微分方程式論・応用微分方程式特論レポート問題 No.2

問題 5　万有引力定数 γ は捻れ秤等を用いて地上で測定可能であり, その値は $\gamma = 6.6720 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{sec}^{-2}$ である. また, 地球の公転周期は 365.2422 日, 地球の軌道の長径は $1.496 \times 10^{11}\mathrm{m}$ である. ケプラーの第３法則を導いた式を用い, これらのデータから太陽の質量を概算せよ.

【参考】 地球から太陽までの距離は, ギリシャ時代に既に知られていた. その方法は, 地球から見て月がちょうど半月に見えるとき, 地球-月と月-太陽が直角になるので, このときの地球-月と地球-太陽の成す角 (両者の沈む時間差を 360/24 倍すればわかる) から, 三角法を用いて, 地球-太陽の距離と地球-月の距離の比が求まる. 他方, 後者は, 決まった時間のうちに月が地球の自転により動いた角度を地上から計ると, 理論値が地球中心での角度なのに対し, 観測値は地球表面でのものなので, 地球の半径だけのずれが生ずることを利用して, やはり三角法により地球の半径に対する比として求まる. 最後に, 地球の半径は, 太陽が南中したときに同じ経度上の緯度が異なる二点での太陽の仰角を測定し, 二点間の実測距離から計算できる.

問題 6　次の定数係数２階線型常微分方程式の一般解を求めよ.

1) $y'' + 2y' - 3y = 0.$　2) $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$　3) $y'' + 2y' - 3y = \sin x$

4) $y'' - 2y' + y = 0$　5) $y'' - 2y' + y = e^{x}$　6) $y'' - 2y' + y = x$

問題 7　k を復元力の係数, a を動摩擦係数とする強制減衰振動の方程式

$$y'' = -ky - ay' + Be^{i\omega x}$$

において, 初期値を例えば $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ と指定した解を観察することにより，$\omega^2 + a\omega + k \neq 0$ を満たす外力に対する解から ω を連続的に変化させ, $\omega^2 + a\omega + k = 0$ の場合に近付けたときの解の極限移行の様子を 1) 理論的に, 2) パラメータの値を適当な数値にして, 解のグラフを重ね描きすることにより, 調べよ.

問題 8　次の連立常微分方程式の解空間の基底を求めよ. ただし独立変数を t とせよ.

1) $\begin{cases} x' = 2y - 4z, \\ y' = x + y + 2z, \\ z' = x - y + 4z \end{cases}$　2) $\begin{cases} x' = 3x + 2y - 8z \\ y' = 5x + 6y - 20z \\ z' = 2x + 2y - 7z \end{cases}$　3) $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 4w \\ y' = 2y + z - w \\ z' = -2x + 2y - 3w \\ w' = -2x + 3y - 3w \end{cases}$

問題 9　次の連立常微分方程式の一般解を求めよ.

1) $\begin{cases} x' = 2y - 4z + e^t, \\ y' = x + y + 2z + e^{2t}, \\ z' = x - y + 4z \end{cases}$　2) $\begin{cases} x' = 3x + 2y - 8z + t \\ y' = 5x + 6y - 20z \\ z' = 2x + 2y - 7z + 2t \end{cases}$　3) $\begin{cases} x' = 3x - y + 2z + e^t \\ y' = 2x - y + 7z + e^{2t} \\ z' = x - y + 4z + e^{-t} \end{cases}$

問題 10　常微分方程式 $y'' + y = 0$ の解で, 初期値 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ を満たすものを $S(x)$, 初期値 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ を満たすものを $C(x)$ とする. このとき, 微分方程式の諸性質を用いて以下のことを示せ. (解いてしまって既知の函数の性質を使ってはいけない.)

1) $S'(x) = C(x),\ \ C'(x) = -S(x).$

2) $S(x)^2 + C(x)^2 = 1.$

3) $S(x + 2\pi) = S(x),\ \ C(x + 2\pi) = C(x).$

4) $S(-x) = -S(x),\ \ C(-x) = C(x).$

5) $S(\pi - x) = S(x),\ \ C(\pi - x) = -C(x).$

6) $S(\frac{\pi}{2} - x) = C(x),\ \ C(\frac{\pi}{2} - x) = S(x).$

問題 11　サイクロイド形の山

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

がある. これに山の中腹 $x = 1$ から, 頂上 $x = \pi$ に向けてペタンクの玉を転がす. 玉に働く力は, 重力と動摩擦であるとするとき, 玉をちょうど頂上で停止させるには, どのような初速で玉を放せばよいか？