帰結である．

一階化された方程式 (1.4) は質点の位置 x と運動量 p を独立な未知量と考えた運動方程式の解釈であり，x と p の関係としてより一般なものを許すことにより力学は本質的な発展を遂げた．座標 x, p を持つ平面は力学で“ 相平面 ”と呼ばれるが，数学的には x, y を座標とする通常の平面と同じものである．方程式 (1.4) の解 $x = x(t)$, $p = p(t)$ は相空間の点の幾何学的な動きを表現している．(1.4) の右辺に t が含まれていると，二つのグラフは相平面で交わることがあるが，これは決定論とは矛盾しない．このような場合は解のグラフを t 軸まで含めた三次元空間で表示するのが本当だからであり，そこでは二本の解曲線は交わらない．

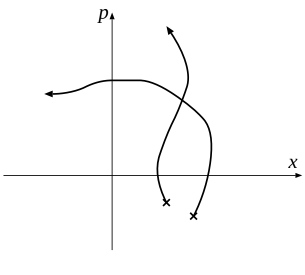


図 1.3a

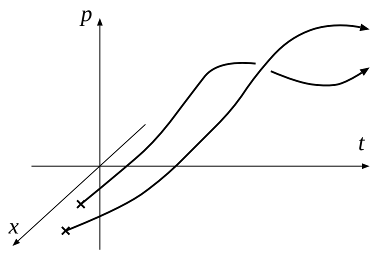


図 1.3b

しかし応用上重要な多くの場合に，(1.4) の右辺が t を陽に含まないことがある．このようなものを自励系と呼ぶが，このときは解曲線は時刻 t の平行移動で形を変えないため，t を単なるパラメータとみなして得られる相平面の曲線 $x = x(t)$, $p = p(t)$ は不変な意味を持つ．これを自励系の解軌道と呼ぶ．もっとも，独立変数 t の存在の意義は変わらないので，曲線としてはつまらない $x = \mathrm{const.}$, $p = \mathrm{const.}$ のようなものも立派に解の仲間である．解軌道としてはこれは不動点あるいは特異点と呼ばれる．

例として (1.6) を見よう．(1.5) の解が良く知られている単振動の式

$$x = a \sin \sqrt{k}(t + \alpha)$$

であることから，(1.6) の方の解は

$$x = a\sin\sqrt{k}(t+\alpha), \quad p = a\sqrt{k}\cos\sqrt{k}(t+\alpha)$$

であることがわかる．これから t を消去すると

$$x^2 + \frac{p^2}{k} = a^2$$

という楕円の解軌道が得られ，原点が不動点となる．(最後の式は, (1.6) を辺々割り算して得られる変数分離形の方程式 $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{k}{p}x$ を積分して直接導くこともできる.)

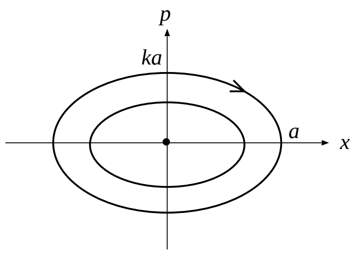


図 1.4

運動方程式と離れて一階の自励系を最初から考察するときは

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y) \tag{1.7}$$

と書く方が自然であろう．このとき，右辺の関数の対は平面にベクトル場を定める．この連立方程式の解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ は各点での接ベクトルがこのベクトル場のその点でのベクトルと一致するような曲線である．先に示した傾きの場と異なりベクトル場の各ベクトルの長さは意味のある量であり，パラメータ（独立変数）t に関する曲線の描画速度を表している．t が時間ならこれは速度ベクトルに他ならない．xy 平面に描かれた解の軌跡としては，(1.7) から割り算によりパラメータ t を消去して得られる一階単独の方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \tag{1.7$'$}$$

の解曲線と同等であるが，元の方程式の解の方はこの曲線のパラメータ表示を与えているだけでなく，そのパラメータの取り方も（積分定数である平行移動の分を除き）指定していることになる．それにこの表現法では，平衡解 $x = \mathrm{const.}$, $y = \mathrm{const.}$ は表現できず，$f(x,y) = g(x,y) = 0$ を満たす点は特異点となってしまう．このような点は元の自励系 (1.7) の特異点と呼ばれることは既に述べたが，ベクトル場 ${}^t(f(x,y), g(x,y))$ の特異点とも呼ばれる．道路標識の矢印が無くなってしまい, どっちに行けばよいのか分からない点だと思えばよい．($f(x,y)$ だけが 0 になるような点は (1.7$'$) の分母と分子をひっくり返して y の方を独立変数とすればよいから，特異扱いする必要は無いのである.)

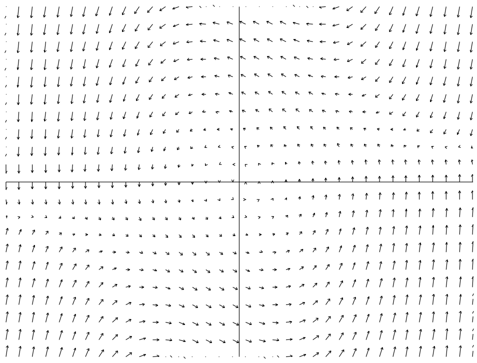


図 1.5

一階の自励系の解は平面の流れ，あるいは同相写像の 1 パラメータ族を与える．このことを利用して幾何学などで必要な同相写像を定義するのに一階連立微分方程式がしばしば用いられる．このような考察は三次元以上の空間でも通用する．

c) 微分方程式を解くことの意味

微分方程式を立てるのは，それを満たす解を具体的に知りたいからであろう．そこで当然ながら微分方程式を解くことの第一義的な意味は，この解を具体的に求めるということになろう．ここで具体的に求めることの定義を最も狭く解釈すれば，既知の関数と四則演算及び微積分演算の有限回の組み合わせにより解を表すということである．このような解法を“求積法”という．これはこの解法手続きのうちで積分操作が最も重要だからである．本書においても, このような解法のいくつかを付録Aにまとめておいた．

しかし求積法の解法というのは常にある種の幸便を仮定していて後ろめたいところがあり，理論的なことが好きな人には由緒正しい数学のように思えないかもしれず，また数学を応用しようとして勉強している人にも，せっかく学習しても滅多なことでは役に立たないと思われるであろう．考えてみれば，上の求積法の定義で述べたような形で表現できるような関数は，関数全体の中では非常な少数派であろう．微分方程式の解が必ずしもそのように表現できないと云うことは，むしろ微分方程式の解として新しい有用な関数が定義できるということ，すなわち微分方程式の表現力の豊かさを表しているという，積極的な解釈も成り立つのである．

ではそのような微分方程式を解くとはどのような意味であろうか．解の関数としての性質が十分に分かればよいのである．微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{1.1'}$$

