第2章　定数係数線型微分方程式

この章では定数係数の連立線型微分方程式の解法を与えることを目標とする．ただし，そのための背景として，一般の変数係数の線型系についても基礎となる常識的な事項をまとめて学習する．

2.1　二階線型微分方程式の解

まず始めに，応用上よく出会う正規形の二階実係数線型微分方程式

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

の解の構造について調べよう．(2.1) は非斉次の二階線型微分方程式であるが，これに対応した斉次方程式

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{2.2}$$

が上と密接な関係を持つ．以下簡単のため，係数は $\boldsymbol{R}$ 全体で定義された（実数値）連続関数とするが，これらが実数のある区間だけで定義されている場合の議論も本質的にはそう変わりは無い．y'' に係数がついていても，それが決して 0 にならなければ割り算してこの形に持ち込める．ただし，y'' の係数が 0 となる点は特異点と呼ばれ，そこでは以下の議論が適用できない状況が生ずるので，応用の場合は注意する必要がある．

定理 **2.1**　斉次方程式 (2.2) の解の全体は $\boldsymbol{R}$ 上の二次元の線型空間を成す．従って，その $\boldsymbol{R}$ 上一次独立な二つの解 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ を勝手に取るとき， (2.2) の一般解は，一次結合の係数を任意定数として

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

の形に表される．

非斉次方程式 (2.1) の解の全体は，その特殊解，すなわち一つの解 $\varphi(x)$ を勝手に選ぶとき，それと斉次方程式の解との和の形に表される．すなわち，

$$\varphi(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

が一般解となる．

解の全体が線型空間を成すことは，形式的な計算で確かめられる：

$$\begin{aligned}
&(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x))'' + a(x)(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x))' + b(x)(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) \\
&= c_1\{\varphi_1''(x) + a(x)\varphi_1'(x) + b(x)\varphi_1(x)\} + c_2\{\varphi_2''(x) + a(x)\varphi_2'(x) + b(x)\varphi_2(x)\} \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

あるいは，線型代数で学んだ抽象論を用いれば，解の全体は線型写像

$$\frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x)\cdot : C^1(\boldsymbol{R}) \to C(\boldsymbol{R})$$

の核と考えることもできる．非斉次方程式に二つの解があれば，その差は明らかに斉次方程式の解となる（右辺の $f(x)$ がキャンセルする）から，非斉次方程式の一般解の構造も明らかであろう．

解空間の次元を調べるには，斉次方程式の解に対し初期値

$$y(0), \quad y'(0) \tag{2.3}$$

を対応させることにより定まる，斉次方程式の解の空間 $\mathcal{N}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像

$$A : \mathcal{N} \to \boldsymbol{R}^2 \tag{2.4}$$

を考える．これは明らかに線型写像であり，従ってこれが全単射なら $\mathcal{N}$ の次元はちょうど 2 となる．この写像が全単射であることは，すなわち初期値問題に必ずただ一つの解があることを意味する．これは残念ながら次の章で述べる一般論に依らなければ示すことはできない．(線型の方程式に限れば議論は簡単にはなるが，本質的に逐次近似列の極限として解を得るという思想には変わり無い．）そこでこれは次章までお預けとし，以下これを仮定して進もう．ただし，この章の主題である定数係数の方程式の場合には，これらは以下に述べるように直接示すことができる．

まず，一意性に関連して次のような事実に注意しよう．

補題 2.2　斉次方程式 (2.2) の二つの解　$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ に対し，その Wronski 行列式（ロンスキアン） を

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) := \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

で定義するとき，これは二つの解の選び方には定数倍しか依存しない．また，次はすべて同値となる．

1) $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ は任意の区間において関数として一次独立である．

2) 二つの数ベクトル

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix}$$

はある点 x で一次独立である．

3) 上の二つの数ベクトルはどの点でも一次独立である．

4) $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ はある点 x で 0 と異なる値を取る．

5) $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ はどの点でも 0 と異なる値を取る．

証明 2) と 4), 3) と 5) がそれぞれ同値なことは線型代数の一般論から明らかである．3) ⇒ 2), 5) ⇒ 4) も自明である．二つの解がある区間で一次従属なら，$W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ はそこで明らかに恒等的に 0 となるから，対偶をとって 5) ⇒ 1) もわかる．逆に $W[\varphi_1, \varphi_2](x) \equiv 0$ だと，$\varphi_2(x) \neq 0$ なる部分区間において

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right) = \frac{\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)^2} = \frac{W[\varphi_1.\varphi_2](x)}{\varphi_2(x)^2} \equiv 0$$

$$\therefore \quad \varphi_1(x) = c\varphi_2(x)$$

となり，二つの解はそこで一次従属となる．($\varphi_2(x) \equiv 0$ でももちろんそこで一次従属となる．）よって対偶をとって 1) ⇒ 4) がわかった．よって 4) ⇒ 5) を示せばすべて同値となる．このため $W = W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ の導関数を計算してみよう．行列式の微分公式 (二次ぐらいなら直接確かめ直

