

第4章 解の漸近挙動

第1章でも出て来たように、独立変数を時間 t にとった微分方程式系の $t \rightarrow \infty$ のときの解の挙動を調べることは、応用上重要である。この問題は一般には非常に難しく、微分方程式系の研究の中心テーマの一つであるが、本章で基本的なことを学ぼう。本章では独立変数に記号には一貫して t を用いることとする。

4.1 安定性と漸近安定性

一般に解の漸近挙動を調べるのに、まず手がかりとして既知の一つの解のまわりの解がどうなっているかを調べるという方法がある。基準となる解は必ずしもよく分かっている必要は無く、まわりの様子を調べることによって問題とする解自身の研究に役立てたいという場合もある。

定義 4.1 \vec{y} が微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$ の解として安定であるとは、 $\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $\exists \delta > 0$ を適当に選べば、

$$|\vec{x}(0) - \vec{y}(0)| < \delta \implies \forall x \geq 0 \text{ について } |\vec{x}(t) - \vec{y}(t)| < \varepsilon$$

となることである。

\vec{y} が漸近安定であるとは、安定であって更に $\exists \delta > 0$ を適当に選べば、

$$|\vec{x}(0) - \vec{y}(0)| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{x}(t) - \vec{y}(t)| = 0$$

となることである。

\vec{y} が一様漸近安定であるとは、上の収束が初期値について一様なこと、すなわち、 $|\vec{x}(0) - \vec{y}(0)| < \delta$ なる初期値を持つ解 $\vec{x}(t)$ について一斉に、 $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists t_\varepsilon > 0$ を十分に大きく選べば、

$$t \geq t_\varepsilon \implies |\vec{x}(t) - \vec{y}(t)| < \varepsilon$$

となることである。

要するに、ある特定の解が安定とはその解を中心として時間無限大まで初期値に対する解の連続依存性が成り立っているということである。漸近安定とはその上時刻無限大ではすべて同じ値に収束するということである。前章で既に示したように、決められた有限の区間 $[0, T]$ では初期値に対する解の連続依存性は常に成り立っているのだから、上の定義が意味を持つのは時間無限大の近傍だけであり、また初期値を比較する時刻 $t = 0$ を任意の時点 $t = a$ で置き換えても本質は変わらない。

定数係数線型系の場合は Jordan 標準形を用いた一般解の指数関数・多項式による表現から、解の漸近挙動が一通り見て取れ、漸近挙動の研究の基礎となっているので、まずこれを解説しておこう。

指数関数は多項式よりも増加や減少が強いので、 $t^m e^{\lambda t}$ の $t \rightarrow \infty$ のときの様子は、 $\operatorname{Re} \lambda$ の符号でまず決まる。すなわち

$$\operatorname{Re} \lambda > 0 \text{ なら } |t^m e^{\lambda t}| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0 \text{ なら } |t^m e^{\lambda t}| \rightarrow 0$$

虚部 $\text{Im } \lambda$ の符号は、絶対値が増大あるいは減少するとき、複素平面でどちら向きに回転するかを決めるだけで、その意味は副次的である。

さて、同次線型系には零解、すなわち $\vec{y} \equiv 0$ という標準的な解が有る。上の考察はこの特別な手解の安定性を論ずるのに使える：

定理 4.1 定数係数線型系 $\vec{x}' = A\vec{x}$ の係数行列の固有値の実部はすべて負とする。このとき零解は一様に漸近安定である。

証明は上の考察から殆ど明らかであろう。この結果は微小摂動に対して安定である。すなわち、一般の非線型自励系、すなわち、独立変数 t が左辺の微分以外には含まれないような方程式系についても、十分小さな初期値から出発した解に当てはまる：

定理 4.2 微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ において \vec{f} は C^1 級で $\vec{f}(0) = 0$ を満たし、かつ \vec{f} の $\vec{x} = 0$ における微分係数 (Taylor 展開の一次の項の係数より成る行列) は固有値の実部がすべて負であるとす。このとき、解 $\vec{x} = 0$ は漸近安定である。

この定理の証明のために、やや大げさだが次の一般的補題を準備しよう。

定義 4.2 ベクトル場 $\vec{v}(\vec{x})$ に対し、原点のある近傍で定義された C^1 級の非負値関数 $L(\vec{x})$ が Lyapunov 関数¹であるとは、 $L(\vec{x})$ は $\vec{x} = 0$ で狭義の極小値 0 を持ち、かつ

$$\vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla L(\vec{x}) \leq 0 \quad (4.1)$$

が常に成り立つことをいう。また $L(\vec{x})$ が更に原点以外で

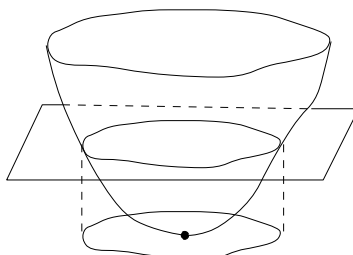
$$\vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla L(\vec{x}) < 0 \quad (4.1')$$

を満たしているときは、強い意味の² Lyapunov 関数と呼ぶことにする。

$L(\vec{x})$ が原点で狭義の極小値 0 を取る連続関数であるという仮定から、各 $\delta > 0$ に対し $D_\delta := \{\vec{x} \in D \mid L(\vec{x}) < \delta\}$ で定義した集合は原点の基本近傍系となる。このことは図から明らかであろうが、厳密に証明しておこう。 D_δ が原点を含む開集合、従って原点の近傍となることは明らかであろう。故に、これの閉包 \overline{D}_δ が $\delta \rightarrow 0$ のとき原点に収縮することを示せばよい。もしある $\varepsilon > 0$ に対し、すべての $\delta > 0$ について \overline{D}_δ がいつまでも $|\vec{x}| \geq \varepsilon$ なる点を含めば、

$$K_\delta := \overline{D}_\delta \cap \{|\vec{x}| \geq \varepsilon\}$$

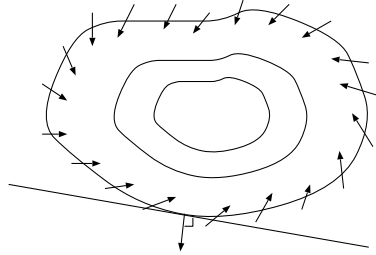
は \mathbf{R}^n の有界閉集合の単調減少族、すなわち $\delta < \delta'$ なら $K_\delta \subset K_{\delta'}$ を満たす集合族となる。よって全体の共通部分 $\bigcap_{\delta > 0} K_\delta$ は空でない。この共通部分に属する点 \vec{x} はすべての D_δ に含まれ、従って $L(\vec{x}) < \delta$ を満たすから、 L の連続性により $L(\vec{x}) = 0$ とならねばならず、従って L が原点で狭義の極小値 0 をとっていたから $\vec{x} = 0$ となるが、他方 $|\vec{x}| \geq \varepsilon$ なので不合理である。以上により、 D_δ は δ を十分小さくすれば球 $|\vec{x}| < \varepsilon$ に収まる。



¹Lyapunov のロシア語綴りは Ли́apunov で、ローマ字では他に Liapounoff などとも綴られる。

²このような L に対する決まった述語は無いようだが、ここでは仮にこう呼んでおく。

勾配ベクトル $\nabla L(\vec{x})$ は L の等値面 $L(\vec{x}) = c$ に垂直に、 L の値が増加する方向に向いているから、Lyapunov 函数の条件 $\vec{f}(\vec{x}) \cdot \nabla L(\vec{x}) \leq 0$ はベクトル場 \vec{f} が L の等値面で常に L の減る向きに向いていることを意味する (図参照). 従ってこのようなベクトル場の積分曲線である解曲線は $L(\vec{x}) < c$ に閉じ込められ、これから安定性が従うのは自然なことであろう. これを厳密な形にしたのが次の補題である:



補題 4.3 $\vec{x} = 0$ のある近傍 D で $\vec{f}(\vec{x})$ に Lyapunov 函数が存在するならば、微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ の零解は安定である. また強い意味の Lyapunov 函数が存在するならば、漸近安定となる.

証明 条件 (4.1) は領域 D 内では微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ の解軌道 $\vec{x}(t)$ に沿う L の微分が常に負であることを意味する:

$$\frac{d}{dt}L(\vec{x}(t)) = \nabla L(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \nabla L(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x}) \leq 0$$

よって十分小さな $\delta > 0$ に対しては常に $D_\delta \subset D$ となり、このときには $\vec{c} \in D_\delta$ なる初期値から出発した解軌道上では $L(\vec{x}(t))$ は単調に減少し、従って解軌道は常に D_δ 内に留まることになる. 以上で安定性がまず言えた.