は求積法で解くことのできるもののうちでも最も簡単な方であり，解は $x = 0$ での値（初期値）を 1 に指定すれば指数関数 $y = y(x) = e^x$ となることも周知であるが，数 e も指数関数も知らない人にこの関数の性質を説明するとしたらどうすれば良いであろうか？指数関数を知っていても e^2 や $e^{2/3}$ 程度ならともかく $e^{\sqrt{2}}$ を説明するのはけっこう面倒であろう．指数関数の性質の内で最も基本的なものは指数法則

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b \tag{1.8}$$

であるが，これは二つの関数 $y(a + x)$ と $y(a)y(x)$ が同じ方程式 (1.1′) を満たし，かつ $x = b$ での値が一致することから結論できる.（このことは容易に確かめられるので計算してみよ.）実際，(1.8) は $x = 0$ における値 1 から出発し直接 $a + b$ まで進んだ解と，一旦 $x = a$ まで解きそこでの値 $y(a)$ を初期値として更に b だけ進んだときの解が一致することを主張したもので，これは初期

値問題の解の“一意性”，すなわち指定された初期値を持つ解がただ一つであることを，この方程式について表現したものに他ならない．

それでは e の値はどうであろうか？これは上の解の $x=1$ での値である．区間 $[0,1]$ を n 等分し，$h=1/n$ ととって各部分区間で方程式を差分方程式

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \doteqdot y(x)$$

で近似し，これより得られる

$$y(x+\frac{1}{n}) \doteqdot (1+\frac{1}{n})y(x)$$

という近似解を用いれば，これを n 回反復することにより

$$e=y(1) \doteqdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n y(0)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

という e の普通の定義による近似値が得られる．要するに数値解法で微分方程式の解を計算すれば e の値さえ求まるのである．

この方程式は簡単すぎると思われるかもしれないので，もう一つ，二階の方程式 (1.5)，あるいはその一階化である (1.6) を $k=1$ として調べてみよう．初期値

$$x(0)=0, \quad p(0)=1 \tag{1.9}$$

の下での解を $x=S(t), p=C(t)$ という記号で表す. これらは良く知られているようにそれぞれ関数 $\sin t$, $\cos t$ になるはずであるが[1]，三角関数を知らない（あるいはこの解を知らない）ものとしてその主な性質を方程式から導いてみよう．

まず，$x=C, p=-S$ は方程式

$$x'=p, \quad p'=-x$$

すなわち元と同じ方程式を満たし，また初期条件

$$x(0)=1, \quad p(0)=0$$

を満たすので，次章で一般的に論ずる“方程式の線型性”の帰結として, 一般の初期値 $x(0)=A$, $p(0)=B$ に対する解は，これら二つの一次結合

$$x=AC(t)+BS(t), \quad p=-AS(t)+BC(t)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ -A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) \\ C(t) \end{pmatrix}$$

で与えられる．さて，(1.9) を初期値とするもとの解は $t=a$ において値 $x=S(a), p=C(a)$ をとる. 今考えている方程式は時間の平行移動で不変だから, これを初期値として, この時点から更に時刻 b だけ進んだものは, 上の解の公式において $A=S(a), B=C(a)$ ととったものの $t=b$ における値に等しいであろう. 他方, これはもちろん始めの解の $t=a+b$ における値と一致するはずだから, これらを等しいとおけば,

$$\begin{pmatrix} S(a+b) \\ C(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(a) & S(a) \\ -S(a) & C(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(b) \\ C(b) \end{pmatrix}$$

[1]点 $(x(t),p(t))$ は通常の三角函数の定義と異なり, 相空間の軌道上を負の向きに回転することに注意せよ. それが嫌な人は, 物理の本で使われるように p の方を第1座標に取るとよい.

すなわち,

$$S(a+b)=S(a)C(b)+C(a)S(b), \qquad C(a+b)=C(a)C(b)-S(a)S(b)$$

を得る. これは正弦関数・余弦関数の加法定理に他ならない. 更に

$$E(t)=S(t)^2+C(t)^2 \tag{1.10}$$

を微分すれば 0 になることから, この値が定数 $E(0)=1$ に等しいことがわかる. のみならず

$$\{dS(t)\}^2+\{dC(t)\}^2=\{C(t)^2+S(t)^2\}dt^2=dt^2$$

よって平面上の点 $(S(t),C(t))$ は定速度 1 で単位円周上を (負の向きに) 動くから, 2π 時間後には同じ点に戻る, すなわち, $S(t)$, $C(t)$ は周期 2π の周期関数であることが分かる. $S'(t)=C(t)$, $C'(t)=-S(t)$ は方程式により最初から保証されている. その他の性質も同様にして皆方程式から導くことができる. 関数の値は数値解法で計算できるから, 三角関数を予め知らなかったとしてもこれで何の不足も無かろう.

以上では微分方程式に解が存在することや, 初期値を適当に定めれば解がただ一つに決まることは当然なこととして用いてきたが, これはそう自明なことでは無い. 最も簡単な微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

の解, すなわち $f(x)$ の原始関数の存在を f が連続関数のときに証明することもそう自明なことでは無かった. 幸い, 原始函数は加法的な任意関数の不定性しか無かったが, 初期値問題の解の一意性に至っては, 右辺の関数 $f(x,y)$ が単に x, y につき連続なだけでは必ずしも成り立たない. ここに微分方程式の一般論を構築する意義がある. 後のいくつかの章では, その一端を紹介する.

1.2 実用的な微分方程式の導出例

a) 運動方程式の例

前節で言及したように, 理工学において重要な微分方程式の殆んどは Newton の運動の第二法則

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}$$

から導かれる. 加速度は位置座標の時間に関する２階微分なので, この結果多くの重要な方程式は２階となる. 質点の運動の場合は運動する空間の次元に等しい成分を持った２階の連立常微分方程式となる. １次元の場合には既に単振動の例を上で述べた. ２次元の場合, 最も重要なものは２体問題と呼ばれる, 宇宙空間の２個の天体の相互運動であり, Newton が２体間の相互作用として万有引力の法則, すなわち２体間の距離の２乗に反比例する引力を仮定して立てた運動方程式を解いて, Kepler が観測結果にもとづいて打ち立てた惑星の運動の三法則を解析的に導き出したことは, 微分方程式の歴史だけでなく, 近代科学全体にとっても画期的なことであった.(惑星はたくさんあるが, 惑星相互の引力は惑星と太陽の引力に比べて弱いので無視し, 惑星毎に太陽との相互運動のみを考えるため二体問題となるのである.) この例はあまりにも有名であるが, 重要なので方程式の立て方と解き方を簡単に見ておこう.

