第3章　解の存在定理

3.1　常微分方程式の解の逐次近似

人類は超越数である円周率 π をどのようにして理解してきたのであろうか？多くの文明では，円に内接する正多角形の周長として近似値を求めてきた．殆どの応用では 3.14 だけで十分であるが，和算家は多角形の辺数を増やし，ある種の加速法を用いて π の値を相当の桁数まで求めている．ここでは真の数 π の存在は，それが十進小数の列で限りなく近づけるという事実で納得されている．

上の例には解析の考え方の基本が含まれている．限りなく近づく近似解の列は，いわゆる Cauchy 列であり，そういうものには必ず極限として何かある実在が対応しているはずだというのが完備性の仮定である．この考えを関数の列について理論化したのが関数解析であり，常微分方程式の解の存在を論ずるときにそれが最も原始的な形で現れる．

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.1}$$

の区間 $[0, a]$ 上の解 $y = \varphi(x)$ で，初期条件

$$\varphi(0) = c \tag{3.1$'$}$$

を満たすものを，上のように限りなく近づく近似解の列を構成することにより与えてみよう．列の最初の元 $\varphi_0(x)$ は，初期条件 $\varphi_0(0) = c$ だけを満たすように勝手に取る．一番簡単な選び方をすれば $\varphi_0(x) \equiv c$ でよい．次に，近似列の元が $\varphi_n(x)$ まで定まったとして，これから $\varphi_{n+1}(x)$ を方程式を用いて作り出す．そのような方法はいろいろと考えられるであろうが，基本となる考え方は，方程式に含まれる未知関数 y の一部を残して後は既知の関数 $\varphi_n(x)$ で置き換えてしまう，というものである.（当然のことながら，有用なアルゴリズムを得るためには，最も主要な位置にある y を残すようにしなければならない.）常微分方程式 (3.1) の場合には，この手続きの最も標準的な実現は，右辺の y に $\varphi_n(x)$ を代入し，これから積分により求めた y を近似列の次の項 φ_{n+1} とするものである．すなわち，

$$\varphi_{n+1}(x) = c + \int_0^x f(s, \varphi_n(s))ds \tag{3.2}$$

右辺第一項は，新しい近似解もまた初期条件を満たすようにするためにつけ加えられた．このように一つ前の近似解から更に良い近似解を次々に作り出して行く操作を一般に“逐次近似法”と呼ぶが，(3.2) の近似列の作り方は特に Picard の逐次近似法と呼ばれる．ここで述べた手続きは

$$\varphi(x) = c + \int_0^x f(s, \varphi(s))ds \tag{3.3}$$

という いわゆる“第二種の Volterra 型積分方程式”に対する自然な逐次近似解を与えている．この積分方程式が，少なくともすべての函数を連続と仮定すれば，元の初期値問題 (3.1)-(3.1$'$) と完全に同等であることは直ちに確かめることができるであろう．

もし方程式 (3.1) の右辺が y について簡単に解けるような関数であったら，例えば $y = f(x, y')$ のような方程式であったら，

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x, \varphi_n'(x))$$

のような逐次近似をやりたくなる人もいるであろうが，こちらはそううまくはゆかない．それは，逐次近似が一定の函数に収束して行くためには，近似を一段進める操作がある意味で安定性，あるいは連続性を持っていることが必要で，積分では近似解の少々の狂いが次第に丸められて行くのに対し，微分では狂いがますます増幅されてしまうからである．(上に注意した“最も主要な y を残す”という指針は，このような問題を未然に防ぐ意味合いもある．)

効能書きはそれくらいにして，$f(x, y)$ に適当な条件を課して (3.2) がある一定の函数に一様収束することを示そう．このような条件としてもっとも広く用いられているのは，次の一様 Lipschitz 条件である：函数 $f(x, y)$ が変数 (x, y) のある領域において変数 y につき一様 Lipschitz 条件を満たすとは，定数 K が存在してその領域に属する任意の二点 $(x, y), (x, z)$ に対して

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z| \tag{3.4}$$

という不等式が成り立つことを云う．

定理 3.1 $f(x, y)$ は閉長方形 $\{(x, y); |x| \leq a,\ |y - c| \leq b\}$ で連続で，$|f(x, y)| \leq M$ かつそこで y につき一様に Lipschitz 条件を満たしているとする．このとき，微分方程式の初期値問題 (3.1)-(3.1$'$) は $|x| \leq \min\{a, b/M\}$ でただ一つの解を持つ．更に，$|\varphi_0(x) - c| \leq b$ を満たす任意の $\varphi_0(x)$ から出発し (3.2) で定められる逐次近似列は，上の区間でこの一意解に一様収束する．

証明　解の存在領域を精密化するための定数は話を簡単にするため始めは無視し，まず (3.2) の列 $\{\varphi_n(x)\}$ がある区間で一様収束することを見よう．極限が不明のときに収束を云うには，Cauchy 列になることを云えばよい．今の場合は一様収束が要求されているので，一様 Cauchy 列となることを示さねばならない．このためには普通，次のような評価を求める：

補題 3.2 $\{\varphi_n(x)\}$ はある集合上で定義された関数の列とし，ある収束する正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ が存在してこの集合上で一様に

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \varepsilon_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

が成り立っているとする．このとき $\{\varphi_n(x)\}$ はこの集合上で一様収束する．

この補題は本質的には関数項の級数の収束に関する Weierstrass の M-判定法と同等である．さて，(3.2) と，この番号を $n \mapsto n - 1$ と一つずらしたものとの差を取れば

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = \int_0^x \{f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))\} ds$$

よって仮定の Lipschitz 条件を用いてこれを評価すれば

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\leq \int_0^x |f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))| ds \\ &\leq K \int_0^x |\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| ds \end{aligned}$$

となる．ただし簡単のため $x \geq 0$ とした．$x \leq 0$ のときは右辺に更に絶対値の記号が要るが，計算は本質的に同じである．一方，有界閉区間の上では $|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq C$ なる定数 C が存在することに注意しよう．これに上の漸化不等式を反復適用すれば，順に

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq K \int_0^x |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds \leq CKx,$$

$$|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| \le K\int_0^x |\varphi_2(s)-\varphi_1(s)|ds \le C\frac{K^2x^2}{2!},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \le K\int_0^x |\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)|ds \le K\int_0^x C\frac{K^{n-1}s^{n-1}}{(n-1)!}ds \le C\frac{K^nx^n}{n!}$$

が得られる．従って，$|x| \le a$ とし $\varepsilon_n = CK^na^n/n!$ ととれば，上の補題により $\varphi_n(x)$ は一様収束する．

$\varphi_n(x)$ が一様収束すれば，

$$|f(x,\varphi_n(x)) - f(x,\varphi_m(x))| \le K|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|$$

により $f(x,\varphi_n(x))$ も一様収束する．従って極限と積分は順序交換でき，(3.2) において $n\to\infty$ とすることにより，$\varphi(x)$ が積分方程式 (3.3) を満たすことが分かる．

次に解の一意性を見よう．$x=0$ の近くで初期値問題 (3.1)-(3.1$'$) の，従って積分方程式 (3.3) の解が $y=\varphi(x)$ と $y=\psi(x)$ の二つ存在したとする．このときそれぞれに対する積分方程式 (3.3) を書き下してそれらの差を取れば，

$$\varphi(x)-\psi(x) = \int_0^x \{\varphi(s)-\psi(s)\}ds$$
$$\therefore \quad |\varphi(x)-\psi(x)| \le \int_0^x |\varphi(s)-\psi(s)|ds$$