すのも難しくはない) を用い，出てきた φ_j の二階微分を方程式を用いて一階以下の微分に書き直せば

$$
\begin{aligned}
\frac{dW}{dx} &= \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ -a(x)\varphi_1'(x) - b(x)\varphi_1(x) & -a(x)\varphi_2'(x) - b(x)\varphi_2(x) \end{vmatrix} = -a(x)\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \\
&= -a(x)W
\end{aligned}
$$

を得る．従って

$$
W = c\exp\left(\int_0^x -a(x)dx\right) \tag{2.6}
$$

この式から，W は恒等的に 0 でなければ決して 0 にならないことが直ちにわかる．W が定数因子以外は方程式の係数 $a(x)$ だけで決まっていることも明らかである．□

ロンスキアンに関する上のような著しい性質は φ_1, φ_2 が微分方程式 (2.2) の解だから成り立つことであって，勝手に持ってきた二つの関数 φ_1, φ_2 に対してはこんなことは期待できない．例えば

$$
\varphi_1(x) = x, \qquad \varphi_2(x) = x^2 \tag{2.7}
$$

ととれば $W[\varphi_1, \varphi_2](x) = x^2$ となり，$x = 0$ 一点だけで 0 になる．逆に二つの関数 φ_1, φ_2 に対して，そのロンスキアン $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ が決して 0 にならなければ，それらの関数はある微分方程式 (2.2) の解の基底となる．実際

$$
\begin{vmatrix} y & \varphi_1 & \varphi_2 \\ y' & \varphi_1' & \varphi_2' \\ y'' & \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix} = 0
$$

という方程式を考えれば，明らかに φ_1, φ_2 を解とする二階線型微分方程式となるが，y'' の係数はちょうど $W[\varphi_1, \varphi_2](x)$ に等しく，従ってこれで割り算すれば (2.2) の形となる．上に挙げた例 (2.7) の場合は，こうして作られる方程式は y'' の係数が $x = 0$ で 0 となる．すなわち，微分方程式が $x = 0$ で特異点を持ってしまう．

斉次線型微分方程式 (2.2) の解空間がちょうど二次元であることは，初期値が $y(0)$, $y'(0)$ の二つしか自由に与えられないことから来ている．実際，係数が微分可能のときは

$$
\begin{aligned}
y''(0) &= -a(0)y'(0) - b(0)y(0), \\
y'''(0) &= -a(0)y''(0) - \{a'(0) + b(0)\}y'(0) - b'(0)y(0)
\end{aligned}
$$

等々と，微分方程式を用いることにより解の原点での高階微分係数の値が (2.3) の二つの値からすべて決まってしまうことからもそのことは想像されよう.（第５章の級数解法参照.）しかしながら，係数が解析関数でないと微分方程式の解は必ずしも解析関数とはならないので，これから解自身が恒等的に 0 と一般的に結論するにはまだギャップがある．

(2.2) のように簡単な方程式なら解の公式があっても良さそうなものだと思われるかもしれないが，残念ながら変数係数の二階線型微分方程式は一般には求積できない．

$$
y'' = x^\alpha y
$$

のように簡単なものでも，α のほとんどの値に対して，解は初等関数では表せない．しかしこのことは逆に，二階の線型方程式が新しい特殊関数を提供する力があることを意味しており，実際

にも多くの重要な高等関数がこうして導入され用いられている．ところで，係数 a, b が定数のときには，次のように良く知られた解の公式がある：

定理 2.3　二階の定数係数線型微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.8}$$

の解の基底は，代数方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.9}$$

の二根の状態に従い次のように選ぶことができる：

1) 二根 α, β が実で互いに異なるとき $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$.

2) 実重根 α を持つとき $e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$.

3) 共役複素根 $\alpha \pm i\beta$ を持つとき $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

証明　いずれの場合においても，これらが一次独立なことは明らかだから，方程式を満たすことを計算で確かめればよい．その計算をここでやるよりも，これらの解を得るための発見的考察を示しておくことの方が重要であろう．それには次の式が基礎となる：

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b\right)e^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}$$

より一般に，$p(\lambda)$ を λ の一変数多項式とするとき

$$p(\frac{d}{dx})e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x} \tag{2.10}$$

という式が成り立つ．作用素 $p(\frac{d}{dx})$ は，上の二次多項式の場合から類推されるように，多項式の変数 λ を形式的に微分記号 $\frac{d}{dx}$ で置き換えて得られるものである．この式から，$e^{\lambda x}$ が (2.8) の解となるためには λ が代数方程式 (2.9) の根であることが必要かつ十分であることが容易に見て取れる．これから 1) の場合が直ちに得られる．実は複素根の場合も