更に $L(\vec{x})$ が強い意味の Lyapunov 函数のときは漸近安定ともなることは、もしある解が $t \rightarrow \infty$ のとき原点に収束しなければ、ある $\exists \varepsilon > 0$ に対し、解軌道は原点のある近傍に入りこまないの、その上で負値の連続函数 $\nabla L(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x})$ は $\exists \varepsilon > 0$ に対して値が $\leq -\varepsilon$ となるが、すると

$$\frac{d}{dt}L(\vec{x}(t)) \leq -\varepsilon$$

から $t \rightarrow \infty$ のとき $L(\vec{x}(t)) \leq L(\vec{x}(0)) - \varepsilon t \searrow -\infty$ となり、不合理である.

最後に一様漸近安定なことを言おう. もし $\vec{x}(t) \rightarrow 0$ の収束が初期値について一様でないとする、 $\delta > 0$ をどんなに小さく選んでも、ある $\varepsilon > 0$ については、各 N に対し、ある初期値 $\vec{c}_N \in D_\delta$ と単調増加な時間の列 $t_N \geq N$ が存在して $\vec{x}(t_N; \vec{c}_N) \notin D_\varepsilon$ となる. $L(\vec{x}(t; \vec{c}))$ の単調減少性により、実は各 N について

$$t \leq t_N \implies \vec{x}(t; \vec{c}_N) \notin D_\varepsilon$$

となる. D_ε の境界と原点との距離を a としよう. $N \rightarrow \infty$ のとき、 \mathbf{R}^n の有界列 $\{\vec{c}_N\}$ は収束する部分列を持つが、今それを簡単のため同じ記号 $\{\vec{c}_N\}$ で表し、極限を \vec{c} と置こう. 有限時間区間における初期値に対する解の連続依存性により、固定した各 T について N_T を十分大きく選べば、

$$t \leq T, N \geq N_T \implies |\vec{x}(t; \vec{c}) - \vec{x}(t; \vec{c}_N)| < \frac{a}{2}$$

となる. 従って $N \geq N_T, t_N \geq T$ を満たす N を仲介として二つの不等式から

$$t \leq T \implies |\vec{x}(t; \vec{c})| \geq \frac{a}{2}$$

が得られる. T は任意だから, これは $\vec{x}(t, \vec{c})$ が $t \rightarrow \infty$ のとき原点に近付くという, 既に示した事実と反する.

定理 4.2 の証明のために Lyapunov 関数を作ろう. 実行列 A は第 2 章で説明したような Jordan 標準形を持つが, 一般に実固有値 λ がサイズ k の Jordan ブロック

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

を持てば, この部分は

$$(A - \lambda)\vec{u}_k = \vec{u}_{k-1}, (A - \lambda)\vec{u}_{k-1} = \vec{u}_{k-2}, \dots, (A - \lambda)\vec{u}_2 = \vec{u}_1, (A - \lambda)\vec{u}_1 = 0$$

なる $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ を基底として実現されるのであった. ここで, これらの基底を上の関係式の代わりに $\varepsilon > 0$ を用いて

$$(A - \lambda)\vec{u}_k = \varepsilon\vec{u}_{k-1}, (A - \lambda)\vec{u}_{k-1} = \varepsilon\vec{u}_{k-2}, \dots, (A - \lambda)\vec{u}_2 = \varepsilon\vec{u}_1, (A - \lambda)\vec{u}_1 = 0$$

を満たすように取り直すのは容易である. このような基底に対しては Jordan ブロックは

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \varepsilon \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

となることは明らかであろう. またここで λ が複素重複固有値の場合は, 対応する複素一般固有ベクトルを $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$ と置いて $(A - \lambda)\vec{w}_k = \varepsilon\vec{w}_{k-1}$ 等々の実部と虚部を取れば, $\lambda = a + ib$ と置くとき

$$A\vec{u}_k = a\vec{u}_k - b\vec{v}_k + \varepsilon\vec{u}_k, A\vec{v}_k = b\vec{u}_k + a\vec{v}_k + \varepsilon\vec{v}_k$$

等々となる. よって, この部分に対する基底を $\vec{u}_{k-1}, \vec{v}_{k-1}, \vec{u}_k, \vec{v}_k$ ととれば, 対応する標準形の部分は

$$\begin{pmatrix} a & b & \varepsilon & 0 \\ -b & a & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

というパターンが対角線に沿って繰り返された形となる. 従って, 固有値の実部が $\leq -\delta$ とすれば, 上のような標準形を与える実線型座標変換を行った後に, 新座標を同じ \vec{x} で表すことにして

$L(\vec{x}) = \frac{1}{2}|\vec{x}|^2$ と取り, $|x_{j-1}x_j| \leq \frac{1}{2}(x_{j-1}^2 + x_j^2)$ 等に注意すれば, 十分小さな $|\vec{x}|$ に対して

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \nabla L(\vec{x}) &= \sum_{\lambda} \left\{ \sum_{j=1}^{m_{\lambda}-1} \{\lambda x_j^2 + \varepsilon x_j x_{j+1}\} + \lambda x_{m_{\lambda}}^2 \right\} \\ &\quad + \sum_{\lambda=a+ib} \left\{ \sum_{j=1}^{m_{\lambda}-1} \{a(x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2) + \varepsilon(x_{2j-1}x_{2j+1} + x_{2j}x_{2j+2})\} + a(x_{2m_{\lambda}-1}^2 + x_{2m_{\lambda}}^2) \right\} \\ &\quad + o(|\vec{x}|^2) \\ &\leq -\delta|\vec{x}|^2 + \varepsilon|\vec{x}|^2 + \varepsilon|\vec{x}|^2 \leq -(\delta - 2\varepsilon)|\vec{x}|^2 \end{aligned}$$

となるので, L は強い意味の Lyapunov 関数の仮定を満たす.

注意 Jordan 標準形に関する上の考察から, Jordan 標準形の数値計算が誤差に非常に敏感であることが分かる. すなわち, 重複固有値があるときは, 対角線の一つ上にどんなに小さいゴミ ε が加わっても, Jordan ブロックの構造がすっかり変わってしまう.

以上の議論は方程式の右辺に独立変数の t が含まれている場合も有る程度通用する. 自励系の方程式でも, 零解以外の解 $\vec{y}(t)$ の安定性を論ずるときは, $\vec{x} - \vec{y}(t)$ を新しい未知函数として方程式を書き直すと, 新しい右辺には t が含まれるので, このような拡張は意味がある.

定義 4.2' 時間に依存するベクトル場 $\vec{v}(t, \vec{x})$ に対し, $t \geq 0$ と原点のある近傍に属する \vec{x} に対して定義された C^1 級の実値函数 $L(t, \vec{x})$ が Lyapunov 函数であるとは, $L(t, 0) \equiv 0$, $\vec{x} \neq 0$ なら $L(t, \vec{x}) > 0$ を満たし, かつ

$$L_t(t, \vec{x}) + \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot \nabla_{\vec{x}} L(t, \vec{x}) \leq 0 \quad (4.2)$$

が常に成り立つことをいう. また t に依存せず原点以外で 0 にならない非負値連続函数 $a(\vec{x})$ で, $L(t, \vec{x}) \geq a(\vec{x})$ を常に満たすものが有るときは, L を正定値の Lyapunov 函数と呼ぶ. 更に

$$L_t(t, \vec{x}) + \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot \nabla L(t, \vec{x}) < 0 \quad (4.2')$$

を満たしているときは, L を強い意味の Lyapunov 函数と呼ぶことにする. 最後に, t に依存せず原点以外で 0E にならない非負値連続函数 $b(\vec{x})$ で, $L(t, \vec{x}) \leq b(\vec{x})$ を常に満たすものが有るときは, L を一様有界な Lyapunov 函数と呼ぶことにする.

補題 4.3' $\vec{x} = 0$ のある近傍 D で $\vec{f}(t, \vec{x})$ に正定値の Lyapunov 函数が存在するならば, 微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$ の零解は安定である. 正定値かつ強い意味の Lyapunov 函数が存在するならば, 零解は漸近安定となる. また正定値かつ一様有界で強い意味の Lyapunov 函数が存在するならば, 零解は一様漸近安定となる.

証明は先の補題 4.3 と殆ど同様なので, 主な点だけを記そう.

$$\frac{d}{dt} L(t, \vec{x}(t)) = L_t(t, \vec{x}(t)) + \nabla_{\vec{x}} L(t, \vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = L_t(t, \vec{x}(t)) + \nabla L(t, \vec{x}) \cdot \vec{f}(t, \vec{x}) \leq 0$$

なので, L の値が解曲線上で単調減少なことは変わらない. すると正定値の仮定から, $a(\vec{x}(t))$ の値が解曲線上初期値 $L(0, \vec{c})$ の値で抑えられることになり, 軌道はこの有界集合内に収まる. 仮定により $L(0, \vec{c})$ は $|\vec{c}|$ に依存していくらでも小さくなるので, 安定性が示された.

更に $L(t, \vec{x})$ が強い意味の Lyapunov 函数のときは, $L(t, \vec{x}(t))$ の値は狭義単調減少となり, この値が 0 に収束しなければ矛盾となることが先の補題と同様にして言えるので, 解は漸近安定である.