これから $x=0$ のある近傍で $|\varphi(x)-\psi(x)| \le C$ と仮定して上と同様に反復代入を行うと，同じ近傍上で

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \le C\frac{K^n|x|^n}{n!}$$

が得られる．n は任意であり，左辺の方は今度は n に依らないから，$n\to\infty$ とすれば $|\varphi(x)-\psi(x)|=0$ すなわち $\varphi(x)=\psi(x)$ を得る．

最後に，解の定義域について確認する作業が残っている．実は $\varphi_n(x)$ を $f(x,y)$ に代入して $\varphi_{n+1}(x)$ を定めるためには，$\varphi_n(x)$ の値域が f の定義域の y 変数に関する限界内に収まっていなければならぬ．すなわち

$$|\varphi_n(x)-c| \le b$$

$\varphi_0(x)$ ももちろんそのように選ばねばならないのだが，$\varphi_0(x)\equiv c$ と取ればその点は問題無い．$\varphi_n(x)$ までは大丈夫だとすれば，(3.2) から

$$|\varphi_{n+1}(x)-c| \le \left|\int_0^x |f(s,\varphi_n(s))|ds\right| \le \left|\int_0^x Mds\right| = M|x|$$

この最後の量が b を越えなければ代入は続けられる．つまり $|x|\le b/M$ で近似解の列は妥当に定義される．これから解の存在範囲が少なくとも $|x|\le \min\{a, b/M\}$ で保証されるという訳である．
□

注意　上の定理において，解の存在域，及び一意性の意味について，それぞれ重要な注意がある．まず解の存在域であるが，もし $f(x,y)$ の定義域が変数 y については無制限であるならば，f の値の上界 M は不要であり，解は $|x|\le a$ で存在する．実際，M の値が必要になったのは，逐次近似を進めるための代入の可否を吟味したところだけであった．ただしこれは $f(x,y)$ の定義域が y について制限されていなければ，解はいつでも x 変数の限界まで存在するということを主張

しているのではない．実は一様 Lipschitz 条件の仮定から，$f(x,y)$ は y 変数について高々 y の一次式のオーダーでしか増大し得ないことが容易に分かる：

$$|f(x,y)| \le |f(x,y)-f(x,c)| + |f(x,c)| \le K|y-c| + |f(x,c)|$$

x 変数について大域的な解の存在を保証しているのは，この一様 Lipschitz 条件なのである．例えば，方程式

$$y' = y^2$$

を考えてみよう．これは直ちに求積できて，一般解は

$$y = \frac{1}{c-x}$$

となる．解 $y \equiv 0$ はこの表示には含まれないが，$c = \infty$ に対応すると考えて，一つの特殊解とみなし，第 4 章で導入される特異解とはみなさない．実際，上は

$$y = \frac{c}{1-cx}$$

と書いても良かったわけである．この一般解は， $x=0$ での初期値が 0 のもの，すなわち $y \equiv 0$ 以外は，いずれも x につき存在域が右または左に有限となってしまうことが見て取れるであろう．すなわち，解は“ 有限時間で爆発する ”．この方程式は $a, b > 0$ をどう取っても b が有限でありさえすれば $|x| \le a$, $|y| \le b$ で一様 Lipschitz 条件を満たしている：

$$|y^2 - z^2| \le 2b|y-z| \qquad |y|, |z| \le b \text{ のとき}$$

よって解の存在は，初期値に応じた $x=0$ のある近傍では上の定理により保証されるが，$|x| \le a$ までは必ずしも保証されない．

次に，一意性について考える．上の定理で示したことは，Lipschitz 条件の下では，原点（一般には初期値を与える点）のどんなに小さな近傍においても同じ初期値を持った解は一つしかないということであり，これを局所一意性という．存在定理と異なり，一意性の主張は大域的よりも局所的な方が強い結果となる．例えば，方程式

$$y' = \sqrt{|y|}(1+|y|)$$

は $y=0$ に沿って Lipschitz 条件が満たされておらず，実際にも

$$y = \pm \tan^2\left(\frac{x-c}{2}\right)$$

という，$y=0$ から点 $x=c$ で分岐する解を持つが，この方程式の $-\infty < x < \infty$ 全体で定義された解は $y \equiv 0$ ただ一つである．□

Lipschitz 条件は実は非常に自然な条件である．実際，$f(x)$ が C^1 級ならば，平均値の定理により閉区間 $[a,b]$ 上では

$$|f(x) - f(y)| \le K|x-y|, \qquad K = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

となり，自然に一様 Lipschitz 条件が成立する. 逆は必ずしも成り立たないことは，関数 $f(x) = |x|$ が Lipschitz 条件を満たしていることからわかる．この例から分かるように，Lipschitz 条件とは，ほ

ぼ有界な導関数を有することだと考えられはするが，その場合の導関数は必ずしも Newton-Leibniz の意味のものには収まらない．積分論をやるときには，

$$\frac{d}{dx}|x| = \mathrm{sgn}\ x := \begin{cases} -1 & x < 0 \text{ のとき} \\ 1 & x > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

といった公式を是認した方がかえって便利なのだが，ここではこれ以上立ち入らないことにしよう．

以上の諸注意と定理とから次のことが分かる：

系 3.3 $f(x, y)$ は平面領域 D で定義された関数で，f 自身と $\partial f/\partial y$ はそこで連続とする．このとき D の任意の点 (a, b) において，方程式 $y' = f(x, y)$ の初期条件 $y(a) = b$ を満たす解 $y = y(x)$ が，$x = a$ のある近傍でただ一つ存在する．

問 3.1 関数 $f(x)$ が

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

をある $0 < \alpha < 1$ について満たすとき，f は一様 α-Hölder 連続と呼ばれる．Lipschitz 連続でないが Hölder 連続な関数，及び Hölder 連続でない連続関数の簡単な実例を挙げよ．

問 3.2 von Koch の曲線 ([2] 第 9 章例 9.3) は $\alpha = \dfrac{\log\sqrt{3}}{\log 2}$ に対し一様 α-Hölder 連続なことを示せ．このことから，Lipschitz 条件を離れると事態は急に複雑になることを認識せよ．［ヒント：[2] 第 9 章練習問題 9.6 で Peano 曲線が $\dfrac{1}{2}$-Hölder 連続であることを証明した論法に倣え.］

問 3.3 Lipschitz 条件，あるいは Hölder 条件の不等式がある固定した y について満たされるとき，その関数は点 y において Lipschitz 連続あるいは Hölder 連続と云われる．$f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ の各点で Lipschitz 連続あるいは Hölder 連続でも，それは $[a, b]$ 上で一様 Lipschitz 連続あるいは一様 Hölder 連続とは限らないことを示せ.（ただの連続性の条件の場合，すなわち有界閉集合の上で連続な関数はそこで自動的に一様連続となる（[1], 第 5 章定理 5.12) との違いに注意せよ.）［ヒント：$x \sin\dfrac{1}{x}$ を考えよ.］

このように，一様 Lipschitz 条件は自然ではあるが，この仮定の下ではすべてがうまく行き過ぎて，そのうまく行く根拠がかえってはっきりしない嫌いがある．これに関しては第 6 章で再び論じることとしよう．

3.2 縮小写像の原理

上で用いた逐次近似の原理を抽象化しておくと，いろんな場面で応用が利いて便利である．すなわち，上で用いた連続関数の集合と関数値の上限で計った関数間の距離の対を一般化して，完備な距離空間 X と，そこに働く写像 T を考える．より厳密には，X はただの集合であり，その上で定義された実数値二変数関数 $\mathrm{dis}\,(\cdot,\cdot)$ で次の三条件を満たすものを X の（一つの）距離と呼ぶ：