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

を一次独立な解として取っても構わないのだが，それには解空間の係数体を複素数体 $\boldsymbol{C}$ まで拡大し，複素数値の解をすべて考えなければならなくなるので，これらの適当な（複素数体上の）一次結合で，実数値関数となるものを探し出して（あるいは，実部と虚部を取り出して）3) に与えた訳である．重根を持つ場合は，方程式の係数をほんの少し変化させて重根を持たないものとし，その解の基底を

$$e^{\alpha x}, \quad \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{\beta - \alpha}$$

のように選んで $\beta \to \alpha$ の極限を考えれば 2) の第二の解が得られる．方程式の係数を連続的に変化させると対応する解も連続的に変化するという性質は，第 3 章 §3 で一般的に論じるであろう．

我々は実係数の方程式を考えているので，根の分類は上で尽くされていることに注意しよう．さて，上に掲げたものが解空間の基底となること，すなわちこれ以外に一次独立な解はもう存在しないことは，定理 2.1 を仮定すれば出てくるが，定数係数方程式の場合には，それを仮定するまでもなく，ここで得られた解の一次独立系と上の補題を用いると，(2.4) の写像が全単射であることを示すことができる．すなわち，$\mathcal{N}$ は少なくとも 2 次元あることは既に明らかなのだから，(2.4) の写像が単射であることさえ示せば，線型代数の一般論によりそれは同型となる．単射性を示す

ため，斉次方程式 (2.2) の解　$\varphi_1(x)$ について, その初期値 (2.3) が二つとも 0 に等しいとしよう．このときもう一つの解 $\varphi_2(x)$ を 至るところ $\varphi_2(0)\neq 0$ となるように選ぶ（共役複素根の場合にはそのような解は複素数値のものしか無いが，複素数体に係数拡大しておいて単射性を示せばよい.）すると，$W[\varphi_1,\varphi_2](0)=0$ であり，従って上の補題により $W[\varphi_1,\varphi_2](x)\equiv 0$ となるが，更に同補題の証明からそこで $\varphi_1(x)=c\varphi_2(x)$ となることもわかる．ここで $x=0$ とすれば $c=0$ でなければならないことがわかり，結局 $\varphi_1(x)\equiv 0$ となる．以上により上の定理で与えられたものは解空間の基底をなすことがわかる．□

さて，斉次方程式の解空間の基底が知られているときは，それから非斉次方程式の特殊解を求めるアルゴリズムが存在する．これが以下に述べる定数変化法である：

定理 **2.4**　斉次方程式 (2.2) の一次独立な二つの解 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ をとるとき，非斉次方程式 (2.1) の一つの解が

$$\int \frac{1}{W[\varphi_1,\varphi_2](s)}\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s)\\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x)\end{vmatrix} f(s)ds$$

で与えられる．

上の公式は覚えるべきものではない．以下に述べる導き方の方を覚えておくことが大切である．その核心は，斉次方程式の一般解

$$y=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2 \tag{2.11}$$

において，定数であった c_1, c_2 を“変化させて”，すなわち x の関数だと思って，うまい具合に右辺に $f(x)$ が出現するように調節しようというものである．こんなやり方は無数に存在するから，c_1, c_2 がうまく決まるように適当に条件を付ける：

$$y'=c_1\varphi_1'+c_2\varphi_2'+c_1'\varphi_1+c_2'\varphi_2$$

において，

$$c_1'\varphi_1+c_2'\varphi_2\equiv 0 \tag{2.12}$$

と置いてしまう．すると

$$y'=c_1\varphi_1'+c_2\varphi_2' \tag{2.13}$$

$$y''=c_1\varphi_1''+c_2\varphi_2''+c_1'\varphi_1'+c_2'\varphi_2' \tag{2.14}$$

となるが，(2.11), (2.13), (2.14) を (2.1) に代入すると，$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ が斉次方程式の解であったことから c_1, c_2 の項は消え，

$$c_1'\varphi_1'+c_2'\varphi_2'=f \tag{2.15}$$

が残る．よってこれを (2.12) と連立させて解けば，Cramér の公式により

$$c_1'=\frac{1}{W[\varphi_1,\varphi_2]}\begin{vmatrix}0 & \varphi_2\\ f & \varphi_2'\end{vmatrix},\quad c_2'=\frac{1}{W[\varphi_1,\varphi_2]}\begin{vmatrix}\varphi_1 & 0\\ \varphi_1' & f\end{vmatrix}$$