いま, ２質点の質量を M,m, 位置ベクトルを $\vec{R},\vec{r}$ とし, 比例定数（万有引力定数）を γ とすれば, 万有引力の法則と運動方程式の解析的表現は

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\gamma Mm\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}, \quad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\gamma Mm\frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} \tag{1.11}$$

という連立方程式となる．惑星の運動の場合は前者が太陽，後者が惑星とすれば $M >> m$ である．この方程式は見掛け上６個の未知変数を含んでいるが, これから物理的考察を用いて次元を減らしてゆき, 平面上のただ一つの方程式に帰着させる. まず, 上の二つの方程式を加えると

$$\frac{d^2}{dt^2}(M\vec{R}+m\vec{r}) = 0 \qquad \therefore \ \frac{d}{dt}(M\vec{R}+m\vec{r}) = 一定$$

が得られるが，これは重心

$$\frac{M\vec{R}+m\vec{r}}{M+m} \tag{1.12}$$

が等速度運動をしていることを表している．そこでこの重心からの相対運動，いわゆる重心座標を考察する：

$$\begin{aligned} \vec{r}_G &= \vec{r} - \frac{M\vec{R}+m\vec{r}}{M+m} \\ &= \frac{M}{M+m}(\vec{r}-\vec{R}) \end{aligned}$$

と置けば

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\vec{r}_G}{dt^2} &= m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \gamma Mm\frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} \\ &= -\gamma\frac{M^3m}{(M+m)^2}\frac{\vec{r}_G}{|\vec{r}_G|^3} \end{aligned} \tag{1.13}$$

という方程式が得られる．すなわち，質量を若干修正するだけで原点からの引力を受けて運動する３次元空間内の１体の問題に帰着する．もう一方の質点についても同様であるが，重心が原点に固定されているので, 改めて解くには及ばない. なおかつ, 惑星の運動の場合には先に述べたことから $\vec{R}$ は重心 (1.12) に非常に近く，従って近似的に太陽の位置を原点と同一視しても構わない．

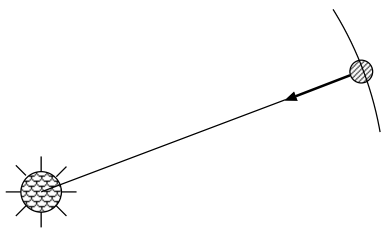


図 1.6

そこで以下方程式

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{1.14}$$

を考察する．$\vec{r}$ はもともと三次元ベクトルだが，角運動量の保存則

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\mu}{r^3}\vec{r}\times\vec{r} = 0 \qquad \therefore \ \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = 一定$$

により，運動は定ベクトルに垂直な平面内で行われる．ここに $\vec{a}\times\vec{b}$ は一般にベクトルの外積あるいはベクトル積と呼ばれるものであり, その大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積に等しく, 方向は両ベクトルに垂直で, 向きは $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に右ネジを回したときに進む向きを持つ．$\vec{a}, \vec{b}$ の成分をそれぞれ ${}^t(a_1, a_2, a_3)$, ${}^t(b_1, b_2, b_3)$ とすれば

$$\vec{a}\times\vec{b} = {}^t\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

であることが簡単な計算から分かる．この具体的表現から, 外積の微分について上で用いたような積の微分公式が成り立つことも分かる．

以下，この定ベクトルを z 軸方向に，また運動する平面を xy 平面に選ぼう：

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=(0,0,\varOmega) \tag{1.15}$$

ケプラーの頃にはまだ角運動量の概念は無かったが，彼はこれを“ 面積速度が一定 ”，すなわち惑星と太陽を結ぶ動径が単位時間に掃過する扇形の面積が一定という形で表現し，いわゆるケプラーの第二法則法則を与えた．さて，運動方程式の積分の常套手段として (1.14) の両辺と $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ との内積をとれば，$|\vec{r}|$ を r と略記して,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=-\mu\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=-\mu\frac{1}{2r^3}\cdot\frac{d(\vec{r}\cdot\vec{r})}{dt}=-\mu\frac{1}{2r^3}\cdot\frac{d(r^2)}{dt}=-\mu\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{dt}=\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right).$$

ここで, 内積の微分についても積の微分公式が成り立つことに注意せよ．よって両辺を積分して

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2=\frac{\mu}{r}+E$$

が得られる．ここに E は積分定数であるが，これを

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2-\frac{\mu}{r}=E \tag{1.16}$$

と書き直して，左辺の第一項を運動エネルギー，第二項を位置エネルギーと名付け，この式をエネルギー保存則と呼ぶ.

以下，方程式を具体的に解くため

$$\vec{r}=r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

と置くと

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+r\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

この右辺の二つの単位ベクトルは互いに垂直だから，

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

よって (1.16) より

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\frac{2\mu}{r}=2E$$

また (1.15) を計算して

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\varOmega$$

この二式から

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=-\frac{\varOmega^2}{r^2}+\frac{2\mu}{r}+2E \tag{1.17}$$

が得られる．これらを直接積分することも可能であるが, 我々はむしろ軌道の形の方に興味があるので, 最後の２式から t を消去して得られる

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\Omega}\sqrt{-\Omega^2 + 2\mu r + 2Er^2}$$

という方程式を解こう．これは変数分離法で求積できて

$$\int \frac{\Omega}{r\sqrt{-\Omega^2 + 2\mu r + 2Er^2}} dr = \theta + C$$

となる．最後の積分定数は任意定数の数を確認するために付けておいたが，角度のずらし, すなわち軌道の座標回転だけの意味しかない．この左辺の積分は根号内が二次式の不定積分であり, 標準的な有理化計算により遂行できるが, ここでは, むしろ (1.17) から自然に導出される形を見ると想像できる座標変換 $1/r = s$ を用いて

$$\int \frac{\Omega}{r\sqrt{-\Omega^2 + 2\mu r + 2Er^2}} dr = \int \frac{1}{\sqrt{-\dfrac{1}{r^2} + 2\dfrac{\mu}{\Omega^2 r} + \dfrac{2E}{\Omega^2}}} \frac{dr}{r^2} = -\int \frac{1}{\sqrt{-s^2 + 2\dfrac{\mu}{\Omega^2}s + \dfrac{2E}{\Omega^2}}} ds$$

$$= -\int \frac{d\Big(s - \dfrac{\mu}{\Omega^2}\Big)}{\sqrt{-\Big(s - \dfrac{\mu}{\Omega^2}\Big)^2 + \dfrac{\mu^2 + 2E\Omega^2}{\Omega^4}}} = -\mathrm{Arcsin}\, \frac{s - \dfrac{\mu}{\Omega^2}}{\dfrac{\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}}{\Omega^2}} = -\mathrm{Arcsin}\, \frac{\Omega^2 s - \mu}{\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}}$$

$$= -\mathrm{Arcsin}\, \frac{\Omega^2 - \mu r}{\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\, r} = \mathrm{Arcsin}\, \frac{\mu r - \Omega^2}{\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\, r}$$