1) $\mathrm{dis}\,(x, y) \geq 0$,　また　$\mathrm{dis}\,(x, y) = 0 \iff x = y$　（反射律）
2) $\mathrm{dis}\,(x, y) = \mathrm{dis}\,(y, x)$　（対称律）
3) $\mathrm{dis}\,(x, y) + \mathrm{dis}\,(y, z) \geq \mathrm{dis}\,(x, z)$　（三角不等式）

この三条件を距離の公理という．X と $\mathrm{dis}\,(\cdot,\cdot)$ を合わせたもの $(X, \mathrm{dis}\,)$ が距離空間の正式な概念であるが，X 自身を（距離 $\mathrm{dis}\,(\cdot,\cdot)$ が与えられた）距離空間と略称することも多い．本書でも以

下，混乱の恐れが無い限りそうしよう．距離空間の最も基本的な例は，Euclid の距離

$$\mathrm{dis}\,(\vec{x},\vec{y}) := \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

を与えられた n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ である．この例，あるいは他の多くの例に見られるように，X が線型空間の場合の距離は，しばしばあるノルム $\|\cdot\|$ により

$$\mathrm{dis}\,(x,y) = \|x-y\|$$

の形で定義される．しかし距離の方は線型空間の任意の部分集合，例えば球面の上だけに制限して考えても意味を持つことに注意しよう．$\boldsymbol{R}^n$ のノルムの例でも分かるように，一つの X に対してその上の距離は一つではない．いくつかの距離を同時に考えているときは，それを併記して区別しなければならない．

距離空間では，収束点列だけでなく Cauchy 列の概念が意味を持つ．すなわち X の点列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列とは，

$$n,\ m\ \to\ \infty \quad \text{のとき} \quad \mathrm{dis}\,(x_n,x_m)\ \to\ 0$$

となることである．$\{x_n\}$ が収束列とは

$$\exists x \in X, \quad \mathrm{dis}\,(x_n,x)\ \to\ 0$$

となることであり，x は点列 $\{x_n\}$ の極限である．Cauchy 列が必ず収束列となるような距離空間は " 完備 " と云われる．これらに関する議論は微分積分学で習う $\boldsymbol{R}^n$ の場合と同じことである．特に，完備な距離空間 X があるとき，その任意の閉部分集合 Y は，そこに X の距離から自然に定まる距離に関して再び完備距離空間とみなせることに注意しよう．

さて，写像 T は，前節の (3.2) 式の右辺に出てきた積分作用素を一般化するべきものであるが，ここでは前節の例よりも T に対する仮定を強めて，ある正定数 $\lambda < 1$ が存在して

$$\forall x, y \in X \quad \text{に対し} \quad \mathrm{dis}\,(Tx,Ty) \le \lambda \mathrm{dis}\,(x,y) \tag{3.5}$$

が成り立つものとしよう．このような T は " 縮小写像 " と呼ばれる．方程式

$$x = Tx \tag{3.6}$$

の解を写像 T の不動点と呼ぶ．これが積分方程式 (3.3) の解の概念を抽象化したものであることは明らかであろう．次の定理が，前節の議論を抽象化した基本的な結果である：

定理 3.4 (縮小写像の不動点定理)　完備距離空間の縮小写像はただ一つの不動点を持つ．

証明　前節と同様，x_0 を勝手に選び，以下

$$x_{n+1} = Tx_n \tag{3.7}$$

で順に点列 $\{x_n\}$ を定義して行くとき，これが X のある点に収束することを見る．空間の完備性を仮定しているから，$\{x_n\}$ が Cauchy 列となることを示せばよい．$m > n$ として三角不等式を（繰り返し）用いれば

$$\begin{aligned}\mathrm{dis}\,(x_m,x_n) &= \mathrm{dis}\,(T^m x, T^n x)\\ &\le \mathrm{dis}\,(T^m x, T^{m-1}x) + \mathrm{dis}\,(T^{m-1}x, T^{m-2}x) + \cdots + \mathrm{dis}\,(T^{n+1}x, T^n x)\end{aligned}$$

ここで一般に縮小写像の仮定を用いて

$$\mathrm{dis}\,(T^k x, T^k y) \le \lambda \mathrm{dis}\,(T^{k-1}x, T^{k-1}y) \le \cdots \le \lambda^k \mathrm{dis}\,(x,y)$$

が云えることに注意すれば，上より

$$\mathrm{dis}\,(x_m, x_n) \le (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n)\mathrm{dis}\,(Tx, x)$$

が得られる．この括弧内は収束する正項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ の部分和であるから，これより点列 $\{x_n\}$ が距離 dis について Cauchy 列となることがわかる．従って $x_n \to \exists x \in X$.

縮小写像の条件 (3.5) は，写像 T の連続性を包含していることに注意しよう．よって (3.7) において $n \to \infty$ とすれば，極限において (3.6) 式が得られる．つまり T の不動点が一つ見つかった．今，T の不動点 y がこの x 以外にも存在したとすれば，

$$\mathrm{dis}\,(x,y) = \mathrm{dis}\,(Tx, Ty) \le \lambda \mathrm{dis}\,(x,y)$$

$\lambda < 1$ だから，これより $\mathrm{dis}\,(x,y) = 0$，従って $x = y$ となる．すなわち不動点はただ一つである．
□

この証明は前節の微分方程式に対する解の一意存在定理の証明とうり二つであることが見てとれよう．さて今度はこの抽象的定理から前節の結果を導いてみよう．用意する完備距離空間としては，まず区間 $[-a,a]$ 上の連続関数の空間 $C[-a,a]$ に最大値ノルム

$$\|\varphi(x)\| := \max_{x\in[-a,a]} |\varphi(x)|$$

から定まる距離

$$\mathrm{dis}\,(\varphi, \psi) := \|\varphi - \psi\|$$

を入れたものが考えられる．連続関数列の一様収束極限が再び連続関数となるという微積の定理によりこれが完備距離空間となることが直ちに分かる．従ってその閉部分集合

$$X := \{\varphi(x) \in C[-a,a]; |\varphi(x) - c| \le b\}$$

も，一般論により同じ距離で完備距離空間となる．ただし $b \ge Ma$ と仮定する．後の都合を考えると，むしろ

$$X := \{\varphi(x) \in C[-a,a]; |\varphi(x) - c| \le M|x|\}$$

をとる方が都合がよい．写像 T の方は，

$$T\varphi(x) := c + \int_0^x f(s, \varphi(s))ds \tag{3.8}$$

をとるべきことは当然であろう．$f(x,y)$ に対して前節定理と同様の仮定を置けば，この T が上に定めた X からそれ自身への写像となることは容易に見て取れる．しかしこれは必ずしも縮小写像にならないので少し工夫が必要である．この工夫の仕方として主に使われるものに二通り有る．一つは a を小さく取る方法である．具体的には，$a < 1/K$ であれば

$$\begin{aligned}\mathrm{dis}\,(T\varphi, T\psi) &\le \sup_{|x|\le a} \left| \int_0^x f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))ds \right| \le K \sup_{|x|\le a} \left| \int_0^x |\varphi(s) - \psi(s)|ds \right| \\ &\le aK \sup_{|s|\le a} |\varphi(s) - \psi(s)| = aK\mathrm{dis}\,(\varphi, \psi)\end{aligned}$$