を得るから，これを不定積分して (2.11) に代入し少々計算すれば，定理に示された答が得られる．□

以上をまとめると，定数係数の二階方程式は右辺にどんな関数を与えられても求積法で一般解が求まることがわかる．しかし，右辺が指数関数と多項式の積の形，すなわちいわゆる指数関数多項式の場合には，定数変化法よりももっと簡便な方法がある．それを例を用いて解説しておこう．

例　定数係数の二階微分方程式の代表例として（減衰を伴う）振動の方程式をとる．右辺に振動項が付いたものは，いわゆる強制振動を表す：

$$y'' = -ky - ay' + Be^{i\omega x} \tag{2.16}$$

計算を見やすくするため複素数表記を用いた．実の表現を得たければ最後の段階で両辺の実部をとればよい．代数方程式 $\lambda^2 + a\lambda + k = 0$ の根は $\varDelta = a^2 - 4k < 0$ のとき共役複素根，$\varDelta \geq 0$ のとき実根となってしまう．後者は速度抵抗があまり大きいと振動が起こらないことを意味している．以下振動する場合を考える．強制振動項が付かないものの一般解は

$$c_1 e^{(-a+i\sqrt{\varDelta})x/2} + c_2 e^{(-a-i\sqrt{\varDelta})x/2}$$

であり，これから上に述べた定数変化法で (2.16) の特殊解を得ることができるが，このように右辺が指数関数の場合は，実は右辺の関数の定数倍，あるいは多項式倍の形の解が必ず存在するのである．実際，$y = ce^{i\omega x}$ を (2.16) に代入してみると

$$c(\omega^2 + a\omega + k)e^{i\omega x} = Be^{i\omega x}$$

従って $\omega^2 + a\omega + k \neq 0$ なら $c = B/(\omega^2 + a\omega + k)$ ととれば解が得られる．このときの一般解は

$$y = \frac{B}{\omega^2 + a\omega + k} e^{i\omega x} + c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{\alpha - i\beta)x}$$

となり，強制振動と固有振動とが混ざり合った振動をすることがわかる．$\omega^2 + a\omega + k = 0$ のときは $y = cxe^{i\omega x}$ を (2.16) に代入してみると，$xe^{i\omega x}$ の係数は消え

$$c(2\omega + a)e^{i\omega x} = Be^{i\omega x}$$

が残る．よって $2\omega + a \neq 0$ なら

$$y = \frac{B}{2\omega + a} xe^{i\omega x} \tag{2.17}$$

が一つの解となる．もし $2\omega + a = 0$ なら更に $y = cx^2 e^{i\omega x}$ を考えればよい．さて，速度抵抗が無視できるとき，$a = 0$ で (2.17) の $i\omega = i\sqrt{\varDelta}/2$ は純虚数となり，従ってこの振動は因子 x が利いて振幅を次第に増加させる．これがいわゆる共振現象である．□

問 **2.1**　初期値を例えば $y(0) = 1, y'(0) = 0$ と指定した解を観察することにより，$\omega^2 + a\omega + k \neq 0$ の場合の解から $\omega^2 + a\omega + k = 0$ の場合の解への極限移行の様子を調べよ．

問 **2.2**　減衰振動の場合の共振現象，及び厳密に $\omega^2 + a\omega + k = 0$ ではないがこの値が非常に小さい場合の共振現象を論ぜよ．

問 **2.3**　次の二階線型方程式の一般解を求める．

1) $y'' - y = xe^x + e^{2x}$　　2) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$　　3) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

問 **2.4**　多項式係数の線型微分方程式の特別な形

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \qquad (a, b \;\; \text{は定数})$$

を Euler の方程式と呼ぶ．これは $x = e^t$, すなわち $x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}$ という変換で定数係数の線型微分方程式に帰着できることを示せ．またこの方法で次の方程式の一般解を計算せよ．

1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ 　　2) $x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3$ 　　3) $x^2y'' + xy' + 4y = 1$

この節で述べたことは二階に限らず高階の線型方程式に対してもそのまま成立する．特に，

定理 2.5 　定数係数の方程式

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0 \tag{2.18}$$

の左辺が

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = (\frac{d}{dx} - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\frac{d}{dx} - \lambda_s)^{m_s} y \tag{2.19}$$

と因数分解されるときは，その解の基底は

$$(\frac{d}{dx} - \lambda_j)^{m_j} u = 0, \qquad j = 1, ..., s$$

の解の基底，すなわち

$$e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, ..., x^{m_s - 1}e^{\lambda_j x}, \qquad j = 1, ..., s \tag{2.20}$$

を合わせれば得られる．

実際，これらがもとの方程式の一次独立な $n = \sum_{j=1}^{s} m_j$ 個の解を与えていることは明らかであろう．このような計算法は第６章の演算子法のところで詳述されるであろう．