と計算しよう．ここで, 軌道の向きを見やすくする (後で分かるように, 楕円の長軸を x 軸方向にする) ため, $C = \pi/2$ にとると,

$$\theta + \frac{\pi}{2} = \mathrm{Arcsin}\, \frac{\mu r - \Omega^2}{\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\, r} \qquad \text{すなわち} \qquad \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{\mu r - \Omega^2}{\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\, r}$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\, r\cos\theta + \Omega^2 = \mu r$$

あるいは

$$r\left(\frac{\mu}{\Omega^2} - \frac{1}{\Omega^2}\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\cos\theta\right) = 1 \tag{1.18}$$

という軌道の方程式が得られた．これは原点を焦点にとった極座標による二次曲線の方程式表示である．直角座標による方程式しか知らない人は, 一つ手前の式から変数変換してみれば

$$(\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\, x + \Omega^2)^2 = \mu^2(x^2 + y^2)$$
$$-2E\Omega^2 x^2 - 2\Omega^2\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\, x + \mu^2 y^2 = \Omega^4$$

平方完成して

$$\frac{4E^2}{\mu^2}\left(x + \frac{1}{2E}\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}\right)^2 + \frac{-2E}{\Omega^2}y^2 = 1$$

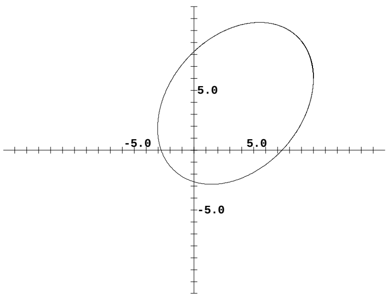
と，簡単に確かめることができる．

惑星の運動に関係するのは $E < 0$ のときで，このとき上は楕円となる．長径が $\mu/(-2E)$, 短径が $\Omega/\sqrt{-2E}$ であり, 従って中心と焦点との距離は, 一般公式により

$$\sqrt{\frac{\mu^2}{4E^2} - \frac{\Omega^2}{-2E}} = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2E\Omega^2}}{-2E}$$

従って, 原点がこの楕円の焦点になっていることが分かる.

ちなみに $E>0$ のときの軌道は双曲線となるが，これは非周期性の彗星など，太陽に一度しか近づかない天体の軌道として実現されることがある．$E=0$ のときは放物線となるが，これは相当の偶然でないと実現されない．現実に放物線軌道が観測されることがあるかどうか小生は寡聞にして知らない．ハレー彗星が発見される以前には，彗星の軌道はみな放物線と考えられていた時代もあったようである．



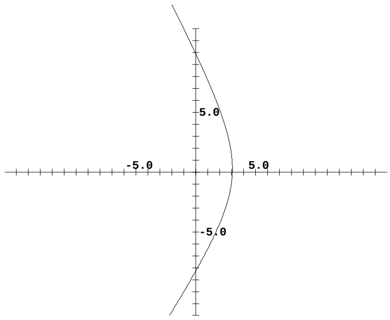


図 1.7

最後にケプラーの第三法則を導いておこう．今度は時間の一周期 $0 \le t \le T$ に関する積分が必要となるが, 軌道は楕円であることが分かっており, 楕円上の点から焦点までの距離は, 長径が周と交わる, いわゆる近日点と遠日点でそれぞれ最小及び最大となるので, (1.17) から

$$\begin{aligned}\frac{T}{2} &= \int_0^{T/2} dt = \int_{\frac{\mu}{-2E}-\frac{\sqrt{\mu^2+2E\Omega^2}}{-2E}}^{\frac{\mu}{-2E}+\frac{\sqrt{\mu^2+2E\Omega^2}}{-2E}} \frac{r}{\sqrt{-\Omega^2+2\mu r+2Er^2}}dr \\ &= \int_{\frac{\mu}{-2E}-\frac{\sqrt{\mu^2+2E\Omega^2}}{-2E}}^{\frac{\mu}{-2E}+\frac{\sqrt{\mu^2+2E\Omega^2}}{-2E}} \frac{\sqrt{-2E}\,r}{\sqrt{\mu^2+2E\Omega^2-(-2Er-\mu)^2}}dr\end{aligned}$$

ここで $(-2Er-\mu)/\sqrt{\mu^2+2E\Omega^2}=s$ と置けば,

$$= \frac{1}{\sqrt{-2E}} \int_{-1}^{1} \frac{s+\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+2E\Omega^2}}}{\sqrt{1-s^2}} \frac{\sqrt{\mu^2+2E\Omega^2}}{-2E} ds = \frac{\pi\mu}{(-2E)^{3/2}}$$

ここで, s の奇函数の $[-1,1]$ 上の積分は 0 となることを用いた．さて, これから

$$\frac{\text{周期}^2}{\text{楕円の長径}^3} = \frac{(2\pi)^2\mu^2}{(-2E)^3}\frac{(-2E)^3}{\mu^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

(1.13) より, 定数 $\mu=\gamma\frac{M^3}{(M+m)^2}$ は地球と太陽の質量, 及び万有引力定数に依存するが, $M>>m$ という仮定の下では, 惑星の質量 m は殆んど無視でき, $\mu \fallingdotseq \gamma M$ となる．これによりケプラーは, この比の値が惑星に依存しない量であることを発見できたのである.

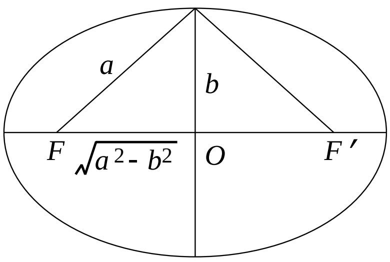


図 1.8

問 1.2 万有引力定数 γ は捻れ秤等を用いて地上で測定可能であり，その値は $\gamma = 6.6720\times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{sec}^{-2}$ である．また，地球の公転周期は 365.256 日，地球の軌道の長径は $1.496\times10^11\mathrm{m}$ である．ケプラーの第３法則を導いた式を用い，これらのデータから太陽の質量を概算せよ．

地球等の公転運動を精密に論ずるときは木星などの巨大惑星の影響を無視できなくなる．三つの天体を同時に考えると，もはや一般にはその軌道を時間無限遠まで，すなわち未来永劫にわたって初期値を含んだ一価な解析関数で表示することすらできないことが知られている．すなわち，解軌道は初期条件により確定するという決定論は正しいものの，その軌道は複雑にからみ，しかもそのパターンは初期条件とともに劇的に変化しうる．天体が衝突する恐れが無いかどうかさえ一般にはわからない．このような問題を論ずるのを“三体問題”という．