従って T は縮小写像となり，上の抽象的定理によりこの区間における解の一意的存在が云える．解の存在を調べるべき区間 $[-a,a]$ がこれよりも大きいとしよう．Lipschitz 定数 K が一定なら，$\delta \le 1/K$ を補助的に取るとき，長さ 2δ の区間 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ がこの区間 $[-a,a]$ 内のどこにあっても，また初期値 y_0 が何であっても，

$$|y_0 - c| \le M|x_0| \quad \text{かつ} \quad |x_0| + \delta \le a \tag{3.9}$$

なる限りは，小長方形

$$\{|x-x_0| \le \delta,\ |y-y_0| \le M\delta\}$$

が f の定義域であるもとの長方形 $\{|x| \le a,\ |y-c| \le b\}$ に含まれることが

$$|y-c| \le |y-y_0| + |y_0-c| \le M\delta + M|x_0| \le b$$

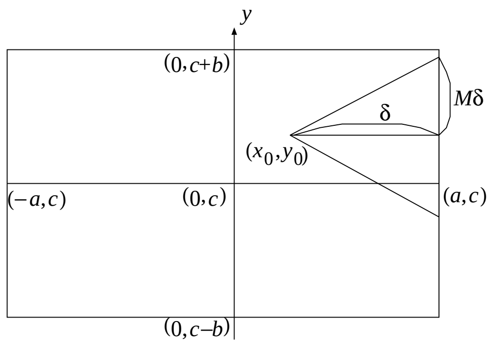

図 3.1

よりわかるから，不動点定理が同様に適用でき，区間 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上で一意な解が得られることに注意しよう．そこで $x=0$ において最初の初期値 c を用いて解いた解から出発し，得られた $[-\delta,\delta]$ 上の解の，区間の端点 $x_0=\delta$ における値 $y_0 = y(\delta)$ を用いて次の区間で初期値問題を解き，以下同様にして次々と解を繋いで行く．この操作を微分方程式の解の延長と呼ぶ．このときに得られる解は，

$$|y-y_0| \le M|x-x_0|$$

を満たしていることが上の議論からわかるから，例えば $x \ge 0$ 方向への延長であれば，新しく付け加わった部分について

$$|y-c| \le |y-y_0| + |y_0-c| \le M(x-x_0) + Mx_0 = Mx, \quad x \ge x_0 \ge 0 \text{ のとき}$$

となり，次の初期値となるべき端での値が再び (3.9) の第一式を満たす．よってこの操作を続けることができ，高々 a/δ 回これを繰り返せば，結局 $x \le \min\{a, b/M\}$ まで解を延長することができる．同様の操作は $x<0$ の側に対しても行うことができ，こうして区間 $|x| \le \min\{a, b/M\}$ 全体で定義された解が得られるという訳である．このようにして得られる解がただ一つしか存在しないことは，初期値問題の解の一意性が局所的に示されていたことから分かる．すなわち，もし解が $\varphi(x), \psi(x)$ と二つ有ったとすれば，それらが最初に分岐し始めたところで，すなわち

$$\inf\{x \ge 0; \varphi(x) \ne \psi(x)\}$$

なる点 x で，解の局所一意性に矛盾する（$x<0$ の方にも同様の議論ができる）．同じ論法で，一般に解の局所的一意性から大域的一意性が云える．

以上の論法はまた，$f(x,y)$ が開長方形 $\{(x,y);|x|<a,\ |y-c|<b\}$ で与えられたときに，定理と同じ仮定の下で $|x|<\min\{a,b/M\}$ で解がただ一つ存在することを示すのにも使える．その場合は $a=\infty$ でも，あるいは $[a,\infty)$ といった区間でも構わないことは明らかであろう．

第二の方法は与えられた区間の上で一度に不動点定理が適用できるように，距離を取り替えることによって (3.8) の T を縮小写像にしてしまおうというものである．このようなことはいつでもできるわけではないが，うまく決まれば気持ちがよい．今の場合は

$$\rho(\varphi,\psi):=\sup_{x\in[-a,a]}|\varphi(x)-\psi(x)|e^{-L|x|}$$

により新しい距離を定義すればよい．この距離は

$$\|\varphi\|'_\infty:=\sup_{x\in[-a,a]}|\varphi(x)|e^{-L|x|}$$

という，重み付き上限ノルムから定まるものであり，この距離の取り替えにより $C[-a,a]$ の位相は変わらない．すなわち，一方の距離で収束する関数列は他方の距離でも収束する．そればかりか，a が有限なら二つの距離は同値である，すなわち，正定数 C_1, C_2 が存在して $\forall\varphi,\psi\in C[-a,a]$ に対し

$$C_1\mathrm{dis}\,(\varphi,\psi)\le\rho(\varphi,\psi)\le C_2\mathrm{dis}\,(\varphi,\psi)$$

が成り立つ.（具体的には $C_1=e^{-La}$, $C_2=1$ でよい.）故に Cauchy 列の概念も共通となり，従って完備性なども元のものと同様に成り立っている．今 $x\ge 0$ とすれば

$$\begin{aligned}|T\varphi(x)-T\psi(x)|e^{-Lx} &\le \int_0^x |f(s,\varphi(s))-f(s,\psi(s))|ds\,e^{-Lx}\\ &\le \int_0^x Ke^{-L(x-s)}ds\sup_{|s|\le a}|\varphi(s)-\psi(s)|e^{-Ls}\\ &\le \frac{K}{L}\sup_{|s|\le a}|\varphi(s)-\psi(s)|e^{-Ls}\end{aligned}$$

従って

$$\rho(T\varphi,T\psi)\le\frac{K}{L}\rho(\varphi,\psi)$$

だから，$L>K$ ならこの新しい距離で T は縮小写像となる．

問 3.4　第三の方法として，不動点定理自身を次のように拡張せよ：X を完備距離空間，T をその上の写像とする．もし正数の列 $\{\lambda_n\}$ で $\sum_{n=1}^\infty\lambda_n<\infty$，かつ，各 $n=1,2,\ldots$ に対して

$$\forall x,y\in X \text{ に対し }\ \mathrm{dis}\,(T^nx,T^ny)\le\lambda_n\mathrm{dis}\,(x,y)$$

を満たすようなものが存在すれば，T は X にただ一つの不動点を有することを示せ．

不動点定理の応用はいろいろある．この段階での重要な応用として，次の節で，一般の高階，あるいは連立の常微分方程式に対する解の存在定理を導くのに用いる．また次の章では逆写像の存在を示すのに用いるであろう．ここでは二三の練習問題を示すにとどめる．

問 3.5　ある風景を写した写真の同じネガからサイズの異なる二枚の写真を焼き付けた．今，小さい方の写真を大きい方の写真の上にはみ出さないように載せたとき，二枚の写真に共通な風景の点がただ一つ存在することを説明せよ．

問 **3.6**　$f(x,y)$ は $\{0 \le x \le a\} \times \boldsymbol{R}$ で x, y につき連続で, かつある正定数 C, K と $p < 1$ について

$$|f(x,y)| \le \frac{C}{|x|^p}(|y|+1), \quad |f(x,y) - f(x,z)| \le \frac{K}{|x|^p}|y-z|$$

を満たすような函数とする. このとき積分方程式

$$\varphi(x) = c + \int_0^x f(t, \varphi(t))dt$$

は $[-a, a]$ 上に連続函数解 φ をただ一つ持つことを示せ.