最後に一樣漸近安定なことは, もし $\vec{x}(t) \rightarrow 0$ の収束が初期値について一樣でないとする, 先の証明で用いた D_δ を $b(\vec{x}) < \delta$ で取り替えて同様に議論すれば, ある $\varepsilon > 0$ について, 初期値の列 $\vec{c}_N \in D_\delta$ で, と単調増加な時間の列 $t_N \geq N$ に対し

$$t \leq t_N \implies \vec{x}(t; \vec{c}_N) \notin D_\varepsilon$$

となるものが選べる. $\{\vec{c}_N\}$ の収束部分列とその極限 \vec{c} をとれば, 先と同様にして $a = \text{dis}(0, \partial D_\varepsilon) > 0$ に対し

$$t \leq T \implies |\vec{x}(t; \vec{c})| \geq \frac{a}{2}$$

が得られ, これは $\vec{x}(t, \vec{c})$ が $t \rightarrow \infty$ のとき原点に近付くことに反する.

以上の準備を使うと定理 4.2 は次のように時間を含む場合に一般化できる. 証明は同様な (というか, Lyapunov 函数は前と同じものでそのまま通用する) ので, 省略する.

定理 4.2' 微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$ において \vec{f} は C^1 級で $\vec{f}(t, 0) \equiv 0$ を満たし, かつ $\vec{x} = 0$ において定数行列 A が存在して $\vec{f}(t, \vec{x}) - A\vec{x}$ は t につき一樣に $o(\vec{x})$ となるとする. すなわち, t によらない函数 $g(\vec{x})$ が存在して

$$|\vec{f}(t, \vec{x}) - A\vec{x}| \leq g(\vec{x}), \quad g(\vec{x}) = o(\vec{x})$$

が成り立つとする. もし A の固有値の実部がすべて負ならば, 解 $\vec{x} = 0$ は一樣漸近安定となる.

実部が正の固有値が一つでも含まれていれば, 零解が安定でなくなるのはほとんど自明であろう. 固有値の実部がすべて 0 以下のときは, 対角化可能なら, すなわち一般解に多項式因子が現れなければ定数係数線型系の零解は安定となるが, これを上定理のように非線型摂動した方程式に一般化するのは不可能である. 全く同じ理由で, 実部がちょうど 0 という条件が数値計算で誤差に敏感なことも容易に想像できるであろう. 負の数は少々誤差が加わってもまだ負だが, 0 はどんなに小さな誤差でも, 値を正にも負にもし得るからである. 固有値の実部が 0 の方程式系の代表例として, 単振動の方程式を 1 階連立化したものがあるが, これについては外力が加わったときの方程式の安定性として有名な共鳴現象の問題が有る: 振動の方程式 $x'' + \omega^2 x = 0, \omega > 0$ を $x' = y$ と置いて一階連立化したもの

$$x' = y, \quad y' = -\omega^2 x$$

は純虚数の固有値 $\pm i\omega$ を持ち, 具体的に解いた解は閉軌道の集合となるので, 零解はもちろん安定である. (Lyapunov 函数もエネルギーに当たる $L(x, y) = \omega^2 x^2 + y^2$ で存在する.) しかしこれに微小摂動を加えた $x'' + \varepsilon x' + \omega^2 x = 0$, あるいはそれを連立化した

$$x' = y, \quad y' = -\omega^2 x + \varepsilon y$$

は, $\varepsilon < 0$ なら固有値の実部が負の方に摂動を受け, 減衰振動となって零解が漸近安定となるのに対し, $\varepsilon > 0$ だと, 解は指数的に増大するようになる. また, 右辺に非同次項を追加した方程式

$$x'' + \omega^2 x = ce^{i\mu t}$$

は, 第 2 章 §2.1 の例で計算したように $\mu \neq \omega$ なら解が $e^{\pm\omega t}$ と $e^{i\mu t}$ の一次結合で書けるので, 原点から出発した解は安定であるが, $\mu = \omega$ だといわゆる共鳴が起こり, t の一次のオーダーで増大

する解が生ずる. いずれにしても差が出るのは $t \rightarrow \infty$ のときだけで, 固定した有限時間区間内では, いずれの解も初期値に連続に依存しており, 大した差は無いことに注意せよ.

問 4.1 サイクロイド型の丘の頂上に向かってボールをころがし, ちょうど頂上でボールが停止するような初速度を見出すという問題に関連して, この運動を支配する微分方程式の零解の安定性を用いた解説を与えよ. [サイクロイドの代わりに円周を用いても, 頂上の十分近くでは近似的に同じ 2 階の定数係数線型微分方程式が使える.]

4.2 周期係数の方程式の解の挙動

時間に依存する方程式に対する安定性や漸近安定性の統一的な議論は難しい. 前節で述べた結果も個々の方程式に当てはめると, あまり大した結論を保証してくれないことが多い. 一般論でやるよりは, 個々に研究した方が, すっきりしたよい結果が得られるのが普通である. 例えば, 上の定理 4.2' において, 一次近似の係数行列 A が時間に依存したりするときは, その固有値の実部の正負だけでは解の漸近挙動を一般的に言うことはできない. 例えば, 線型系

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ e^{3t} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の係数行列は明らかに重複固有値 -1 を持つが, この解

$$x = c_1 e^{-t}, \quad y = \frac{1}{3} e_c e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

は殆どの初期値に対して y 座標が限りなく大きくなってしまふ.

例外的に議論がうまくゆく例の一つとして, 周期係数を持つ線型系に対する Floquet の理論を紹介しておこう.

定理 4.4 線型系 $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ において, 係数行列 $A(t)$ は t につき周期 ω の連続な周期函数とする. このとき,

- 1) 解の基本系が成す行列 $\Phi(t)$ に対し,

$$\Phi(t + \omega) = \Phi(t)e^{\omega B} \quad (4.3)$$

を満たす定数行列が存在する.

- 2) $\Psi(t) := \Phi(t)e^{-tB}$ は

$$\frac{d\Psi}{dt} = A(t)\Psi - \Psi B$$

を満たす周期 ω の周期行列となる.

- 3) 未知ベクトルの変換 $\vec{y} = \Psi^{-1}\vec{x}$ により, 方程式は定数係数線型系

$$\vec{y}' = B\vec{y} \quad (4.4)$$

に帰着される.

4) 解の基本系の取り替えにより B は相似変換を受ける. 従って B の固有値は最初の方程式系に固有の不変量である. これを方程式系の固有指数と呼ぶ.

証明 1) 与えられた方程式の周期性により $\Phi(t + \omega)$ も解の基本系となるから, この列ベクトルは $\Phi(t)$ の列ベクトルの一次結合で表され, 従ってある定数行列 M により

$$\Phi(t + \omega) = \Phi(t)M$$

と書ける. $\Phi(t)$ の代わりに基本系 $\Phi(t)S$ で同じ計算をすると,

$$\Phi(t+\omega)S = \Phi(t)MS = \Phi(t)S \cdot S^{-1}MS$$

で, 行列 M は相似変換に変わる. よって M は Jordan 標準形だとしてもさしつかえない. M は正則なので, 対角成分は 0 でない. このような行列は対数関数 $\log M$ の定義が意味を持つ. 実際, 一つの Jordan ブロックに対し,

$$\log \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = (\log \lambda)I + \log \left\{ I + \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 1 & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \right\}$$

ここで二つ目の対数は $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots$ という級数を用いて計算するのだが, x のところに入る行列が冪零なので, 級数は有限項で切れ, 収束を問題にせずに和が計算できる. こうして得られた行列の $1/\omega$ 倍を B と置けば, (4.3) が成り立つ. (ω を括り出した理由は, 時間変数 t の相似変換で B が不変になるようにするためである.)

$S^{-1}e^{\omega B}S = e^{\omega S^{-1}BS}$ なので, 同時に 4) も示された.

2) $\Psi(t)$ が周期行列となることは

$$\Psi(t+\omega) = \Phi(t+\omega)e^{-(t+\omega)B} = \Phi(t)e^{\omega B}e^{-(t+\omega)B} = \Phi(t)e^{\omega B-(t+\omega)B}\Phi(t)e^{-tB} = \Psi(t)$$

より分かる. 微分方程式の検証は

$$\Psi' = \Phi'e^{-tB} + \Phi e^{-tB}(-B) = A(t)\Phi e^{-tB} - \Phi e^{-tB}B = A(t)\Psi - \Psi B$$

3) $\vec{x} = \Psi\vec{y}$ を元の方程式系に代入すると, 2) より

$$\Psi'\vec{y} + \Psi\vec{y}' = A(t)\Psi\vec{y}. \quad \therefore A(t)\Psi\vec{y} - \Psi B\vec{y} + \Psi\vec{y}' = A(t)\Psi\vec{y}$$

これから共通項を消去し Ψ^{-1} を掛けて $\vec{y}' = B\vec{y}$ を得る.