この節の最後に，斉次線型方程式の解が一つ与えられたときに，それを用いて方程式の階数を一つ下げる方法を紹介しておこう．この方法を使えば，二階の線型方程式は斉次方程式の解が何らかの方法で一つ見つかれば求積できることになる．

補題 2.6 　n 階線型微分方程式

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

に一つの解 $\varphi(x)$ が知られているとき $y = \varphi \int u dx$ と置けば，u の $n-1$ 階線型微分方程式が得られる．

実際，$y = \varphi \int u dx$ とこれを微分して得られる

$$y' = \varphi' \int u dx + \varphi u, \quad y'' = \varphi'' \int u dx + 2\varphi' u + \varphi u', \quad ..., \quad y^{(n)} = \varphi^{(n)} \int u dx + n\varphi^{n-1} u + \cdots + \varphi u^{n-1}$$

を上の方程式に代入すれば，φ が解であったことから $\int u dx$ の係数は消え，残りは u について高々 $n-1$ 階までの導関数を含んだ線型微分方程式となる．

2.2 　行列の指数関数

次節で述べるように, 定数係数の一階連立常微分方程式は行列記号を用いて $\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}$ と書ける. 従ってもし行列の指数函数 e^{xA} で $\frac{d}{dx}e^{xA} = Ae^{xA}$ を満たすようなものが定義できれば, 任意の定数ベクトル $\vec{c}$ に対して $e^{xA}\vec{c}$ は初期条件 $\vec{y}(0) = \vec{c}$ を満たす上の方程式の解となるであろう. この節ではこのための準備として行列の指数函数を定義する.

n 次正方行列 A の指数函数を定義する最も簡単な方法は, 無限級数

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots \tag{2.21}$$

を用いるものである. A の n^2 個の成分をすべて独立変数と思ったとき, この無限級数は有限近似和として得られる行列

$$E_n(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} \tag{2.22}$$

のすべての成分が収束すれば, 行列として収束すると言われる. これは行列の n^2 個の成分を一列に書いておいて $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の点列の収束の定義を適用したものである. n^2 個の成分を一々観察するのは面倒なので普通はこれを行列のノルムというもので代用する. 行列のノルムにはいろいろな定義が有るが, 主なものは

L^2 ノルム. 行列を $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の点とみてその Euclid ノルムを取ったものである：

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \tag{2.23}$$

作用素ノルム. 行列を線型作用素 $A : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ とみて, いわゆる作用素ノルムを計算したものである. これは

$$\|A\| := \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{|A\vec{x}|}{|\vec{x}|} \tag{2.24}$$

で, 写像 A によるベクトルの長さの伸び率の最大値を表す. 作用素ノルムは定義の形から, いろんなものを評価するときの計算に便利だが, 具体的な値を求めにくい欠点が有るので, 本書のような初等的レベルの記述では, L^2 ノルムの方が分かりやすいであろう. よって以下, 行列のノルムとしては専らこちらを使うことにする. 実は L^2 ノルムでも次のように以下の計算に必要となる不等式はちゃんと成り立っている：

補題 2.7　行列ノルム (2.23) は次の諸性質不等式を満たす：

1) $\|A\| \geq 0.\quad \|A\| = 0 \iff A = O$
2) スカラー λ に対し $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$
3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4) $|A\vec{x}| \leq \|A\||\vec{x}|$
5) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

この中で, 1) – 3) はノルムの通常の性質である. 4) は A の作用素としてのノルムが $\|A\|$ 以下であることを示している. 5) は乗法がこのノルムに関して良い連続性を持っていることを示している. これらの不等式の証明は簡単なので, 練習問題とする.

問 2.5　上の補題の不等式を証明せよ.

さて, 当然のことながら, $|a_{ij}| \leq \|A\|$ が成り立つので, 例えば近似和の行列 (2.22) が収束することを示すには, 行列ノルムの意味で Cauchy 列となっていることを言えばよい. 従って, 一般項のノルムが収束することが分かっているある数の級数の一般項で押えられることを示せばよい (いわゆる優級数の方法). ここでは普通の指数函数の Taylor 展開がおあつらえに必要な優級数を提供する：上の補題の性質 5) を繰り返し使うと

$$\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$$

従って, $\|A\| \leq M$ という範囲で, (2.21) は一様収束することが分かる.

n^2 変数と言うのは分かりにくいので, 普通は A を定数行列とし, それにスカラーの変数 x を掛けたものの指数函数

$$e^{xA} = I + xA + \frac{x^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{x^nA^n}{n!} + \cdots \tag{2.25}$$

を考える. これは $|x| \leq M$ で一様に収束する. 実は x は複素数でもよいことは普通のスカラーの指数函数の Taylor 展開のときと同様である. こうして定義した指数函数の x に関する微分も, 普通のスカラーの指数函数の Taylor 展開のときと同様, 項別微分で計算できる. 微分の意味はもちろん成分ごとの微分, すなわち行列を n^2 次元のベクトルとみなしたときの微分である. 項別微分の正当化はスカラーの場合の "冪級数は収束円内で項別に微積分できる" という有名な結果に帰着させて示される.