3.3　一般の常微分方程式に対する解の存在定理

前節で取り扱ったのは非常に簡単な常微分方程式であった．理論の本質はそれでも十分に現れているのだが，常微分方程式を実際の問題に応用しようという場合には，それだけでは心許無いであろう．そこで本節では不動点定理の応用として一般の常微分方程式に対して局所解の一意存在定理を与えておこう．

我々は

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_n), \\ & \cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases} \tag{3.10}$$

という，一階連立常微分方程式を主に取り扱う．ここに，x が独立変数，$y_1, ..., y_n$ が未知関数で，左辺のダッシュは x に関する微分を表す．方程式の個数は未知関数の個数と等しいことに注意しよう．実は常微分方程式の場合には，他の型の方程式も皆この形に帰着できるのである．このことは線型微分方程式については既に第２章で注意したことだが，ここで更に一例として n 階の単独常微分方程式

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3.11}$$

を取ろう．

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ ...,,\ y_n = y^{(n-1)}$$

と置けば，

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ & \cdots\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

という特別な形の一階連立方程式が得られる．逆にこれから $y_2, ..., y_n$ を消去して $y = y_1$ の方程式を導けば (3.11) が得られることは明らかであろう．より一般の高階連立常微分方程式についても状況は同じである．それ故，一般論としては一階連立方程式 (3.10) でやっておけば十分である．

さて，(3.10) を取り扱うための距離空間としては，$[-a, a]$ 上の変数 x の連続関数を要素とする n 成分のベクトルのなす集合

$$X = (C[-a, a])^n$$

あるいはその閉部分集合を考える．ベクトル値関数のノルムを定義するには，まず n-次元ベクトルのノルムとして何を用いるかを決めねばならないが，ここでは計算が簡単な

$$|\vec{y}| := |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \tag{3.12}$$

を用いることにする．すると，関数を要素とする n-ベクトル

$$\vec{f}(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

に対しては，各点毎の値が成す n-ベクトルの長さ $|\vec{f}(x)|$ とともに，更にその $[-a,a]$ 上での上限を取って得られる実数

$$\|\vec{f}\|:=\sup_{x\in[-a,a]}|\vec{f}(x)|=\sup_{x\in[-a,a]}\{|f_1(x)|+\cdots+|f_n(x)|\} \tag{3.14}$$

が考えられる．これを $\vec{f}$ の上限ノルムという．今は有界閉集合上で考えているので，上限を最大値で置き換えても良い．上の量 (3.13) は $\vec{f}$ の各成分毎に関数の上限ノルムを取って得られる実数の n-ベクトルの長さ

$$\|\vec{f}\|':=\left|\begin{pmatrix} \sup\limits_{|x|\le a}|f_1(x)| \\ \vdots \\ \sup\limits_{|x|\le a}|f_n(x)| \end{pmatrix}\right| \tag{3.14$'$}$$

とは一致しないが，ノルムとしては両者は同値になる．実際，

$$\left|\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}\right| \le \left|\begin{pmatrix} \sup\limits_{|x|\le a}|f_1(x)| \\ \vdots \\ \sup\limits_{|x|\le a}|f_n(x)| \end{pmatrix}\right|$$

だから，$\|\vec{f}\|\le\|\vec{f}\|'$ は明らかだが，逆に

$$\begin{aligned}\|\vec{f}\|' &= \sup_{|x|\le a}|f_1(x)|+\cdots+\sup_{|x|\le a}|f_n(x)| \\ &\le n\max\{\sup_{|x|\le a}|f_1(x)|,...,\sup_{|x|\le a}|f_n(x)|\} \\ &\le n\sup_{|x|\le a}(|f_1(x)|+\cdots+|f_n(x)|)=\le n\|\vec{f}\|\end{aligned}$$

も成り立つ．(3.14)$'$ の方で見ると，関数の n-ベクトルの列がこの距離に関して Cauchy 列あるいは収束列であるとは，そのベクトル成分を取って得られる n 個の関数列がいずれも一様 Cauchy 列あるいは一様収束列であることだ，ということが直ちに分かるであろう．従って我々の距離空間 X の完備性も，$C[-a,a]$ の場合のそれから明らかである．

更に，$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルのノルムのところに他の同値なもの，例えば Euclid 的な長さを採用しても，得られるベクトル値関数のノルムはすべて同値となる．従って，以下ノルムは主に (3.14) を用いることにするが，必要に応じて適宜一番便利なものを併用することができる．

問 **3.7**　このことを確かめよ．

以下, 連立方程式 (3.10) の右辺を要素とするベクトル値関数を $\vec{f}(x,\vec{y})$ と略記しよう．すると (3.10) は

$$\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y}) \tag{3.10$'$}$$

と簡単に書ける．さて $\vec{f}(x,\vec{y})$ が $(x,\vec{y})$ のある領域の上で $\vec{y}$ につき一様 Lipschitz 条件を満たすとは，定数 K が存在してこの領域の任意の二点 $(x,\vec{y}),(x,\vec{z})$ に対し

$$|\vec{f}(x,\vec{y})-\vec{f}(x,\vec{z})|\le K|\vec{y}-\vec{z}| \tag{3.15}$$

が成り立つことである．

一様 Lipschitz 条件は，$f(x,\vec{y})$ の $y_j,\ j=1,...,n$ に関する偏導関数が考えている領域で存在して有界なら，この領域に関する若干の幾何学的仮定の下で満たされることが，n 変数関数の平均値定理を用いて示される．例えば有界閉領域か，凸領域なら大丈夫である．凸の仮定は必ずしも必要ではないが，領域が無限に折れ曲がっていたりすると必ずしも偏導関数の有界性から一様 Lipschitz 条件は従わない．応用上はそのような病的な場合が必要となることは無いであろう．

問 3.8　1) D が有界閉領域，あるいは凸領域の場合に，上で述べた主張を確認せよ．

2) D を正方形 $\{0<x<1,\ 0<y<1\}$ から線分 $\{(\frac{1}{n},y);\ 0\le y\le\frac{1}{2}\}$, $n=2,3,4,...$ を除いて得られる領域とする．関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & y>\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\\ (-1)^n(y-\dfrac{1}{2})^2 & y\le\dfrac{1}{2}\ \text{かつ}\ \dfrac{1}{n+1}<x<\dfrac{1}{n}\ \text{のとき}\end{cases}$$

で定めると，f は D で有界連続な偏導関数を持つが，D で一様 Lipschitz 連続ではない．これを確かめよ．

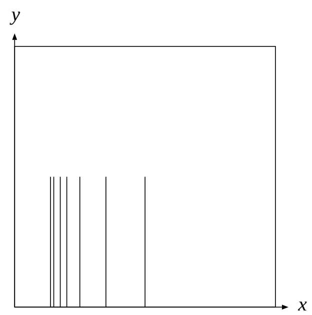

図 3.2

我々の目標は次の定理を示すことである：

定理 3.5　ベクトル値関数 $\vec{f}(x,\vec{y})$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内の閉領域 $|x|\le a,|\vec{y}-\vec{c}|\le b$ で連続で $|f(x,\vec{y})|\le M$，かつ $\vec{y}$ につき一様 Lipschitz 条件 (3.15) を満たしているとする．このとき，連立微分方程式 (3.10) の初期条件

$$\vec{y}=\vec{c}$$

を満たす解が $|x|\le\min\{a,b/M\}$ においてただ一つ存在する．

証明　スカラーの場合と同様，微分方程式を

$$\vec{y}(x)=\vec{c}+\int_0^x\vec{f}(s,\vec{y}(s))ds \tag{3.16}$$

と，積分方程式の形に書き直す．完備距離空間として

$$X=\{\vec{f}\in(C[-a,a])^n;\|\vec{f}-\vec{c}\|\le M\}$$

をとる．右辺の積分作用素が X からそれ自身への写像となるためには，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \vec{f}(s,\vec{y}(s))ds\right| &\leq \left|\int_0^x \{|f_1(s,\vec{y}(s))|+\cdots+|f_n(s,\vec{y}(s))|\}ds\right| \\ &\leq \left|\int_0^x Mds\right| = M|x|\end{aligned}$$

により，$|x|\leq \min\{a,b/M\}$ なら大丈夫である．あとはそこでこの写像が縮小写像となることを見ればよいが，

$$\begin{aligned}|\vec{y}(x)-\vec{z}(x)| &= \left|\int_0^x \{f(s,\vec{y}(s))-f(s,\vec{z}(s))\}ds\right| \\ &\leq \left|\int_0^x |f(s,\vec{y}(s))-f(s,\vec{z}(s))|ds\right| \\ &\leq \left|\int_0^x K|\vec{y}(s)-\vec{z}(s)|ds\right|\end{aligned}$$