この定理はきれいだが, 残念ながら B を計算するアルゴリズムは存在せず, 結局は方程式を解かねば B は分からない. 以下, この B を用いて周期線型系の解の安定性を論じよう. 基本的には上の定理を用いて前節の定理に帰着させるのである.

定理 4.5 1) 周期係数の線型系 $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ の固有指数の実部がすべて負なら, 零解は一様漸近安定である.

2) $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$ の右辺は連続かつ t につき周期関数で, \vec{x} につき C^1 級とする. この方程式に周期解 $\vec{x}_0(t)$ が存在し, かつ, これを中心とする $\vec{f}(t, \vec{x})$ の Taylor 展開

$$\vec{f}(t, \vec{x}_0 + \vec{z}) = \vec{f}(t, \vec{x}_0) + \nabla_{\vec{x}}\vec{f}(t, \vec{x}_0) \cdot \vec{z} + \vec{g}(t, \vec{z})$$

の剰余項は t につき一様に $\vec{g}(t, \vec{z}) = o(\vec{z})$ となるものとする. もし一次近似 $A(t) := \nabla_{\vec{x}}\vec{f}(t, \vec{x}_0)$ を係数行列とする周期線型系の固有指数の実部がすべて負なら, 周期解 $\vec{x}_0(t)$ は一様漸近安定である.

証明 1) $\vec{y} = \Psi(t)^{-1}\vec{x}$ は定数係数の線型系 (4.4) を満たすから, B の固有値に対する仮定により, \vec{y} に対する零解は一様漸近安定である. $\Psi(t)$ は周期行列, 従って一様に有界だから, $\vec{x} = \Psi(t)\vec{y}$ に対する零解も一様漸近安定である.

2) $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{z}$ と置けば, \vec{x}_0 が元の方程式の解だから

$$\vec{x}_0' + \vec{z}' = \vec{f}(t, \vec{x}) = \vec{f}(t, \vec{x}_0 + \vec{z}) = \vec{f}(t, \vec{x}_0) + \nabla_{\vec{x}} \vec{f}(t, \vec{x}_0) \cdot \vec{z} + \vec{g}(t, \vec{z})$$

より, \vec{z} は

$$\vec{z}' = A(t)\vec{z} + \vec{g}(t, \vec{z}), \quad \text{ここに } A(t) := \nabla_{\vec{x}} \vec{f}(t, \vec{x}_0)$$

という方程式を満たす. ここで更に, 周期線型系 $\vec{z}' = A(t)\vec{z}$ に対応する周期行列 $\Psi(t)$ を用いて $\vec{y} = \Psi(t)^{-1}\vec{z}$ と変換すると, \vec{y} は

$$\vec{y}' = B\vec{y} + \Psi(t)^{-1}\vec{g}(t, \Psi(t)\vec{y})$$

を満たすことが簡単な計算で分かる. 仮定により t について一様に $\Psi(t)^{-1}\vec{g}(t, \Psi(t)\vec{y}) = o(\vec{y})$ だから, 前節の定理 4.2' により \vec{y} について零解は一様漸近安定となる. $\Psi(t)$ は有界だから, $\vec{z} = \Psi\vec{y}$ についても零解は一様漸近安定となる.

4.3 二次元自励系の軌道

自励系とは, 独立変数 t が左辺の微分以外には含まれないような方程式系のことであったが, これは, 時間が経っても方程式が変化しない, すなわち時間に依存しない法則の表現となっているということで, 普通の力学系などの方程式はすべて自励系である. 自励系の方程式は, 常に独立変数である時間に関する平行移動の形で任意定数を含む: τ を任意の定数とすると

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \implies \frac{d}{dt}\vec{x}(t+\tau) = \vec{f}(\vec{x}(t+\tau))$$

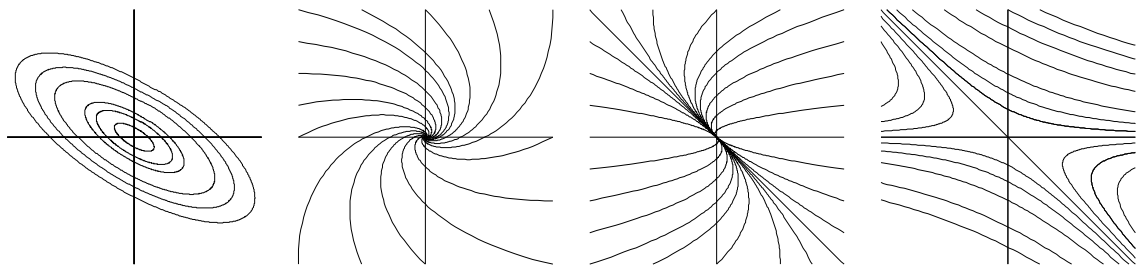
この結果, 時刻 $t=0$ で空間のある点 \vec{x}_0 を出発した解 \vec{x} が時刻 $t=a$ で点 \vec{x}_1 に到達すれば, 時刻 $t=0$ で \vec{x}_1 を出発する解は, 先程ここに到達した解と以後同じ動きをし, 空間に同じ軌道を描いてゆく. 従って自励系の場合は, 軌道の上を動く速さや, 軌道のある点をいつ通ったかを問題にせず, ただどのような軌道を描くかだけをみたいときは, 時間変数を省略して空間変数だけのグラフを見れば十分である. 解軌道の正確な定義は, 解 $\vec{x}(t)$ の \mathbf{R}^{n+1} 次元空間におけるグラフ曲線の空間部分 \mathbf{R}^n への正射影像のことである. 2次元自励系の場合は特に

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \implies \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad (4.5)$$

と, t を含まない方程式で軌道が求まることから, このことは更に明瞭である.

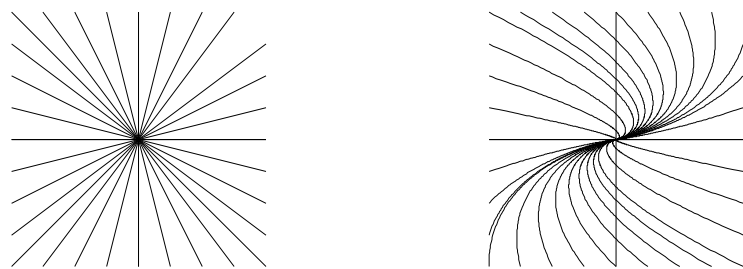
安定性を見る自励系の解の候補として最も基本的なのが, 不動点である. これは $\vec{f}(\vec{c}) = 0$ を満たす \vec{c} のことで, このとき $\vec{x} \equiv \vec{c}$ という定数ベクトルが一つの解軌道を成す. 第1章でも解説したように, 自励系の右辺 \vec{f} は \mathbf{R}^n のベクトル場を与え, その解は各点での接ベクトルがその点でのベクトル場と一致するような曲線のことであった. $\vec{f} = 0$ となる点では, 粒子はどちらに進んでよいかわからないので, このような点はまたベクトル場 \vec{f} の特異点とも呼ばれる.

自励系が線型系のときは, 特異点は原点だけである. この場合の安定性は第1節でもちょっと調べたように係数行列の固有値の実部の大きさに大きく依存する. 特に2次元の線型系については, (4.5) の形に書き直したものを直接求積法で解くことができるので, 原点の回りの解軌道を具体的に描画できる. 主な場合の図は次の通りである:



a) 渦心点 ($\text{Re } \lambda = 0$) b) 渦状点 ($\text{Re } \lambda \neq 0$) c) 結節点 ($\lambda\mu > 0$) d) 鞍点 ($\lambda\mu < 0$)

ただし, c) の結節点の場合は, $\lambda = \mu$ となったとき, 漸近安定性に関する挙動は同じようだが, 軌道の幾何学的パターンはかなり異なって見える:



d) 結節点-2 ($\lambda = \mu$)

e) 結節点-3 (Jordan ブロック)

e) を Jordan 型結節点と呼ぶ人が居るが, サイズ 2 の Jordan ブロックから現れるという意味であって, 別に Jordan が研究したという訳ではない.

これらの図には軌道上を動く向きは書かれていないが, 負の固有値に対応する軌道は原点に吸い込まれ, 正の固有値に対応する軌道は原点から離れてゆく. もっともこの向きは時間を逆にすれば逆になる. 二つの固有値の実部がともに負のとき原点が漸近安定な軌道になることは第 1 節で既に見た通りであるが, 実部の符号が異なるときは, 原点に吸い込まれる解は一本だけで, その他はすべて, 一旦は原点の近くまで行くとしても, 最終的には無限遠に遠ざかってしまう. 高次元の場合も, 固有値の実部に正のものが一つでもあれば, 殆どの軌道はやがて原点から離れて行く.