さて, 行列の指数函数は定義できたが, 実際に計算できなければ実用にならない. 定義により無限級数の和を求めるのは大変なので, 普通は A を標準形に直して計算する. 一般に $S^{-1}AS = B$ という相似変換で

$$e^B = e^{S^{-1}AS} = I + S^{-1}AS + \frac{(S^{-1}AS)^2}{2!} + \cdots + \frac{(S^{-1}AS)^n}{n!} + \cdots$$

ここで $(S^{-1}AS)^n = S^{-1}AS \circ S^{-1}AS \circ \cdots \circ S^{-1}AS = S^{-1}A^nS$ となることに注意すれば, 上は

$$= I + S^{-1}AS + \frac{S^{-1}A^2S}{2!} + \cdots + \frac{S^{-1}A^nS}{n!} + \cdots = S^{-1}\{I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots\}S = S^{-1}e^AS$$

と変形される. よって, e^B の計算が簡単なら, それを用いて $e^A = Se^BS^{-1}$ が計算できる. 特に B が対角型なら

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad e^B = \begin{pmatrix} e_1^\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2^\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e_n^\lambda \end{pmatrix}$$

は定義の級数 (2.21) を直接計算して容易に確かめられるから, 後は行列計算だけで e^A が具体的に求まる. 一般の行列 A は必ずしも対角化できないが, 相似変換で Jordan の標準形と呼ばれる次のような形にできることがよく知られている：

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_s \end{pmatrix}, \qquad ここに\ \ J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

ブロックに分かれた行列の指数函数はブロック毎に計算できる. 微分方程式で使うため, スカラー変数 x を掛けた形で計算すれば,

$$e^{xB} = \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{xJ_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{xJ_s} \end{pmatrix}$$

だから, 各ブロックの指数函数が計算できればよいが,

$$x\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_k & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}\lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_k & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

において, 右辺の第 1 の行列は対角型なので, 第 2 の行列と積が可換である. 一般に非可換な行列に対しては, 指数法則 $e^{A+B} = e^A e^B$ は成り立たないが, 二つの行列が可換なら成り立つことが級数による定義から容易に分かる. その検証は指数函数の Taylor 展開を用いて指数法則が複素数の変数についても成り立つことを示したときと全く同様である. 以上より各ブロックの指数函数は上の右辺の各々について計算したものの積でよい. 一つ目は対角行列でその指数函数はもう計算してあるから, 二つ目だけを計算すればよいが, この形の行列は冪乗すると肩の 1 が順に右上にずれて行き, このブロックのサイズ n_k と同じだけ冪乗すると最後にみんな消えて無くなる, いわゆる冪零行列というものなので, 直接級数で計算しても大した手間ではなく,

$$\begin{aligned}\exp\left\{x\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\right\} &= I + x\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{x^2}{2!}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &\quad + \cdots + \frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2!}\\ \vdots & & \ddots & \ddots & x\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

従って最終的に

$$\exp\left\{x\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_k & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_k x} & xe^{\lambda_k x} & \frac{x^2}{2!}e^{\lambda_k x} & \cdots & \frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!}e^{\lambda_k x}\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2!}e^{\lambda_k x}\\ \vdots & & \ddots & \ddots & xe^{\lambda_k x}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_k x}\end{pmatrix}$$

となる. 最終的な答はこれらを対角ブロックに置いたものとなる.

なお, 当然のことながら, 実行列 A に対しても固有値は複素数となり得るので, 変換行列 S も一般には複素行列である. 従って実用に供するには, 指数函数を計算した最後の答の実部を取り, Euler の等式を用いて虚数の指数函数を三角函数で置き換えることが必要になろう.

問 2.6 次の行列の指数函数を計算せよ.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 5 & 6 & -20 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2.3 一階線型微分方程式系の解

一階の連立線型常微分方程式

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ & \cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{2.26}$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \tag{2.26$'$}$$

は，理論上も応用上も大変大切なものである．他の型の連立線型方程式，例えば n 階単独線型方程式

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

も，

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots,,\ y_n = y^{(n-1)}$$

という置き換えで (2.26) の特別な場合である

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & & -a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

という一階連立方程式に帰着できる．今後一々このように成分表示していてはスペースがもったいないので，普通はベクトルと行列の記号

$$\vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(x) := \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