だから，スカラー方程式の場合と同様，通常の上限ノルムを用いても $Ka<1$ ならこれは縮小写像となることが示せるし，一般には $L>K$ を採って $e^{-L|x|}$ という重み因子をつけた上限ノルムを用いれば

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\leq a}|\vec{y}(x)-\vec{z}(x)|e^{-L|x|} &\leq \sup_{|x|\leq a}\left|\int_0^x Ke^{-L|x-s|}\cdot|\vec{y}(s)-\vec{z}(s)|e^{-L|s|}ds\right| \\ &\leq \sup_{|x|\leq a}\left|\int_0^x Ke^{-L|x-s|}ds\right|\cdot\sup_{|s|\leq a}|\vec{y}(s)-\vec{z}(s)|e^{-L|s|} \\ &\leq \frac{K}{L}\sup_{|s|\leq a}|\vec{y}(s)-\vec{z}(s)|e^{-L|s|}\end{aligned}$$

より，$|x|\leq\min\{a,b/M\}$ 上で縮小写像となる．□

もちろん，スカラー方程式の場合のように Picard の逐次近似法を直接適用しても良い．このときには

$$\vec{\varphi}_{n+1}(x)=\vec{c}+\int_0^x \vec{f}(s,\vec{\varphi}_n(s))ds$$

から，$\varphi_0(x)\equiv\vec{c}$ ととれば

$$|\vec{\varphi}_1(x)-\vec{\varphi}_0(x)|\leq\sup_{|s|\leq|x|}\left|\int_0^x|\vec{f}(s,\vec{c})|ds\right|$$

$$|\vec{\varphi}_2(x)-\vec{\varphi}_1(x)|\leq\left|\int_0^x K|\vec{\varphi}_1(s)-\vec{\varphi}_0(s)|ds\right|\leq K|x|\sup_{|s|\leq|x|}\left|\int_0^x|\vec{f}(s,\vec{c})|ds\right|$$

$$\begin{aligned}|\vec{\varphi}_{n+1}(x)-\vec{\varphi}_n(x)| &\leq \left|\int_0^x K|\vec{\varphi}_n(s)-\vec{\varphi}_{n-1}(s)|ds\right|\leq\left|\int_0^x\frac{K^{n-1}|s|^{n-1}}{(n-1)!}ds\right|\sup_{|s|\leq|x|}\left|\int_0^x|\vec{f}(s,\vec{c})|ds\right| \\ &\leq\frac{K^n|x|^n}{n!}\sup_{|s|\leq|x|}\left|\int_0^x|\vec{f}(s,\vec{c})|ds\right|\end{aligned}$$

従って

$$|\vec{\varphi}(x)|\leq|\varphi_0(x)|+\sum_{k=0}^{\infty}|\vec{\varphi}_{k+1}(x)-\vec{\varphi}_k(x)|\leq|\vec{c}|+\left|\int_0^x|\vec{f}(s,\vec{c})|ds\right|e^{K|x|} \tag{3.17}$$

という解の大きさの評価も得られる．

Lipschitz 条件が大域的に成立する重要な場合として，線型方程式がある．一階の単独方程式に対してはここで述べたような一般論はあまり意味がないかもしれないが，高階の方程式や連立方程式に対しては，第２章で仮定した変数係数の場合の解の存在や一意性がこの定理により保証されるわけである．方程式の係数が $\boldsymbol{R}$ 全体で定義されているときには，線型方程式は任意の有界閉区間 $[-a,a]$ の上で（$\vec{y}$ については制限のない領域で）$\vec{y}$ につき一様 Lipschitz 条件を満たすことは明らかであろう．従って，係数が必ずしも $\boldsymbol{R}$ 全体で有界でなくても，a を拡げながら解を繋いでゆくことにより，解もまた $\boldsymbol{R}$ 全体で定義されていることが分かる．すなわち，線型方程式の解は，係数が定義されている限り有限時間で爆発することはあり得ない．斉次線型方程式の場合，一様 Lipschitz 条件の定数 K は，もしそれが $\boldsymbol{R}$ 全体で一様にとれるならば，解の増大度の指数の大きさを与える．実際，このとき

$$|\vec{f}(s,\vec{c})| \leq K|\vec{c}-\vec{0}| + |\vec{f}(s,\vec{0})| = K|\vec{c}|$$

となるから，(3.17) を導いた計算から

$$|\vec{\varphi}_{n+1}(x) - \vec{\varphi}_n(x)| \leq \frac{K^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}|\vec{c}|$$

を得，従って (3.17) の代わりに

$$|\vec{\varphi}(x)| \leq |\vec{c}| + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}|\vec{c}| \leq |\vec{c}|e^{K|x|} \tag{3.17$'$}$$

が得られる．実は線型系の場合には，$f(x,\vec{0}) = \vec{0}$ なので，Lipschitz 定数は始めから，係数行列のノルムの上限

$$\sup_{|x|\leq a} \|A(x)\|$$

と一致する．特に，定数係数の場合には係数行列のノルム自身となる．

問 3.9　定数係数の n 元連立線型方程式の場合には，係数行列の固有値の実部の最大値を K とすれば，解は

$$|\vec{y}(x)| \leq C(1+|x|)^{n-1}e^{K|x|}$$

という評価を持つことを示せ．また，これを手がかりとして，固有値の実部の大きさと Lipschitz 定数の関係を調べよ．

3.4　解のパラメータ依存性

前節の最後の議論から, 連立常微分方程式の解が, 決められた有限時間内では初期値に連続に依存することが分かる. この評価法は今後よく使われるので, 補題の形にまとめておこう.

補題 3.6 (Gronwall の補題)　一変数 x の非負値関数 $\varphi(x)$ は $a \leq x \leq b$ で有界, かつそこで

$$\varphi(x) \leq C + K\int_a^x \varphi(t)dt$$

という積分不等式を満たすとする. このとき

$$\varphi(x) \leq Ce^{K(x-a)}$$

が成り立つ.

証明　自分自身に代入すると

$$\varphi(x) \le C + K\int_a^x dt\Big\{C + K\int_a^t \varphi(t_1)dt_1\Big\} = C + CK(x-a) + K\int_a^x dt\int_a^t \varphi(t_1)dt_1$$

これを繰り返すと

$$\begin{aligned}\varphi(x) \quad &\le \quad C + CK(x-a) + C\frac{K^2(x-a)^2}{2!} + \cdots + C\frac{K^n(x-a)^n}{n!} \\ &\qquad + \int_a^x dt\int_a^t \varphi(t_1)dt_1\int_a^{t_1}\varphi(t_2)dt_2\cdots\int_a^{t_{n-1}}\varphi(t_n)dt_n\end{aligned}$$

今, $\varphi(x) \le M$ とすれば, 最後の積分は

$$M\frac{K^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

で押えられる. よって $n \to \infty$ とすれば求める不等式が得られる.