三体問題は 6 次元の相空間の自励系による流れである（重心の自由度の分を引き去っているので $3\times3-3=6$ 次元であるが，平面内の運動に限っても $2\times3-2=4$ 次元の自由度はある）が，それほど高次元で無くとも，既に三次元でこのように複雑な現象を見ることができる．次の方程式

$$\frac{dx}{dt}=a(y-x),\quad \frac{dy}{dt}=x(b-z)-y,\quad \frac{dz}{dt}=xy-cz \tag{1.19}$$

は 1960 年に気象学者 Lorenz が対流のモデルとして提出したものであるが，上で述べたような初期値に敏感な軌道の変化が見られる．このような現象を決定論的カオスと呼ぶ．そもそも決定論とは，観測される初期データから未来が予測できることを云うのであるから，初期データの観測に含まれるわずかな誤差が未来の状態をすっかり別のものにしてしまうような状況では，如何に数学的には決定論的であるといっても，現実には“定め無き未来”ということになってしまうであろう．そこで決定論的と云うためには解がその初期値に対してただ一つに定まるだけでなく，連続に依存するといういわゆる“問題の適切性”が要求される．常微分方程式の場合に幸い，時間を有限区間に限って論ずればこの適切性は保証されるのだが，時間を無限の未来まで考えたときの連続性，即ち安定性は必ずしも保証されないのである．

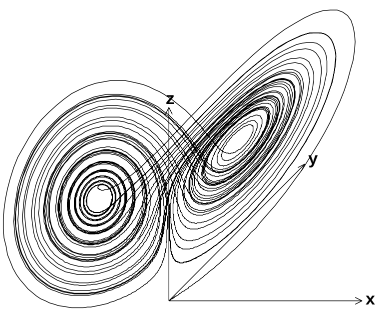


図 1.9

b) 偏微分方程式を還元して得られるものの例

質点の運動は常微分方程式で記述できたが，空間的な広がりのある物体の各部が一様でない運動をしている場合は，運動を記述するのに空間変数と時間変数がともに必要となり，方程式は偏微分方程式となる．ここでは代表例として弦の振動の方程式を立ててみよう．両端を固定された弦が変形を受け，張力だけを復元力として運動を始める状況を考える．簡単のため，弦の運動は平面内に限られるとし，弦の各部分はその静止時の位置から垂直な方向にのみ変位する，いわゆる横波であるとする．静止時の弦に沿う座標を $0\le x\le 1$ で表し，弦上の点 x の時刻 t での垂直

方向の変位を $u(t,x)$ と置き，弦の微小片 $[x, x+\Delta x]$ の運動方程式を立てよう．弦の線密度を ρ とすれば，この微小片の質量は $\rho\Delta x$ であり，垂直方向の加速度は大略 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)$ に等しい．またこの部分に働く外力は，左右両端において弦の接線方向に働く大きさ T の張力である．いまこの部分の垂直方向の変位が $u(t,x)$ であり，図 1.10 のような位置関係にあるとすれば，その左右両端において弦の接線方向が x 軸となす角をそれぞれ $\theta(t,x), \theta(t,x+\Delta x)$ として，右端における張力の垂直成分は $T\cdot \sin\theta(t,x+\Delta x)$，左端におけるそれは $-T\cdot\sin\theta(t,x)$．従って，変形が微小で θ は十分小さいと仮定し

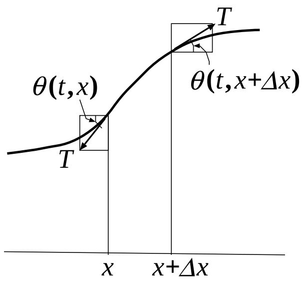


図 1.10

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta \fallingdotseq \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

という近似式を用いれば，この微小片にかかる外力の垂直方向の成分の合計は，ほぼ

$$T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

に等しい．以上により，この微小片に対する Newton の運動方程式として

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x+\Delta x) - T\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

を得る．この両辺を Δx で割り， $\Delta x \to 0$ とすれば，最終的に

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

あるいは

$$c = \sqrt{T/\rho}$$

という定数を導入して

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.20}$$

という方程式が得られる．これを空間一次元の波動方程式と呼ぶ．

波動方程式の解はたくさんあり，それらは何らかの波動現象を記述しているが，その中で時間に関して調和なもの，すなわち

$$u(t,x) = e^{ikt}v(x)$$

の形のものを考える．これは波形が時間とともに進行することなく同じところで周期運動を繰り返す，いわゆる定常波を表している．(調和という名前は単振動のことを調和振動とも呼ぶところから来ている．) これを方程式 (1.20) に代入すると

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v, \quad (\lambda = -\frac{k^2}{c^2}) \tag{1.21}$$

という v の常微分方程式が得られる．さらに弦の両端固定の条件から

$$v(0) = v(1) = 0 \tag{1.22}$$

この二つの条件を満たすような $v \neq 0$ が存在するためには，右辺の λ は勝手ではだめで，ちょうど有限次の正方行列の固有値のようになっている必要がある．こうして，偏微分方程式から，常微分方程式の " 固有値問題 " が生じた．簡単な計算により，このような λ すなわち固有値は $-n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$ で，かつこのときの固有ベクトルに相当するもの（固有函数）は $\sin n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$ であることがわかる．これらはそれぞれ弦の振動が発する原音，倍音等々に相当する．この固有値問題は有限次の対称行列に相当する性質を持ち，固有値はすべて実，かつ対応する固有函数が空間全体を張る．ただし一次結合は無限和の意味でとらねばならない．この意味で一般の函数を表したものが Fourier （正弦）級数である．

問 1.3 微分方程式 (1.21) の一般解

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

に境界条件 (1.22) をあてはめて，上に示した固有値と固有函数を導き出せ．ただし $\lambda < 0$ のときは指数函数は Euler の等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ により適宜三角関数に翻訳するものとする．

この例に限らず，偏微分方程式の研究の手段として常微分方程式の研究が必要になることが多い．

c) 変分問題より導かれる微分方程式

変分問題とは

$$J[u] = \int_a^b f(t, u(t), u'(t))dt \tag{1.23}$$

のように，関数 u に応じて定まる量があるとき，これを最大あるいは最小にするような関数 u を求める問題のことを云う．この J のように関数を変数とする関数のことを汎関数と呼ぶ．関数の集合は一般に無限次元の空間をなすので，汎関数は無限個の独立変数を有する関数であるとも云える．このような問題に対する解法を変分法と呼ぶ．