を導入することにより，(2.26) を

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x) \tag{2.28}$$

のように記す．

(2.26) については次が基本的である：

定理 **2.8**　斉次方程式 $\vec{y}' = A(x)\vec{y}$（すなわち (2.26) で $f_1(x) \equiv \cdots \equiv f_n(x) \equiv 0$ の場合）の解は n 次元の線型空間を成し，解にその初期値を対応させる写像

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

は線型同型となる．解空間の基底

$$\vec{\varphi_1} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\varphi_n} = \begin{pmatrix} \varphi_{1n} \\ \vdots \\ \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

を一つ選び，これらを列ベクトルとして関数の行列 $\Phi(x) = (\varphi_{ij})$ を作れば，$W(x) := \det \Phi(x)$ は一階の微分方程式

$$\frac{d}{dx}W(x) = \mathrm{tr}\, A(x)W(x) \tag{2.29}$$

を満たす．更に，$\Phi(x)$ は可逆で，非斉次方程式の一つの解が

$$\vec{y} = \Phi(x)\int \Phi(x)^{-1} f(x)dx \tag{2.30}$$

で与えられる．

証明　前半は初期値問題の一意可解性を主張したものであるが，これは残念ながら次章の一般論を用いないと証明できない．ただし，定数係数の場合，すなわち a_{ij} がすべて定数の場合には，すぐ後で行列の指数関数を用いた証明を与える．さて，行列式の微分法により

$$\frac{d}{dx}\det\Phi(x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x) & \cdots & \varphi'_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \cdots & \varphi'_{2n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi'_{n1}(x) & \cdots & \varphi'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

ここで，微分された行に (2.26) の対応する方程式（ただし今は $f_j(x) \equiv 0$ ）を代入し，等しい二

行が現れる展開項を省けば，

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}(x)\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + a_{22}(x)\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} \\
&\qquad + \cdots + a_{nn}(x)\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \cdots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \cdots & \varphi_{2n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \cdots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} \\
&= \operatorname{tr} A(x) W(x)
\end{aligned}
$$

を得る．従って

$$W(x) = c\exp\left(\int \operatorname{tr} A(x)dx\right)$$

となり，$W(x)$ はある点，例えば初期値を与える点 $x=0$ で 0 と異なれば，決して 0 にはならない．故に $\Phi(x)$ は至る所可逆である．今，斉次方程式の一般解 $\vec{y}=\Phi(x)\vec{c}$ において，$\vec{c}$ を x の関数だと思い，これを (2.28) に代入して非斉次項を合わせることを試みる（定数変化法）．

$$
\begin{aligned}
\vec{y}' &= \Phi(x)'\vec{c} + \Phi(x)\vec{c}' = A(x)\Phi(x)\vec{c} + \Phi(x)\vec{c}' = A(x)\vec{y} + \Phi(x)\vec{c}' \\
&= A(x)\vec{y} + \vec{f}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \Phi(x)\vec{c}' = \vec{f}, \qquad \vec{c} = \int \Phi(x)^{-1}\vec{f}dx$$

となり，定理に掲げた特殊解が得られる．□

問 2.7　§1 で扱った二階の単独方程式に対する定数変化法の解が，方程式を一階連立系に直して前定理の定数変化法を適用したものと同じ解を与えることを確かめよ.（これにより，先の定数変化法で $c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' = 0$ と置いたことがそれほど恣意的ではなかったことがわかる.）

さて，(2.28) と，あたかも一階の単独線型方程式のように書かれてみると，一階の単独線型方程式の求積法を形式的に適用して，簡単に解けてしまいそうな気がするが，行列の非可換性の問題があるため，いつでもそううまくは行かない．行列関数

$$\Phi(x) = \exp\left\{\int^x A(x)dx\right\}$$

は必ずしも

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = A(x)\Phi(x)$$

を満たさないのである．しかし $A=A(x)$ が定数行列のとき，すなわち定数係数の一階線型系のときは，前節で論じた行列の指数関数 e^{xA} を用いると

$$\frac{d}{dx}e^{xA} = Ae^{xA}$$

を満たすものが得られるから，形式的解法は正当化できる．すなわち (2.28) の両辺に e^{-xA} を掛けると，(2.28) を

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-xA}\vec{y}\right) = e^{-xA}\vec{f}$$