以上の考察は初等的だが, 非線型の自励系についても, 原点の十分近くでは定性的に同様のことが言える:

定理 4.6 2次元自励系 $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ は原点を特異点に持ち, かつ原点における \vec{f} の Taylor 展開

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + o(\vec{x})$$

における一次の項の係数行列 A の固有値を λ, μ とするとき

- 1) $\lambda, \mu > 0$ なら, 原点の十分近くから出発した解は $t \rightarrow \infty$ のとき原点に近づく.
- 1') $\lambda, \mu < 0$ なら, 原点の十分近くから出発した解は $t \rightarrow \infty$ のとき原点から遠ざかる.
- 2) $\text{Re } \lambda < 0$ なら, 原点の十分近くから出発した解は $t \rightarrow \infty$ のとき $\text{Im } \lambda$ の符号に応じた方向に回転しつつ原点に近づく.
- 2') $\text{Re } \lambda > 0$ なら, 原点の十分近くから出発した解は $t \rightarrow \infty$ のとき $\text{Im } \lambda$ の符号に応じた方向に回転しつつ原点から遠ざかる.
- 3) λ と μ が実で異符号なら, 原点の十分近くから出発した解は $t \rightarrow \infty$ のとき一旦原点に近付いた後, 一つの例外を除き原点から遠ざかる.

証明 いずれの場合も, 一次の部分を Jordan 標準形, より正確にはその実形に変換した後の座標系で論ずる. これを (x, y) で記せば,

1), 3) の場合は $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) の場合は $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(r)$

となる. 1) のときは大筋は前節の定理 4.2 で一般次元について述べたことに含まれる. (固有値が二つとも正の場合は時間を逆向きにすれば一様漸近安定な解を $t = \infty$ から過去に遡るような現象が見られる訳である.) ここでは結節点の様相がなぜ現れるかの説明をしておこう. 話を決めるため固有値は $-\mu < -\lambda < 0$ であるとし, 線形の座標変換で

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + o(r), \quad \frac{dy}{dt} = -\mu y + o(r)$$

としてよい. 原点の十分小さい近傍で考えれば $r < \varepsilon|x|$, $r < \varepsilon|y|$, $\varepsilon < \min\{\lambda, (\mu - \lambda)/2\}$ が成り立つ. よって解曲線がこの近傍内に入ると

$$\frac{dx}{dt} \geq -\lambda x - \varepsilon x, \quad \frac{dy}{dt} \leq -\mu y + \varepsilon y$$

となり, この時刻 t_0 以後は

$$x \geq x(t_0)e^{-(\lambda-\varepsilon)(t-t_0)}, \quad y \leq y(t_0)e^{-(\mu-\varepsilon)(t-t_0)}$$

が成り立つ. 仮定により $\mu - \varepsilon > \lambda + \varepsilon$ なので, y 座標の方が x 座標よりも急激に減少し, 解曲線は一旦 x 軸に吸い寄せられてから原点に近づくように見えることになる.

3) のときは, 固有値を $\lambda > 0 > -\mu$ と書くとき, 同様に

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + o(r), \quad \frac{dy}{dt} = -\mu y + o(r)$$

としてよい. 原点の十分小さい近傍で考えれば $r < \varepsilon|x|$, $r < \varepsilon|y|$, $\varepsilon < \min\{\lambda, \mu\}$ が成り立つ. よって解曲線がこの近傍内に入ると

$$\frac{dx}{dt} \geq \lambda x - \varepsilon x, \quad \frac{dy}{dt} \geq -\mu y + \varepsilon y$$

となり, この時刻 t_0 以後は

$$x \geq x(t_0)e^{(\lambda-\varepsilon)(t-t_0)}, \quad y \leq y(t_0)e^{-(\mu+\varepsilon)(t-t_0)}$$

が成り立つ. これは解曲線が x 軸に吸い寄せられながら遠くの方へ延びてゆくことを意味する.

最後に 2) のとき, 座標変換後の方程式は, たとえば

$$\frac{dx}{dt} = -ax + by + o(r), \quad \frac{dy}{dt} = -bx - ay + o(r)$$

となっているとしよう. ここに $a, b > 0$ とした. ここで極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を導入すると

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{r} = -ar + o(r), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d}{dt} \text{Arctan} \frac{y}{x} = \frac{y \cdot x' - x \cdot y'}{x^2 + y^2} + o(r) = b + o(r) \end{aligned}$$

よって、原点の十分小さい近傍では、

$$(-a - \varepsilon)r \leq \frac{dr}{dt} \leq (-a + \varepsilon)r, \quad b - \varepsilon \leq \frac{d\theta}{dt} \leq b + \varepsilon$$

が成り立ち、これから

$$r_0 e^{-(a+\varepsilon)(t-t_0)} \leq r(t) \leq r_0 e^{-(a-\varepsilon)(t-t_0)}, \quad \theta_0 + (b-\varepsilon)(t-t_0) \leq \theta(t) \leq \theta_0 + (b+\varepsilon)(t-t_0)$$

が成り立つので、偏角がほぼ角速度 b で正の向きに回転しつつ、動径が指数的に減少してゆくことが分かる。

2次元自励系については、局所理論はこれでおしまいが、大域理論はなかなか奥が深く、まだ未解決の問題も多い。既に知られている結果の中で古典的なのが次の定理である：

定理 4.7 (Poincaré-Bendixon) 平面 R^2 上の 2次元自励系の解軌道が $t \rightarrow \infty$ のとき有界集合に留まるなら、解軌道の $t \geq 0$ の部分の閉包は周期解を含む。ただし、周期 0 の不動点も周期解の仲間に入れるものとする。

以下、記述を短くするため、伝統に従って次の用語を用いることにしよう：

定義 4.3 $t \rightarrow \infty$ のときの解軌道の極限点の成す集合を、この解軌道の ω 極限集合と呼ぶ。厳密には次式で定義される集合論である。

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \overline{\{\vec{x}(s); s \geq t\}} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\vec{x}(s); s \geq t\}}$$

この集合は当然のことながら、十分先の方の t に対する $\vec{x}(t)$ のみで定まり、最後の共通部分は $t \geq 0$ のところを任意の a について $t \geq a$ で置き換えられる。また、この定義から ω 極限集合は閉集合の共通部分としてそれ自身閉集合なことも分かる。名前に付いた ω は“アルファからオメガへ”で、終局を表す洒落である。実際 $t \rightarrow -\infty$ のときの極限集合を α -極限集合と呼んで使うこともある。

定理の証明の前に次のことに注意しておこう。これは 2次元に限らず一般に成り立つ主張である。

補題 4.8 自励系 $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ の解 $\vec{x}(t)$ が $t \rightarrow \infty$ のとき有限の点 \vec{x}_0 に収束すれば、 \vec{x}_0 はベクトル場 $\vec{f}(\vec{x})$ の特異点である。

証明 もし $\vec{a}_0 := \vec{f}(\vec{x}_0) \neq 0$ なら、 \vec{x}_0 の近傍で $\vec{f}(\vec{x})$ は \vec{a}_0 に近い値をとる。今 \vec{x}_0 の δ -近傍で $|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}_0| < \varepsilon$ だとしよう。問題の解 $\vec{x}(t)$ は十分大きな t_0 に対し $t \geq t_0$ でこの近傍内に収まるが、このとき

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) &= \int_{t_0}^t \vec{f}(\vec{x}(s)) ds = \vec{a}_0(t-t_0) + \int_{t_0}^t \{\vec{f}(\vec{x}(s)) - \vec{a}_0\} ds \\ \therefore |\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)| &\geq |\vec{a}_0|(t-t_0) - \varepsilon(t-t_0) \end{aligned}$$

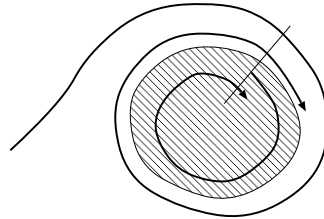
だから、 t を十分大きくすれば、この右辺は 2δ より大きくなり、従って $\vec{x}(t)$ は \vec{x}_0 の δ -近傍から飛び出してしまい、不合理である。

補題 4.9 自励系 $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ の解 $\vec{x}(t)$ の ω 極限集合 Γ は、この自励系が定める流れで不変である。すなわち、 Γ の任意の点を初期値として出発した解軌道は Γ 内に留まる。のみならず、時刻 t を固定したとき、初期値に時刻 t での解を対応させる写像 g^t は、 Γ からそれ自身の上への位相同型写像となる。

証明 $\bar{x}_0 \in \Gamma$ とすれば, ω 極限集合の定義により, 任意の $\delta > 0$ と任意の $T > 0$ に対し, $|\bar{x}(t_0) - \bar{x}_0| < \delta$ なる時刻 $t_0 \geq T$ が存在する. 今, 時刻 $t = 0$ に \bar{x}_0 から出発する解を $\bar{y}(t)$ と記せば, $t > 0$ を任意に固定したとき, $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を十分小さく取れば, 初期値に関する解の連続性により $|\bar{x}(t_0) - \bar{x}_0| < \delta$ なら $|\bar{x}(t_0 + t) - \bar{y}(t)| < \varepsilon$ が成り立つ. t_0 はいくらでも大きく取れたから, これは $\bar{y}(t)$ が解軌道 $\bar{x}(t)$ の極限点であること, すなわち ω 極限集合 Γ に属することを意味する.