有限個の独立変数に対する最大最小問題の解法を思い出してこの問題を解くことを試みよう．有限個の独立変数の場合でも最大最小問題をきちんと解くことは結構やっかいである．しかしまず簡単な場合として最大最小が関数の定義域の内点における極値として実現される場合を考え，そのための必要条件を求めるのが普通であろう．この場合にその考えを当てはめると，関数 φ を勝手に選ぶとき， 極小の条件は十分小さい任意の定数 ε に対して

$$J[u + \varepsilon\varphi] \geq J[u] \tag{1.24}$$

となることである．この左辺を ε につき展開しよう．$f(t, x, p)$ の後の二変数に関する Taylor 近似

$$f(t, u(t) + \varepsilon\varphi(t), u'(t) + \varepsilon\varphi'(t)) = f(t, u(t), u'(t)) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t), u'(t))\varphi(t) + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial p}(t, u(t), u'(t))\varphi'(t)$$

を用いると

$$J[u + \varepsilon\varphi] = J[u] + \varepsilon\left\{\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t), u'(t))\varphi(t)dt + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(t, u(t), u'(t))\varphi'(t)dt\right\} + o(\varepsilon) \tag{1.25}$$

となる．ε は任意の符号を取れることから，有限次元のときと同様，(1.24) の成立のためには ε の係数が消えていることが必要である．よって

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t), u'(t))\varphi(t)dt + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(t, u(t), u'(t))\varphi'(t)dt = 0$$

いま φ として積分区間の両端で 0 となるようなものだけを用いることとし，第二項を部分積分すれば，

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(t, u(t), u'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial p}(t, u(t), u'(t)) \right) \right\} \varphi(t) dt = 0 \tag{1.26}$$

となる．ここで積分記号内の t に関する微分は，今まで出てきた偏微分とは異なり，全てを代入した後に残る t の一変数関数を常微分する意であることに注意せよ．普通は $\frac{\partial f}{\partial p}$ のところを単に $\frac{\partial f}{\partial u'}$ 等と記してしまうが，意味が分かってしまえばその方がかえって紛らわしくないので，以下本書でもそのように記そう．

さて (1.24) が任意の φ について成り立つことから

$$\frac{\partial f}{\partial u}(t, u, u') - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u'}(t, u, u') \right) = 0 \tag{1.27}$$

が得られる．なぜなら，もしこの左辺の量が積分区間 $[a, b]$ のある内点で 0 と異なる値を持ったとすると，簡単のためこの量を t の連続関数とすれば，それはこの点のある近傍で符号一定の値を取るから，φ をその近傍に台を持つ非負値の C^1 級関数に取れば，(1.26) の積分値は明らかに 0 でなくなってしまうからである．こうして最初の変分問題から一つの微分方程式 (1.27) が得られた．これを変分問題 (1.23) に対する Euler の方程式と云う．

例として変分法の発端の問題であった Brachistochrone の問題を紹介しよう．これは図 15.10 のように鉛直面内の二点 P,Q を摩擦の無い曲線（話を分かり易くするため滑り台としよう）で結び，質点をこの上で高い方の点 P から自然落下させたとき，それが点 Q に到達する時間が最も短くなるように滑り台の曲線を選べというものである．始めを急な斜面にした方が速度が付いて早く落ちるが，あまり極端にすると低くなってから水平方向の距離を稼ぐのに不利となるから，最適な解が途中にあるはずである．この解を最速降下線と呼ぶ．滑り台の曲線を $y = u(x)$,$0 \le x \le 1$ とし，

$$u(0) = H, \quad u(1) = 0 \tag{1.28}$$

で $H > 0$ は定数として固定されているものとしよう．摩擦が存在しないので，質点の落下は位置エネルギーの運動エネルギーへの完全な変換によって起こり，従って質点が滑り台の上の点 $(x, u(x))$ にあるときは

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H - u(x))$$

質点はこの速度 $v = ds/dt$ を接線方向の速度としてこの曲線に沿って動く．この曲線の接線要素は

$$ds = \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$$

であるから，滑り落ちるのに要する全時間 T は

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{H - u(x)}} dx \tag{1.29}$$

この汎函数を (1.28) の条件の下で最小にせよと云うのが与えられた問題の数学的定式化である．

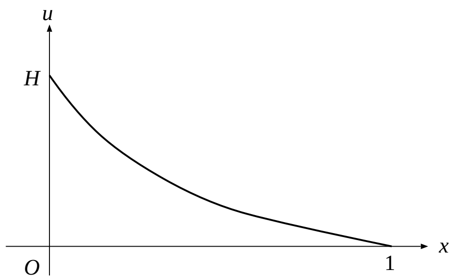


図 1.11

この変分問題の Euler 方程式は，本質的でない定数因子を省略すれば

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{H-u(x)}}\right)-\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{H-u(x)}}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{1+u'^2}}{2\sqrt{H-u}^3}-\frac{u''}{\sqrt{1+u'^2}\sqrt{H-u}}+\frac{u'^2u''}{\sqrt{1+u'^2}^3\sqrt{H-u}}-\frac{u'^2}{2\sqrt{1+u'^2}\sqrt{H-u}^3}=0$$

分母を払って整理すると

$$1+u'^2-2(H-u)u''=0$$

これは

$$\frac{u'}{H-u}=\frac{2u'u''}{1+u'^2}$$

と変形すると積分できて

$$-\log(H-u)=\log(1+u'^2)+C \qquad \therefore\ (H-u)(1+u'^2)=c$$

これを u' につき解けば

$$u'=-\sqrt{\frac{c-H+u}{H-u}}$$

となる．根号に負の方を選んだのは落下するという現象に合わせたのである．この一階微分方程式も

$$-\int\sqrt{\frac{H-u}{c-H+u}}du=\int dx+c'$$

と積分できる．$x=0$ のとき $u=H$ という初期条件を考慮すると

$$\int_H^u\sqrt{\frac{H-u}{c-H+u}}du=x$$

で二つ目の積分定数が確定する．この左辺の積分は二次無理関数の不定積分の典型例に含まれており, 被積分函数を v と置けば有理化できるが，積分した結果の曲線を見やすくするため，置換積分法を用い $H-u=c\sin^2\theta$ と置いてみよう．すると上は

$$\begin{aligned}x&=\int_0^\theta\frac{\sqrt{c}\sin\theta}{\sqrt{c}\cos\theta}2c\sin\theta\cos\theta d\theta\\&=2c\int_0^\theta\sin^2\theta d\theta=c\int_0^\theta(1-\cos2\theta)d\theta=c(\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta)\end{aligned}$$

となる．すなわち，運動の軌跡の曲線は

$$x = \frac{c}{2}(2\theta - \sin 2\theta), \quad y = u(x) = H - c\sin^2\theta = H - \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\cos 2\theta$$

