微分方程式論・応用微分方程式特論レポート問題 No.1

これから続々とレポート問題を出します．そのうちやさしい問題も現れますのでご安心ください．

☆ ３年生で単位を欲しい人は半年のうちに少なくとも１題解きましょう．

☆ ４年生で単位を欲しい人は半年のうちに少なくとも２題解きましょう．

☆ 院生で単位を欲しい人は半年のうちに少なくとも３題解きましょう．

☆ 院生で応用微分方程式特論演習の単位も欲しい人は半年のうちに少なくとも５題解きましょう．

☆ 本気で微分方程式論の勉強をしたい人は全部解きましょう．分からないところは指導します．

(ただし, いずれも, 最後まで講義に出ていないと, 放棄したものとみなします．出し逃げはいけません．(^^;)

問題 1　1) 振幅が小さいことを仮定しない場合の振子の運動方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

を導け．ここに l は振子の長さ, g は重力の加速度とし, 従属変数 θ は振れ角 (振子が鉛直線と成す角) とする．

2) この運動の周期を積分で表せ．

3) 振幅が比較的小さいとき, 2) で求めた周期の“ガリレオの等時性の法則”からのずれの主要項を示せ．

問題 2　1) 与えられた正規形の 1 階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

の勾配場 (傾きの場) を描く汎用プログラムを C または Fortran で作り, 例として講義で挙げた方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x$ の勾配場を描け．

2) 同じく, ２次元自励系

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

のベクトル場を描く汎用プログラムを作り, 例として講義で見せた

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta_1 x - \beta_2 y), \quad \frac{dy}{dt} = y(\gamma_1 x - \gamma_2 y - \delta)$$

のベクトル場を, 適当に選んだ定数に対して描け．

線分の描画には Xlib の函数を呼び出して用いよ．直接これらの呼び出し方を知らない人は, 1 年生のときに Cygwin とともにインストールした Kerosoft 社の xgrc.c (C 言語用) または xgrf.c (Fortran 用) を用いてもよい．(同じものは僕のホームページのどこかに置いてあります．なお, C 言語の場合は, 藤代先生の Visualcore.c を用いてもよい.)

問題 3　前問の 1) で挙げた方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - x$ について, 微分積分学の技法を駆使して以下の問いに答えよ．

1) この方程式の解曲線 (解のグラフ) は曲線 $y^2 = x$ とぶつかるところで必ず極小となっていることを示せ．

2) この方程式の解曲線の変曲点の軌跡を求めよ．

3) この方程式の $x = 0$ における初期値問題 $y(0) = c$ の解の $x \to \infty$ の挙動に関して, 次の主張を示せ：『有る定数 c_0 が存在し, $c < c_0$ なら解は $-\sqrt{x}$ に漸近し, $c > c_0$ なら解はある有限の x で $+\infty$ に発散してしまう.』

問題 4　(前問の続きであるが, １問にすると重すぎるので二つに分けた)

4) 前問の 3) で示した閾値 c_0 の近似値を数値計算を用いて求めよ．

5) 前問の 3) の $-\sqrt{x}$ に漸近する解について, より精密に, 初期値によらず

$$y = -\sqrt{x} + \frac{1}{4x} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

が成り立つことを示せ．