実は, \bar{x}_0 から時間を逆に遡っても, $\bar{y}(t)$ は Γ から飛び出さない. なぜなら, 上と同様の議論で, 任意に固定した $a > 0$ に対し $\bar{x}(t_0)$ が \bar{x}_0 のある δ 近傍内にあれば, $\bar{y}(t)$, $-a \leq t \leq 0$ は $\bar{x}(t_0 + t)$, $-a \leq t \leq 0$ の ε 近傍内に収まる. t_0 を十分に大きくとることにより, $t \geq t_0$ で $\bar{x}(t)$ は Γ の ε 近傍内に収まるとしてよい. すると, $t_1 \geq t_0 + a$ で $\bar{x}(t_1)$ が再び \bar{x}_0 の δ 近傍内に戻って来るとすれば, 解 $y(t)$ と解 $\bar{x}(t_1 + t)$, $-a \leq t \leq 0$ を比較して, $y(t)$, $-a \leq t \leq 0$ は Γ の 2ε 近傍内に収まっていなければならないことが分かる. ε も $a > 0$ も任意だから, これは $\bar{y}(t)$ が $t \rightarrow -\infty$ までずっと Γ 内に収まることを意味する.

このことから, 解が定める力学系の同相写像 g^t で Γ はそれ自身と常に一対一全射に対応していることが分かる. なぜなら, もしある時刻 t に対し $g^t(\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$ となつたとすると, $g^t(\Gamma)$ に属さない点は時刻を t から 0 まで遡ったとき, 自分の初期値が Γ 内に有るはずなのに, すべての点は他の解の初期値として使われてしまっており, 不合理となるからである.



Poincaré-Bendixon の定理の証明には, 従って解軌道 $\bar{x}(t)$ の ω 極限集合 Γ が \vec{f} の特異点を一つも含まぬならば, それが周期軌道を含むことを示せばよい. 今 Γ の一点 \bar{x}_0 を取る. 仮定によりこの点で $\vec{f}(\bar{x}_0) \neq 0$ なので, これと横断的な (すなわち接しない) 直線 l を引くことができる. ($\vec{f}(\bar{x}_0)$ に直角に引けばよい.) 点 \bar{x}_0 の近くでは解軌道は $\vec{f}(\bar{x}_0)$ に近い接線方向を持ち, 従って常に一定の側から l と横断的に交わることに注意しよう. ω 極限集合の定義により, $\forall \delta > 0$ に対し元の解軌道はある時刻 t_0 で点 \bar{x}_0 の δ 近傍を通過し, さらに, それとは独立な $\forall \varepsilon > 0$ に対し, その後いくら時間が経った後でも点 \bar{x}_0 の ε 近傍に再び戻って来る. 後者の時間を t_1 とすれば, 初期値に対する解の連続性により, 点 \bar{x}_0 を出発する解 $\bar{y}(t)$ も $\forall \varepsilon > 0$ についてこの点の ε 近傍に戻って来なければならない. もし解 $\bar{y}(t)$ が同じ点 \bar{x}_0 にちょうど戻って来なければ, \bar{x}_0 の近くの点でこれとは別の \bar{x}_1 で横断線 l と交わることになるが, 解軌道が自分自身と交わるができないのでこの時刻以後は $\bar{y}(t)$ の軌道はこれ以上 \bar{x}_0 に近付くことができない. これは不合理である. よって \bar{y} は周期軌道でなければならない.

実は, もっと強く, 次のことを示すことができる:

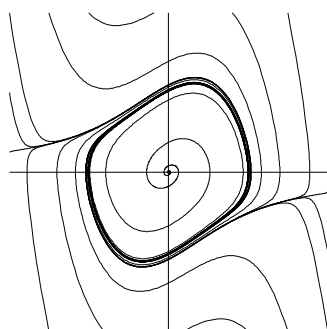
系 4.10 ω 極限集合が不動点を含まなければ, それは周期解の軌道そのものである.

実際, 上の証明で得られた周期軌道 Γ は, 解の一意性によりもとの解軌道 $\bar{x}(t)$ と交わるができないので, 解軌道 $\bar{x}(t)$ は閉曲線 $\bar{y}(t)$ の片側にしか存在し得ず, 従ってその反対側には極限点は存在しない. このような周期軌道を極限閉軌道 (limit cycle) と呼ぶ.

極限閉軌道を持つ方程式の代表例は、制御振動系 van der Pol 方程式である。これは

$$x'' - \varepsilon(1 - x^2)x' + x = 0, \quad \text{一階連立系としては} \quad \begin{cases} x' = y, \\ y' = x - \varepsilon(1 - x^2)y \end{cases}$$

というもので、 $|x| > 1$ のときはブレーキをかけ、 $|x| < 1$ のときはアクセルをかけることにより、ちょうど周期 2π の安定な軌道を維持させる仕組みである。この方程式の 2 次元自励系としての解軌道の図を計算機で描かせたものを下に示す。

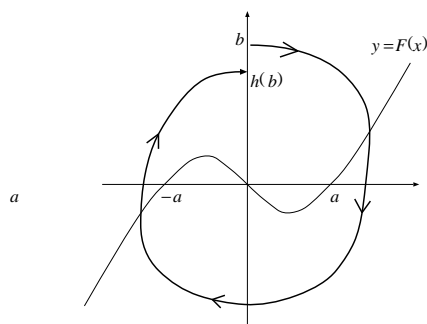


この例を一般化した Liénard の方程式

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \tag{4.6}$$

について一様漸近安定な極限閉軌道の存在を示しておこう。ただし、係数 $f(x)$, $g(x)$ は以下の条件を満たすとする：

- 1) $f(x)$, $g(x)$ は x の解析関数である。
 - 2) f は偶関数 i.e. $f(-x) = f(x)$, g は奇関数 i.e. $g(-x) = -g(x)$. 更に、 $f(0) < 0$, また $x \neq 0$ で $xg(x) > 0$.
 - 3) $F(x) := \int_0^x f(x)dx$ は $\exists a > 0$ について $0 < x < a$ で $F(x) < 0$, $F(a) = 0$, かつ $x > a$ で単調増加。
 - 4) $x \rightarrow \infty$ のとき $F(x) \rightarrow \infty$.
- 物理的には $f(x)$ が速度抵抗, $g(x)$ が復元力を表す。



定理 4.11 方程式 (4.6) は一様漸近安定な周期解をただ一つ持つ。

証明 $y = x' + F(x)$ と置けば,

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x) \end{cases} \tag{4.7}$$

という連立方程式になる。これは仮定 2) から原点に関して点対称、すなわち、 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ という置き換えで不変である。初等的な考察で次のことが分かる。

1) 特異点は原点のみである。実際、 $g(x)$ は原点だけで 0 となる。

2) 軌道は原点以外で常に時計周りに回転する。これは初等的に傾きを調べれば分かる。点対称性により $x \geq 0$ で見れば十分であるが、このとき $y' \leq 0$ 。他方、 $y \geq F(x)$ では $x' \geq 0$ 、 $y \leq F(x)$ では $x' \leq 0$ なので、 $0 \leq x \leq a$ で $F(x) \leq y \leq 0$ なる領域と、 $x \geq a$ で $0 \leq y \leq F(x)$ なる二つの領域を除き、ベクトル場自身が時計周りの向きを持つ。この二つの領域では、ベクトル場は一時的に時計周りになる可能性はあるが、前者では解軌道は境界線 $y = F(x)$ に、後者では境界線 $y = 0$ にしか交われないことが容易に分かるので、結局は有限時間でこれらの領域を抜け出して時計周りの回転を続けざるを得ない。

3) 以上により y 軸の正の部分の点 $(0, b)$ から出発した解軌道は、原点の周りを一周した後、必ずまた y 軸の正の部分のどこかの点 $(0, h(b))$ に戻ってくる。すなわち y 軸は解軌道の横断線となっている。このとき $h(b) > b$ か $h(b) < b$ か $h(b) = b$ かのいずれかが成り立つ。 $h(b) = b$ のときは閉軌道が得られる。一般にこの大小関係を調べるため

$$E(x, y) := \frac{y^2}{2} + G(x), \quad \text{ここに } G(x) = \int_0^x g(x) dx$$

と置こう。

$$\varphi(b) := \frac{h(b)^2}{2} - \frac{b^2}{2} = E(0, h(b)) - E(0, b) = \int_{\gamma} dE(x, y) = \int_{\gamma} y dy + g(x) dx$$

ここに γ は点 $(0, b)$ から $(0, h(b))$ に到る任意の区分的に滑らかな曲線弧である。ここで積分路 γ を解軌道に取れば連立方程式 (4.7) を使って変形でき、

$$y dy + g(x) dx = y \{-g(x) dt\} + g(x) \{y - F(x)\} dt = -F(x)g(x) dt = F(x) dy$$