とパラメータ表示されることがわかった．これは（お椀を上に向けた）サイクロイドの方程式である．$c/2$,2θ をそれぞれ c,θ と書き直せば結果の表示は

$$x = c(\theta - \sin\theta), \quad y = H - c + c\cos\theta \tag{1.30}$$

ときれいになる．定数 c の値は使われていないもう一つの境界条件 "$x = 1$ で $y = 0$"から定まる（具体的に求まる訳ではない）．いずれにしても解曲線はサイクロイドの初期位置から，すなわち接線が真下に向かう位置から始まることには変わり無い．

問 1.4 (1.29) を用いて x, y を時刻 t の関数で表せ．

上例の計算では極小の必要条件を計算しただけである．極小の十分条件を述べるには二次の変分を考える必要がある．(一次元の部分空間への制限が必ず極小となっているだけでは不十分なので，(1.25) の展開項を増やしたくらいではだめである．φ と独立にもう一つの " 方向 " ψ をとって議論しなければならない．) 更に，最小値であることを云うには一般にある種の大域的な考察も必要となる．これらについては巻末の参考文献に挙げられた変分法の専門書を見られたい．

さて，変分法の実用的場面としては力学の諸問題の定式化が最も重要である．それらの中には極値でなく，鞍点に相当する停留値にかかわるものもある．いまポテンシャル $V(x)$ を持った一次元の保存力場での質量 m の質点の運動を考える．これは質点に働く力が $-V'(x)$ となることを意味し，単振動の場合の $V = \frac{k}{2}x^2$ を一般化したものである．このとき

$$L(x, x') = \frac{mx'^2}{2} - V(x) \tag{1.31}$$

で Lagrange 関数を導入し

$$S[x] = \int_0^t L(x, \frac{dx}{dt})dt \tag{1.32}$$

という汎関数を考えよう．これを考察中の力学系の仮想された道に沿う " 作用 " と呼ぶ．(一次元だと軌道は常に線分なのでかえってわかりにくいが，作用 S は道 $x(t)$ の汎関数である．) 解析力学の基本的な変分原理は，実現される運動 $x = x(t)$ がこの汎関数の停留点として与えられることを主張する．それはこの変分問題の Euler 方程式がちょうど Newton の運動方程式と一致するからである：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}L(x, x') - \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}L(x, x')\right\} \\ &= -mV'(x) - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \end{aligned}$$

この変分原理の物理的な意味付けはそう初等的ではない．それにこの変分問題の解は常に鞍点であって，極値ではない．これについては後の章で微分形式と関連した説明が与えられるであろう．

三次元空間の運動の場合は x, $\frac{dx}{dt}$ をそれぞれベクトル $\vec{x}$, $\frac{d\vec{x}}{dt}$ で置き換え，また V' を多変数函数の勾配ベクトルを与えるナブラ演算子

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

で置き換えれば同様の議論が成り立ち，Euler 方程式も二階の連立方程式となって Newton の運動方程式が得られる．例えば，二体問題では $V(\vec{x}) = -\gamma/|\vec{x}|$ であり，力の項が $\nabla(\gamma/|\vec{x}|)$ の形をしていることは，運動方程式を積分する過程で有効に利用されていたのである．

次の例は弾性体が外力により変形を受けているときの釣り合いの位置を求める問題である．ここでは棒 $0 \leq x \leq L$ が外力で変形している様子を一次元で表現したものを考える。一次元とは云っても，弦ではなく棒なので，たわみとかねじれなどの三次元的な弾性力も無視できず，従ってそれを一次元に帰着させたものは結構複雑になる．いま，簡単のため棒の変形は垂直方向にのみ起こるとし，棒の変形後の位置を関数 $y = u(x)$ のグラフで表すとき，汎関数

$$S[u] = \int_0^L \left\{ \frac{k}{2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 - fu \right\} dx \tag{1.33}$$

が上で議論した Lagrange 関数に相当するものである．これの変分問題の解が釣り合いの位置を与える．これは最小エネルギーの法則とか仮想仕事の原理とか呼ばれているものであり，仮想的な釣り合いの位置を任意に考え，そこから少し変位させたとき，その変位に伴う内部エネルギー（ここでは弾性の歪みエネルギー）の変化とこの微小変位に際して外力のなす仕事とが釣り合っているような位置を探すものである．

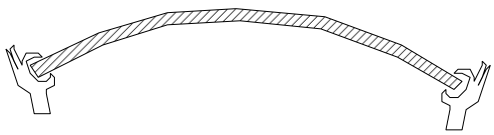


図 1.12

$$\begin{aligned} S[u + \varepsilon\varphi] &= S[u] + \varepsilon \int_0^L \left\{ k \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - f\varphi \right\} dx + o(\varepsilon) \\ &= S[u] + \varepsilon \int_0^L \left\{ k \frac{d^4 u}{dx^4} - f \right\} \varphi dx + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

より，ε の係数 $= 0$ が先と同様にして結論される．特に φ は区間の両端で一階微分も込めて消えているものとして，二回部分積分すれば，Euler 方程式として

$$k \frac{d^4 u}{dx^4} = f \tag{1.34}$$

という 4 階の微分方程式を得る．これを普通

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = a, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = b$$

のような境界条件の下で解く．実際にこれを解くのは容易であろう．この問題の場合も弦の振動の場合のように定常振動や固有値問題を考えることができる．変分法でそれを取り扱うには上で微小片 dx に働く外力 fdx の代わりに加速度から生ずる慣性力 $-\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}dx$ を採ればよい．

上に計算した諸例では Euler 方程式が偶然の幸運で解けてしまったが，一般には Euler 方程式として得られる微分方程式は求積できない方が普通である．微分方程式を導いてもどうせその近似解を計算することになるのなら始めからという訳で，関数空間の適当な基底を用いて汎函数 $J[u]$ を十分多くはあるが有限個の変数の関数で近似し，その極値問題を解く方法が導入された．これを変分法の直接解法と呼ぶ．基底として三角関数を用いれば，これは Fourier 級数を用いた近似計

算法となる．近年は特に，領域を単体分割等で有限個の要素に分け，ある一つの頂点に接する要素にだけ台を持つような区分一次関数や区分多項式を基底として用いる方法が計算機による計算に適合して，応用分野で広く用いられている．これを有限要素法と呼ぶ．

d) 生物科学における例

微分方程式の応用といえば一昔前は物理や工学の専売特許であったが，近頃は生物学や社会科学等に応用されるのも珍しくなくなった．離散的な個体の集まりも，十分多くの標本となれは統計的に連続体として取り扱うことができ，その挙動が微分方程式で近似的に記述できるというのがその考えの根底にある．この起源は Einstein による拡散方程式の導出にあるであろう．考えてみれば先に連続体として取り扱った弦も細かく刻んで行けば離散的な分子の集合となる．希薄な気体の密度の定義においては，微分を計算するときの微小増分 Δx のスケールに対する注意は結構現実的となる．逆にこのように考えれば，恒星の集まりである銀河の運動も希薄気体の運動と同じ偏微分方程式が適用可能となる．