定理 3.7　$n+1$ 変数の関数ベクトル $\vec{f}(x, \vec{y})$ は領域

$$D := \{(x, \vec{y}) \mid |x| \le a, |\vec{y}| \le b\} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$$

で $\vec{y}$ につき一様 Lipschitz 条件

$$|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{z})| \le K|\vec{y} - \vec{z}|$$

を満たしているとする. このとき, 微分方程式 (3.10) の解が D に収まっている限り, 初期値に対する解の連続性が成り立つ. 具体的には, $x = x_0$ における初期値 $\vec{c}$ に対する解を $\vec{y}(x; \vec{c})$ と書くとき

$$|\vec{y}(x, \vec{c}) - \vec{y}(x, \vec{c'})| \le e^{K|x-x_0|}|\vec{c} - \vec{c'}|$$

証明　簡単のため $x \ge x_0$ として説明する. $\vec{y}(x; \vec{c})$ が満たす Volterra 型積分方程式

$$\vec{y}(x; \vec{c}) = \vec{c} + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{y}(t; \vec{c}))dt$$

より

$$\begin{aligned}|\vec{y}(x; \vec{c}) - \vec{y}(x; \vec{c'})| \qquad &\le |\vec{c} - \vec{c'}| + \int_{x_0}^x \left|\vec{f}(t, \vec{y}(t; \vec{c}) - \vec{f}(t, \vec{y}(t; \vec{c'})\right|dt \\ &\le |\vec{c} - \vec{c'}| + K\int_{x_0}^x |\vec{y}(t; \vec{c}) - \vec{y}(t; \vec{c'}|dt\end{aligned}$$

よって $|\vec{y}(x; \vec{c}) - \vec{y}(x; \vec{c'})|$ に Gronwall の補題を適用して

$$|\vec{y}(x; \vec{c}) - \vec{y}(x; \vec{c'})| \le e^{K|x-x_0|}|\vec{c} - \vec{c'}|$$

を得る.

微分方程式にパラメータが含まれているとき, そのパラメータに関する解の連続性も応用上きわめて重要である. これは簡単に初期値に対する連続性の問題に帰着できる：

定理 **3.8**　$\boldsymbol{R}^m$ の部分集合 Λ を動くパラメータ λ を含む $n+1$ 変数の関数ベクトル $\vec{f}(x,\vec{y};\lambda)$ は, D を前定理の領域とするとき $\Lambda\times D\subset\boldsymbol{R}^{m+n+1}$ で $\lambda,x,\vec{y}$ につき連続で, かつ λ と $\vec{y}$ につき一様 Lipschitz 条件

$$|\vec{f}(x,\vec{y};\lambda)-\vec{f}(x,\vec{z};\mu)|\le K(|\vec{y}-\vec{z}|+|\lambda-\mu|)$$

を満たしているとする. このとき, 微分方程式

$$\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y};\lambda) \tag{3.10''}$$

の解 $\vec{y}(x;\lambda)$ が D に収まっている限り, パラメータに対する解の連続性が成り立つ. 具体的には, $x=x_0$ における同一の初期値に対する解を $\vec{y}(x;\lambda)$ と書くとき

$$|\vec{y}(x,\lambda)-\vec{y}(x,\mu)|\le e^{K|x-x_0|}|\lambda-\mu|$$

証明　元の連立方程式を

$$\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y};\lambda),\quad \frac{d\lambda}{dx}=0$$

と, パラメータ λ を未知変数の仲間に入れて書き直す. ただし, 付け加えた方程式からも分かるように, λ は結局定数なので, その初期値の値をそのまま維持するパラメータであることに変わりは無い. しかしこうすると, 初期値に関する連続性の結果が適用でき, 前定理から上の評価式が直ちに得られるという訳である. □

上では, 初期値に対する結果を利用するために, λ を $\vec{y}$ と同等に扱い, このため $\vec{f}$ が λ についても Lipschitz 連続と仮定せねばならなかった. しかし, 実はパラメータに関する解の連続性は $\vec{y}$ についての Lipschitz 連続性すら不要で, 単に解の一意性を抽象的に仮定するだけで成り立つ. 第 7 章参照. ここでは, すぐ後で使うために, 中間的な次の結果を示しておこう.

定理 **3.8′**　$\boldsymbol{R}^m$ の部分集合 Λ を動くパラメータ λ を含む $n+1$ 変数の関数ベクトル $\vec{f}(x,\vec{y};\lambda)$ は, D を前定理の領域とするとき $\Lambda\times D\subset\boldsymbol{R}^{m+n+1}$ で $\lambda,x,\vec{y}$ につき連続で, かつ $\vec{y}$ につき一様 Lipschitz 条件

$$|\vec{f}(x,\vec{y};\lambda)-\vec{f}(x,\vec{z};\lambda)|\le K|\vec{y}-\vec{z}|$$

を満たしているとする. このとき, 微分方程式 (3.10″) の解 $\vec{y}(x;\lambda)$ が D に収まっている限り, パラメータに対する解の連続性が成り立つ. 具体的には, $x=x_0$ における同一の初期値に対する解を $\vec{y}(x;\lambda)$ と書くとき, $|\lambda-\mu|<\delta$ なら

$$|\vec{y}(x,\lambda)-\vec{y}(x,\mu)|\le e^{K|x-x_0|}|x-x_0|\sup_{\{h,\xi\,;\,|h|<\delta,x_0\le\xi\le x\}}|\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\mu);\mu+h)-\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\mu);\mu)|$$

すなわち, 解の λ に関する連続性は, 少なくとも μ を固定したときの函数 $\vec{f}(x,\vec{y}(x;\mu);\lambda)$ の λ に関する連続性と同程度である.

証明　(3.10″) と同値な積分方程式

$$\vec{y}(x;\lambda)=\vec{c}+\int_{x_0}^{x}\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)d\xi$$

を用いて差分を見ると

$$
\begin{aligned}
\vec{y}(x;\lambda)-\vec{y}(x;\mu) &= \int_{x_0}^{x}\{\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)-\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\mu);\mu)\}d\xi \\
&= \int_{x_0}^{x}\{\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)-\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\mu);\lambda)\}d\xi \\
&\qquad +\int_{x_0}^{x}\{\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\mu);\lambda)-\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\mu);\mu)\}d\xi
\end{aligned}
$$

よって $|\lambda-\mu|<\delta$ なら

$$
\begin{aligned}
|\vec{y}(x;\lambda)-\vec{y}(x;\mu)| &\leq \int_{x_0}^{x}K|\vec{y}(\xi;\lambda)-\vec{y}(\xi;\mu)|d\xi \\
&\qquad +|x-x_0|\sup_{\{h,\xi\,;\,|h|<\delta,x_0\leq\xi\leq x\}}|\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\mu);\mu+h)-\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\mu);\mu)|
\end{aligned}
$$

故に Gronwall の補題により定理の不等式が成り立つ. □

応用上は, 微分方程式の右辺はもっと滑らかで, 求める解もそれに応じた滑らかさを要求されることが多い. 独立変数に関する滑らかさは簡単に分かる：

定理 3.9　$n+1$ 変数の関数ベクトル $\vec{f}(x,\vec{y})$ は $D\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ で C^k 級 $(k\geq 1)$ であるとする. このとき, 微分方程式系 (3.10) の解は, 点 $(x,\vec{y})$ が D 内に有る限り, C^{k+1} 級となる.

証明　$\vec{y}(x)$ は元の連立方程式の C^1 級の解であるから, 仮定により $\vec{f}(x,\vec{y})$ は少なくとももう一回微分できる. よって微分方程式 (3.10) から解 $\vec{y}$ が二階微分可能なことが分かり, 方程式の両辺を x について微分すると, 合成函数の微分公式より,

$$
\frac{d^2\vec{y}}{dx^2}=\frac{d}{dx}\vec{f}(x,\vec{y})=\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(x,\vec{y})+\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(x,\vec{y})\cdot\frac{d\vec{y}}{dx}=\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(x,\vec{y})+\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(x,\vec{y})\cdot\vec{f}((x,\vec{y})
$$

となる. $k\geq 2$ なら, この最後の辺はまだ少なくとも一回は x につき微分できる. こうして結局 $\vec{y}$ は $k+1$ 階微分可能で, 結果は x の連続函数となる. □

パラメータに関する微分可能性は最も高級な事実である. ここでは次のことを示しておこう.