となるから、上は

$$\varphi(b) = \int_{\gamma} F(x) dy$$

と書き直せる。解軌道が交わらないことから $h(b)$ は b について明らかに単調増加、すなわち $b' > b$ なら $\varphi(b') > \varphi(b)$ が成り立つ。言い替えると、解軌道がどのように戻って来ようと、 $(0, b')$ を出発した解軌道は常に $(0, b)$ を出発した解軌道の外側を描く。そこで $\varphi(b)$ の値が $b \rightarrow 0$ のときと $b \rightarrow \infty$ のときにどうなるかを見よう。 $-a \leq x \leq a$ なる範囲では

$$F(x) dy = F(x) \frac{dy}{dx} dx = -\frac{F(x)g(x)}{y - F(x)} dx$$

となることに注意しよう。さて、 b が 0 に近いときは解軌道も全体として原点に近く、従って $-a < x < a$ の範囲にあるとしてよいから、このときは $x = 0$ 以外で $-F(x)g(x) > 0$ なることから $\varphi(b) = \int_{\gamma} -F(x)g(x) dt > 0$ となる。また b が十分大きいときは、軌道上の $-a \leq x \leq a$ の部分では $|y - F(x)| \geq C$ 、また $|F(x)g(x)| \leq M$ となるので、

$$\begin{aligned} \varphi(b) &\leq 2 \int_{-a}^a \frac{|F(x)g(x)|}{|y - F(x)|} dx + \int_{\gamma \cap \{x \geq a\}} F(x) dy + \int_{\gamma \cap \{x \leq -a\}} F(x) dy \\ &\leq \frac{4aM}{C} + \int_{\gamma \cap \{x \geq a\}} F(x) dy + \int_{\gamma \cap \{x \leq -a\}} F(x) dy \end{aligned}$$

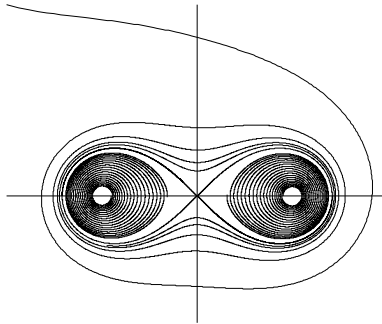
ここで $x \geq a$ に対する積分において $F(x) = X, y = Y$ と座標変換すれば,

$$\int_{\gamma \cap \{x \geq a\}} F(x) dy = \int_{\Gamma} X dY$$

となり, 最後の値は変数変換後の積分路 Γ と Y 軸の間の面積の符号を変えたものに等しい (マイナスになるのは積分路が Y 座標の減る向きに向き付けられているからである). 仮定 3) により $x \rightarrow \infty$ のとき $F(x) \rightarrow \infty$ だから, この面積は軌道を外側に取りればいくらでも大きくなり, 従って $b \rightarrow \infty$ のとき $-\infty$ に発散する. 同様のことは $x \leq -a$ に対する積分についても言え, 従って $\varphi(b) \rightarrow -\infty$ となるから, 連続関数 φ に対する中間値の定理により, $\varphi(b) = 0$ を満たす b の値 b_0 がただ一つ存在する. これは最初に注意したように周期軌道であり, かつ $b < b_0$ では $\varphi(b) > 0$ なので軌道は膨張し, $b > b_0$ では $\varphi(b) < 0$ なので収縮する. それらは上に見出した周期軌道を極限閉軌道として持たねばならないことは, Poincaré-Bendixon の定理と周期軌道の一意性により明らかである.

Poincaré-Bendixon の証明では, 2次元の平面上で議論しているということが最大限に利いていることに注意しよう. 3次元以上では横断線は横断 (超平) 面となり, 順序集合ではなくなるので, 周期解でなければ元の点に二度と近付けないとか, 周期解の内側と外側が分離できるとかが成り立たなくなる. このため 3次元以上の自励系の大域的研究は非常に難しい.

なお, 2次元でも不動点が存在する場合の ω 極限集合というものはいくらでも複雑になり得ることに注意しよう. 例えば Lemniscate を ω 極限集合とする次のような例を具体的に方程式として作ることができる. この例では原点は特異点であり, ω 極限集合のその他の分枝は原点を極限点とする開いた軌道であって, 周期軌道は含まれていない.



問 4.2 上の図は次の方程式で与えられる. これを計算機に解かせて ω 極限集合の図を自ら作ってみよ.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x} H, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial y} H, \quad H(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

この節の最後に 2次元自励系に関する研究の歴史を概観しておこう. 20世紀の最初の年に開かれた第2回国際数学者会議において, Hilbert は彼の有名な 23個の問題を提出し, これらは20世紀の数学の発展に重要な意味を持つこととなったが, そのうちの第16番目が, 2次元自励系

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

の極限閉軌道の個数を, f, g が多項式のときにそれらの次数で見積もれ, という問題であった.

Petrovsky-Landis が 1950 年代に f, g の次数で極限閉軌道の個数を評価する公式を発表した。その結論の一つは、 f, g が 2 次以下の多項式のときは、極限閉軌道は高々 3 個であるというものであった。この論文は難解で、証明が理解できなかったが、1980 年に中国の Shi Songling が、彼らの評価よりも多い 4 個の極限閉軌道を持つ自励系の例を数値計算で発見してしまった³ 彼の与えた例は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2, & \frac{dy}{dt} &= x + x^2 + (-25 + 8\epsilon - 9\delta)xy, \\ \delta &= -10^{-13}, \quad \epsilon = -10^{-52}, \quad \lambda = -10^{-200} \end{aligned}$$

という非常に小さなパラメータを含むものであったが、アメリカの L. M. Perko という人が彼の例を改良してより大きなパラメータの例を作った：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \cos \alpha - Q(x, y) \sin \alpha, & \frac{dy}{dt} &= P(x, y) \sin \alpha + Q(x, y) \cos \alpha, \\ P(x, y) &= \lambda x - y - 10x^2 + (5 + \delta)xy + y^2, & Q(x, y) &= x + x^2 + (8\epsilon - 25 - 9\delta)xy, \\ \delta &= -0.5, \quad \epsilon = 0.01, \quad \lambda = -0.005, \quad \alpha = -0.0023 \end{aligned}$$

1987 年に Ilyashenko と Ecalle-Martinet-Moussu-Ramis は独立に平面の多項式ベクトル場を右辺に持つ自励系の極限閉軌道の有限性を初めて厳密に証明したが、Hilbert の第 16 問題の完全な解決にはまだ程遠い。

4.4 高次元の自励系とアトラクタ

高次元の自励系の解軌道を調べるときも、不動点や ω 極限集合は重要な手がかりを与える。ここで、現代数学のキーワードの一つであるアトラクタの定義を与えよう。アトラクタとは、言葉の意味としては何でも引き寄せるものということであり、力学系としては漸近安定な不動点を膨らませたようなもののことである。すなわち

定義 4.4 閉集合 A が解の族 $\{\vec{x}(t)\}$ (で定まる力学系) のアトラクタであるとは、

- 1) A は力学系 $\vec{x}(t)$ で不変、すなわち、 A の任意の点から出発した解軌道は永久に A 内に留まる。
- 2) A は Lyapunov の意味で漸近安定である。すなわち、
 - a) A の任意の近傍 U に対し、 A の他の近傍 V を取れば、 V から出発した軌道は永久に U 内に留まる。
 - b) A に十分近い点から出発した軌道 $\vec{x}(t)$ は $t \rightarrow \infty$ のとき $\text{dis}\{\vec{x}(t), A\} \rightarrow 0$ を満たす。

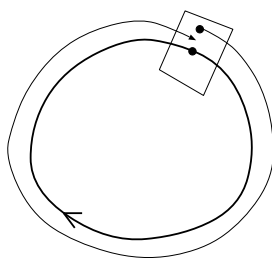
容易に分かるように、漸近安定な不動点はアトラクタである。また、2 次元自励系のところで出て来た極限閉軌道もアトラクタである。

問 4.3 極限閉軌道に対しアトラクタの条件 2) を確認せよ。

3 次元以上の空間で軌道の追跡をするのは極めて難しいが、もし周期軌道 γ が一つあったとき、その安定性を見るのに理論的には次のような手法が使える： γ 上の一点 \vec{x}_0 において、 γ に横断的な超平面 H を取る。初期値に対する解の連続依存性により、 \vec{x}_0 に十分近い H 上の点 \vec{x} から出発した解は、 γ の近くを辿って \vec{x}_0 に近い H 上の点 $\varphi(\vec{x})$ に戻る。こうして点 \vec{x}_0 の H におけるある近傍 U から、他の近傍 V への一対一写像 $\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x})$ が得られる。これを Poincaré 写像と呼ぶ。

³この結果をアメリカで紹介した中国の数学者が、開口一番、“ロシア人は間違っている”と言ったという話が伝わっている。まだ中ソ論争のなごりが感じられる時代であった。

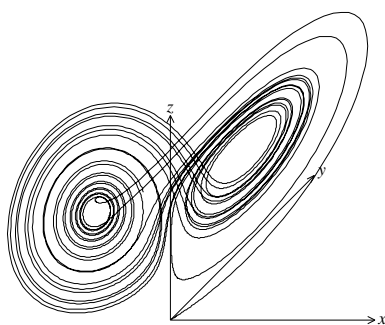
もし $\varphi(U) \subset U$ なる \bar{x}_0 の近傍 U の基本系が有れば, この周期軌道は安定であること, また φ が縮小写像となっていれば, 一様漸近安定となることが容易に分かる. この考えは既に 2 次元自励系のときに用いたが, 3 次元以上だと二つの解軌道が交わることなく位置を入れ換えられるので, 一般には $\varphi(U)$ の追跡は困難であり, 実際に φ はある方向に縮小し他の方向には伸長する, しかも伸長した後で縮小する領域に入って戻って来るといった場合には, 周期軌道の周りで非常に複雑な振舞いが生ずる. これがいわゆる決定論的カオスと呼ばれるものである. ここでは有名な二つの例を挙げるにとどめよう.