ここでは二種の生物 A,B の生息数の変化を考えてみよう．生物 A は無尽蔵の資源に依拠して自然増加し，生物 B は A を餌として増加するものとする．一般に生物の増加にはいろいろのパターンがあるが，最も基本的なパターンはいわゆるねずみ算方式で，現在量に比例して増えるというものである．ここでは A の場合その比例定数が $\alpha - \beta v$ であるとしよう．これは天敵 B がいなければ基本的にねずみ算式の増加なのだが，B の増加とともに比例定数が一次関数で減少し遂には負となるという意味である．また B の方もその増加率は自分自身の現在量に比例するが，その比例定数は $\gamma u - \delta$ であるとする．これは比例定数が餌 A の増加とともにその一次関数として増加すること，ただし餌の無い状態では増加率は負であることを意味している．式で表すと

$$\frac{du}{dt} = u(\alpha - \beta v), \quad \frac{dv}{dt} = v(\gamma u - \delta) \tag{1.35}$$

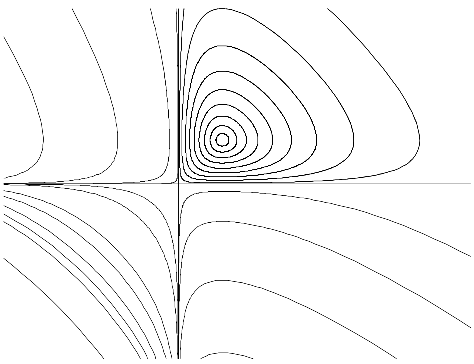


図 1.13

これを捕食系の方程式という．この連立方程式は，実際には割り算して t を消去し

$$\frac{dv}{du} = \frac{v(\gamma u - \delta)}{u(\alpha - \beta v)}$$

と一階の単独常微分方程式に帰着させて求積できる：

$$\frac{\alpha - \beta v}{v} dv = \frac{\gamma u - \delta}{u} du$$

$$\alpha \log v - \beta v = \gamma u - \delta \log u + C$$

従って

$$v^{\alpha} e^{-\beta v} \cdot u^{\delta} e^{-\gamma u} = c \tag{1.36}$$

という解曲線が得られる．この解は平衡点である定数解 $u = \delta/\gamma, v = \alpha/\beta$ の周りに周期軌道を描く．すなわち，餌が増加すると天敵が増えてこれを減らし，餌が減りすぎると天敵が減り始め，それが適当に減ったところでまた餌の方が増え始めるという変化を無限に繰り返し，同じ相での両者の量は定まっている．アイスランドの無人島ではかつて人間が持ち込んだ羊 $(= B)$ が島の草 $(= A)$ を餌としてもう何百年にもわたってこの方程式で記述された通りの量の変化を繰り返しているそうである．また二種の化学物質の相互反応の中にも同様の方程式で表される周期運動をするものがあり，適当な試薬を用いることにより試験管の中で周期的な色の変化が起こることを観察することができる．

個体数の増加はあまり進むと環境の悪化をもたらし，種が自分自身で増加にブレーキをかけるようになる．このことを考慮したねずみ算の修正版は

$$\frac{dx}{dt} = kx - \gamma x^2 \tag{1.37}$$

という方程式になり，解の関数は始めのうちの指数関数的な増加が途中から次第に鈍ってきて，平衡点である $x = k/\gamma$ に限りなく近づいて行く．この解のグラフが S 字に似ていることから，これを S 字曲線と呼ぶ．方程式 (1.37) はロジスティック方程式と呼ばれる．

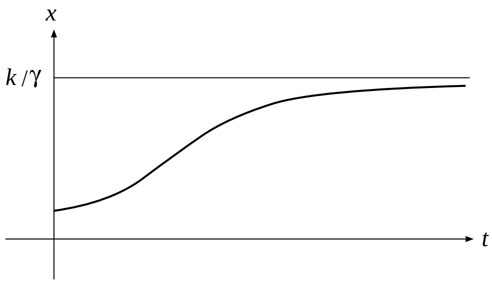


図 1.14

二種の生物の捕食系について各構成員にこの頭打ちの要素を取り込むと，(1.35) は

$$\frac{du}{dt} = u(\alpha - \beta_1 u - \beta_2 v), \quad \frac{dv}{dt} = v(\gamma_1 u - \gamma_2 v - \delta) \tag{1.38}$$

となり，第一象限のすべての軌道は平衡点に向かって収斂してゆくようになる．(1.38) の第二式の定数の符号を少し変えて

$$\frac{du}{dt} = u(\alpha - \beta_1 u - \beta_2 v), \quad \frac{dv}{dt} = v(\delta - \gamma_1 u - \gamma_2 v) \tag{1.38$'$}$$

とすると，今度は競合する二種の生物の生存競争のモデルとなる．現象はずっと複雑になって，平衡点が複数個現れ，一方が死滅してしまうような状況も生じる．

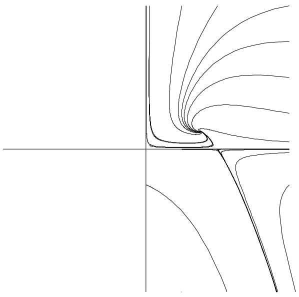


図 1.15a

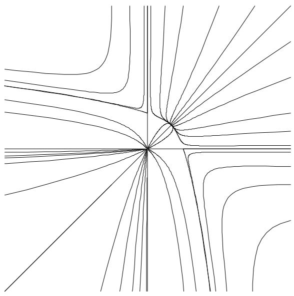


図 1.15b

小さな無人島では餌が無くなっても行き場が無いが，広い大陸だと餌を求めて移動できるので現象はより複雑で面白いものとなる．方程式としては位置の座標が加わり，それに関する Laplace 作用素が拡散を表す項として現れる．血管や製造工場の管の中などを流れる化学物質の反応変化，あるいは自然の水系における公害物質の生成拡散などでは，これに更に流体の運動に関する項が加わる．興味の有る読者はこの方面の参考書を見られたい．それらにはもっといろいろな増加や変化のパターンについても書かれている．

この章の参考書

[1] 佐藤總夫『自然の数理と社会の数理』上下，日本評論社，1984, 1987

[2] D. バージェス，M. ボリー（垣田高夫・大町比佐栄訳）『微分方程式で数学モデルを作ろう』，日本評論社，1990

[3] 数学セミナー増刊『数学・物理 100 の方程式』，日本評論社，1989