定理 3.10　$\boldsymbol{R}^m$ の部分集合 Λ を動くパラメータ λ を含む $n+1$ 変数の関数ベクトル $\vec{f}(x,\vec{y};\lambda)$ は, D を前定理の領域とするとき $\Lambda\times D\subset\boldsymbol{R}^{m+n+1}$ で λ と $\vec{y}$ につき C^k 級とする. このとき, $(3.10'')$ の解が D に収まっている限り, パラメータについても C^k 級となる.

証明　証明の方法は同じなので, 以下簡単のため λ を一変数のように扱おう. 微分方程式系 $(3.10'')$ の両辺を形式的に λ につき偏微分すると,

$$
\frac{d}{dx}\vec{y}_\lambda=\vec{f}_\lambda(x,\vec{y};\lambda)+\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(x,\vec{y};\lambda)\cdot\vec{y}_\lambda
$$

よって, もし解 $\vec{y}$ が λ につき偏微分可能なら, 偏導函数 $\vec{y}_\lambda$ は

$$
\frac{d}{dx}\vec{z}=\vec{f}_\lambda(x,\vec{y};\lambda)+\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(x,\vec{y};\lambda)\cdot\vec{z} \tag{3.18}
$$

という微分方程式系の解 $\vec{z}$ と一致する. (ここでは $\vec{y}$ は既知の函数として扱われていることに注意.) (3.18) を $(3.10'')$ の変分方程式と呼ぶ. さて, $\vec{y}(x;\lambda)$ はまだ λ につき微分できるかどうか不

明なので, この偏導函数の候補を用いて差分商 $\dfrac{\vec{y}(x;\lambda+h)-\vec{y}(x;\lambda)}{h}$ が $h\to 0$ のとき $\vec{z}(x;\lambda)$ に近付くことを示そう. そのため微分方程式を積分方程式に書き直すと, 平均値の定理を用いた初等的な変形で

$$\begin{aligned}
&\frac{\vec{y}(x;\lambda+h)-\vec{y}(x;\lambda)}{h}-\vec{z}(x;\lambda)\\
=\ &\int_{x_0}^{x}\Big\{\frac{\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda+h);\lambda+h)-\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)}{h}\\
&\quad -\vec{f}_\lambda(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda);\lambda)-\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda);\lambda)\cdot\vec{z}(\xi,\lambda)\Big\}d\xi\\
=\ &\int_{x_0}^{x}\Big\{\frac{\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda+h);\lambda+h)-\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda+h);\lambda)}{h}+\frac{\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda+h);\lambda)-\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)}{h}\\
&\quad -\vec{f}_\lambda(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda);\lambda)-\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda);\lambda)\cdot\vec{z}(\xi,\lambda)\Big\}d\xi\\
=\ &\int_{x_0}^{x}\Big\{\vec{f}_\lambda(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda+h);\lambda+\theta h)-\vec{f}_\lambda(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)\\
&\quad +\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda+\theta h);\lambda)\cdot\frac{\vec{y}(\xi;\lambda+h);\lambda)-\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)}{h}-\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda);\lambda)\cdot\vec{z}(\xi,\lambda)\Big\}d\xi\\
=\ &\int_{x_0}^{x}\Big\{\vec{f}_\lambda(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda+h);\lambda+\theta h)-\vec{f}_\lambda(\xi,\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)\\
&\quad +\{\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda+\theta h);\lambda)-\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda);\lambda)\}\cdot\vec{z}(\xi,\lambda)\Big\}d\xi\\
&+\int_{x_0}^{x}\nabla_{\vec{y}}\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi,\lambda+\theta h);\lambda)\cdot\Big(\frac{\vec{y}(\xi;\lambda+h);\lambda)-\vec{y}(\xi;\lambda);\lambda)}{h}-\vec{z}(\xi,\lambda)\Big)d\xi
\end{aligned}$$

ここで最後の辺の第一の積分は, $\vec{y}(\xi,\lambda);\lambda)$ や $\vec{z}(\xi,\lambda)$ が λ につき連続に依存することが既に定理 3.8 から分かっていること, および仮定により $\nabla_{\vec{y}}\vec{f}$, $\vec{f}_\lambda$ が連続なことから, $\forall\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ を十分小さく選べば $|h|<\delta$ のとき $|x-x_0|\varepsilon$ で押えられることが容易に分かるであろう. よって考えている範囲で $|\nabla_{\vec{y}}\vec{f}|\le K$ とすれば, 上から

$$\Big|\frac{\vec{y}(x;\lambda+h)-\vec{y}(x;\lambda)}{h}-\vec{z}(x;\lambda)\Big|\le|x-x_0|\varepsilon+\int_{x_0}^{x}K\Big|\frac{\vec{y}(\xi;\lambda+h)-\vec{y}(\xi;\lambda)}{h}-\vec{z}(\xi;\lambda)\Big|d\xi$$

の形の不等式が得られ, Gronwall の補題より

$$\Big|\frac{\vec{y}(x;\lambda+h)-\vec{y}(x;\lambda)}{h}-\vec{z}(x;\lambda)\Big|\le|x-x_0|\varepsilon e^{K|x-x_0|}$$

が結論される. よって $h\to 0$ のとき $\dfrac{\vec{y}(x;\lambda+h)-\vec{y}(x;\lambda)}{h}\to\vec{z}(x;\lambda)$ が得られた. 後はこの議論を繰り返せばよい. □

さて, 初期値は

$$\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y}),\quad \vec{y}(0)=\vec{c}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{d\vec{z}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{z}+\vec{c}),\quad\vec{z}(0)=0$$

という書き換えで容易にパラメータとして組み込める. このことと以上に述べて来たことから次のような重要な結論が導かれる. これは幾何学への応用などですこぶる役に立つ. 応用では独立変数 x はしばしば時刻 t とみなされる.

系 **3.11**　C^k 級のベクトル値函数 $\vec{f}(x, \vec{y})$ を右辺に持つ微分方程式系 (3.10$'$) の解は, 初期値の集合 D の上で $|x| \leq T$ に対して一斉に解けるとする. このとき解は初期値の集合 D からそれに対応する解の x における値の集合 D_x への C^k 級の位相同型写像の 1-パラメータ族を与える. 具体的に言うと, 各 x ($|x| \leq T$) を固定するごとに

$$T(x) : D \ni \vec{c} \mapsto \vec{y}(x; \vec{c}) \in D_x$$

は C^k 級の可逆な写像を定め, この写像は x とともに C^{k+1} 級の滑らかさで連続的に変化する. 更に, このとき $|x_0| \leq T$ に対し

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{c} \in D_{x_0}$$

という初期値問題の解 $\vec{y}(x; x_0; \vec{c})$ も $|x| \leq T$ で存在し, $T(x; x_0) : D_{x_0} \to D_x$ という C^k 級の同型写像を与える. これらの同型写像の間には群芽の性質

$$T(x; x_1) \circ T(x_1; x_0) = T(x; x_0), \quad \text{すなわち} \quad \vec{y}(x; x_1; \vec{y}(x_1; x_0; \vec{c})) = \vec{y}(x : x_0; \vec{c})$$

が成り立つ. 特に, $T(x; x_0)$ の逆写像は $T(x_0; x)$ で与えられ, $T(x; x_0) = T(x) \circ T(x_0)^{-1}$ となる.

最後の関係は微分方程式を途中まで解き, その結果を初期値としてそこから新たに解いたものと繋げれば, 最初から一気に解いたものと一致するということで, 初期値問題の解の一意性を翻訳したものであるが, これは第 2 章で述べたように種々の加法公式を統一的に導くのに役立つ.

この章の参考書

[1] 金子晃『数理系のための基礎と応用 微分積分 I』, サイエンス社, 2000.

[2] 金子晃『数理系のための基礎と応用 微分積分 II』, サイエンス社, 2001.