と書き直す操作は正当化される．この両辺を 0 から x まで積分すれば

$$e^{-xA}\vec{y}-\vec{y}(0)=\int_0^x e^{-sA}\vec{f}(s)ds$$

従って初期条件を $\vec{y}(0)=\vec{c}$ と置き，両辺に e^{xA} を掛ければ

$$\vec{y}=e^{xA}\vec{c}+\int_0^x e^{(x-s)A}\vec{f}(s)ds \tag{2.31}$$

という解の公式が得られる．(2.31) の右辺第一項は斉次方程式の初期値問題の解の公式を与えている．このように，初期値問題の解が必然的に (2.31) で表されてしまったので，定数係数の方程式の場合には敢えて次章の一般論を援用せずとも，解がちょうど n 次元の線型空間を成すことが明らかである．$\vec{c}$ を任意定数と思えば，$e^{xA}\vec{c}$ は斉次方程式の一般解を与えてもいる．これは行列 e^{xA} の列ベクトルの一次結合を与える訳だから，従って e^{xA} の列ベクトルが斉次方程式の解空間の基底を与えることもわかる．また (2.31) の第二項は初期値が $\vec{0}$ であるような非斉次方程式の解を与えているが，これは定数変化法が与える特殊解と本質的に同じものである．このように，行列の指数関数さえ計算すれば，定数係数の一階連立系はあっさり解けてしまうのである．

前節で計算した行列の指数関数の形から次のことがわかることに注意しよう．

定理 **2.9**　一階の定数係数線型系の解の基底は（複素数値）指数関数多項式を要素とするベクトルで与えられる．指数関数の指数に現れる係数は係数行列の固有値であり，それに掛かる多項式の最大次数は，対応する固有値に属する Jordan 細胞の最大サイズから 1 を減じたものであり，従って最高でも固有値の重複度から 1 を減じた値を越えない． 特に, 係数行列が対角化可能な場合は多項式は現れない.

問 **2.8**　(2.31) の第二項が前定理の定数変化法による特殊解と同等なものを与えることを確認せよ．

問 **2.9**　定数係数の n 階線型微分方程式 (2.18) を連立化したものの係数行列（(2.27) で a_j が定数のもの）の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & & & \cdots & & & & & 0\\
0 & \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & 0 & \lambda_1 & 0 & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & \lambda_s & 1 & 0 & \cdots & \\
 & & & & & & 0 & \lambda_s & 1 & 0 & \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1\\
0 & & & & & & & & & 0 & \lambda_s
\end{pmatrix}$$

の形であること, すなわち, 各固有値 λ_j に対応する Jordan ブロックのサイズはちょうど λ_j の重複度 m_j に等しいことを示せ.［ヒント：(2.20) に示した解の基底を手がかりとせよ.］

問 **2.10** 次の線型系の一般解を計算せよ.

$$1)\begin{cases} y_1' = y_3 + y_2 - y_1, \\ y_2' = y_3 + y_1 - y_2, \\ y_3' = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} y_1' = y_3 - y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_3 - y_1 \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 - 2y_1 \\ y_3' = 2y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

問 **2.11** 上の線型系のそれぞれについて, 初期条件 $y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = -1$ を満たす解を求める.

行列の指数関数を用いた上の解法は見通しはよいが必ずしも計算量は少なくはない．実用的には初等的な消去法による解法の法が計算が楽な（そしてあまり頭を使わずに済む）ことが多い．例として上の問 2.8 の 1) をとろう．第一の方程式

$$y_1' = y_3 + y_2 - y_1 \tag{2.32}$$

を微分して，出てきた y_2', y_3' に第二，第三の方程式を代入すると

$$y_1'' = y_3' + y_2' - y_1' = -y_1' + 2y_1 + 2y_3 \tag{2.33}$$

これをもう一度微分して同様の代入をすれば

$$y_1''' = -y_1'' + 2y_1' + 2y_3' = -y_1'' + 2y_1' + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \tag{2.34}$$

この三つの式から y_2, y_3 を消去して y_1 の三階単独線型微分方程式を導くことができる：

$$y_1''' + y_1'' - 4y_1' - 4y_1 = 0 \tag{2.35}$$

この解法は §1 の最後の方の定理 2.5 で述べたように，代数方程式

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$$

の三根 $\lambda = 2, -1, -2$ を求めて

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

と求まる．従って

$$y_1' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} - 2c_3 e^{-2x}, \quad y_1'' = 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{-2x}$$

これらを (a), (b) に代入して代数的な連立一次方程式として解くことにより y_2, y_3 を求めれば,

$$y_3 = \frac{1}{2} y_1'' + \frac{1}{2} y_1' - y_1 = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x},$$

$$y_2 = -y_3 + y_1' + y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - c_3 e^{-2x}$$

となる．注意すべき点は得られた y_1 を代入したあと y_2 等を求めるのに積分したりすると，任意定数が増えてしまうということである．極端な場合として，y_1, y_2, y_3 それぞれが満たす単独方程式を導くとすべて (2.35) と同じものが得られ，それらを独立に解けば 9 個の任意定数が出てしまう．しかし実際にはそれらのうちで独立な任意定数は三つだけである．

この章の参考書

[1] 金子晃『昨年度の線型代数講義のレジュメ』 (拡充後にサイエンス社より出版予定)
`http://atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Senkei01/gaiyou.html`