例 1 Lorenz アトラクタ. 1963 年に気象学者 E. N. Lorenz が提出した方程式系で, 大気の大規模対流のモデルを作って天気予報に役立てようという意図であった. 大気の運動は圧縮性流体の偏微分方程式により記述され, それを解析するのは極めて難しい. そこで, 適当な函数系により真の解を展開し, その有限個を取り出して, 係数の時間変化を見るために, より易しい連立常微分方程式を導くという手法がしばしば用いられる. Lorenz の方程式もそのようなものの一つであるが, 大気の乱流を彷彿とさせるような複雑な解軌道を持つため, 有名になった. その方程式は

$$x' = \sigma(y - x), \quad y' = x(R - z) - y, \quad z' = xy - bz$$

であり, 見掛けは複雑なカオスの挙動が生ずるのが信じられないに簡単である. 下図は $\sigma = 10$, $R = 28$, $b = 8/3$ のものである. (以下, パラメータの値はすべて正で, $R > 1$ を常に仮定する.)



この図の解釈を考えよう. まず特異点は

$$\sigma(y - x) = 0, \quad x(R - z) - y = 0, \quad xy - bz = 0$$

を解いて, $(0, 0, 0)$, $(\pm\sqrt{(R-1)b}, \pm\sqrt{(R-1)b}, R-1)$ (復号同順) の三点であることが簡単な計算で分かる. 原点での一次部分は

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ R & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

なので、正の固有値が 1 個、負の固有値が 2 個有る。従って、原点の近くから出発した解はよほどの好運が無い限り、原点から遠ざかってゆく。次に、 $(\pm\sqrt{(R-1)b}, \pm\sqrt{(R-1)b}, R-1)$ の近くにおける一次近似は

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{(R-1)b} \\ \pm\sqrt{(R-1)b} & \pm\sqrt{(R-1)b} & -b \end{pmatrix}$$

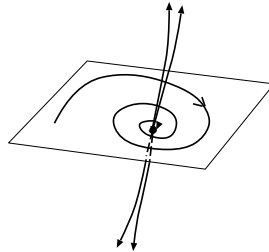
となる。こういう計算に慣れていない人のために、二つ目の方程式の右辺についてこの近似計算をやってみると、

$$\begin{aligned} x(R-z) - y &= (x \mp \sqrt{(R-1)b} \pm \sqrt{(R-1)b}) \{R - ((z - (R-1) + R-1))\} \\ &\quad - (y \mp \sqrt{(R-1)b} \pm \sqrt{(R-1)b}) \\ &= (x \mp \sqrt{(R-1)b}) - (y \mp \sqrt{(R-1)b}) \mp \sqrt{(R-1)b}(z - (R-1)) + \dots \end{aligned}$$

となる。さて、上の行列の固有多項式は

$$f(x) := x^3 + (\sigma + b + 1)x^2 - (R - \sigma - 2)bx - 2(R-1)b\sigma$$

と計算され、これは $f(0) < 0$ より正根を一つは持つが、上で描いた図の場合のように $R > \sigma + 2$ のときは $f'(0) < 0$ なので、極大は $x > 0$ には存在しないから、正根は一つだけで、かつ残りの二根は負実根か、あるいは実部が負の共役複素根であることが分かる。特に上の図に対応するパラメータでは後者の場合となる。従って、下図のように、これらの特異点には二次元的な巻き込みと、一次元的な湧き出しが同居している。



このような特異点では、ほとんどの軌道が無限遠に遠ざかってしまい、おかしなことが起こらないのが普通なのだが、Lorenz 方程式の場合は、大域的に軌道がこの二つの特異点のある近傍に吸い寄せられるという傾向がある、つまりアトラクタが存在するため、湧き出し口から出て行った軌道はしばらく後に巻き込み軌道に帰って来てしまい、以後永久にこれを繰り返すので、複雑な軌道パターンが構成されるのである。このようなアトラクタのことを strange attractor と呼ぶ。

軌道が無限遠に逃げてゆかぬことは次の補題から推察できる：

補題 4.12 1) 領域

$$(x-y)^2 + b\left(z - \frac{R-1}{2}\right)^2 > \frac{b(R-1)^2}{4}$$

において、 $L(x, y, z) := x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - R + 1)^2$ は軌道に沿って単調減少する。

2) 領域

$$0 \leq z \leq R-1, \quad -\frac{R-1}{2}\sqrt{b} \leq x-y \leq \frac{R-1}{2}\sqrt{b}, \quad |x+y| > \sqrt{4Rb + \frac{(R-1)^2 b}{4}}$$

においては $M(x, y, z) := x^2 + \sigma y^2 + 2\sigma R(R - z)$ は単調減少で, z 座標は単調増加し, 軌道はすぐに $z > R - 1$ なる領域に出る.

証明 1) L を解軌道に沿って微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= 2xx' + 2\sigma yy' + 2\sigma(z - R + 1)z' \\ &= 2x\sigma(y - x) + 2\sigma y\{x(R - z) - y\} + 2\sigma(z - R + 1)(xy - bz) \\ &= -2\sigma x^2 + 2\sigma xy + 2\sigma Rxy - 2\sigma xyz - 2\sigma y^2 + 2\sigma xyz - 2\sigma(R - 1)xy - 2b\sigma z^2 + 2b\sigma(R - 1)z \\ &= -2\sigma x^2 + 4\sigma xy - 2\sigma y^2 - 2b\sigma\left(z - \frac{R - 1}{2}\right)^2 + \frac{b\sigma(R - 1)^2}{2} \end{aligned}$$

よって最後の量が負なる限り, L は軌道に沿って減少する.

2) この領域では

$$xy = \frac{(x + y)^2}{4} - \frac{(x - y)^2}{4} \geq Rb + \frac{(R - 1)^2 b}{16} - \frac{(R - 1)^2 b}{16} = Rb$$

より x, y が同符号なことがすぐわかり, 従って

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= 2xx' + 2\sigma yy' - 2\sigma Rz' \\ &= 2x\sigma(y - x) + 2\sigma y\{x(R - z) - y\} - 2\sigma R(xy - bz) \\ &= -2\sigma x^2 - 2\sigma y^2 - 2\sigma z(xy - Rb) \\ &\leq -2\sigma x^2 - 2\sigma y^2 \end{aligned}$$

となる. また

$$z' = xy - bz \geq x^2 - \frac{(R - 1)\sqrt{b}}{2}|x| - (R - 1)b, \quad |x'| \leq \sigma \frac{(R - 1)\sqrt{b}}{2}, \quad |y'| \leq (R - 1)|x| + \frac{(R - 1)\sqrt{b}}{2}$$

より, z 座標の増加率は x, y 座標の増加率よりもオーダー一つ大きく, 従って遠くの方ではほとんど垂直に近い形で 1) の領域に突入する.

問 4.4 三次方程式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ において $b < 0, c < 0$ なら, この方程式はただ一つの正実根を持ち, 残りの二根の実部は負となることを示せ. [ヒント: 変数の相似変換で正根を 1 としても一般性を失わないので, $f(x) = (x - 1)(x^2 + px + q)$ とおき, 係数比較で $p < 0$ を示せ.]

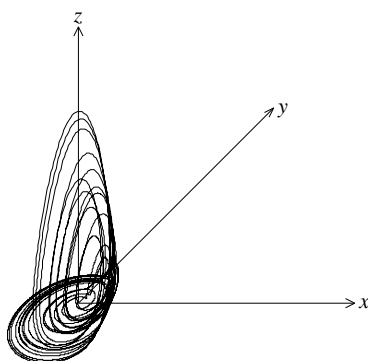
例 2 Rössler アトラクタ. Lorenz の方程式は三つの特異点の間のやりとりという, strange attractor としては複合的な構造をしているので, それからカオスの挙動の原因となるような純粋な一つのアトラクタを取り出せれば, 事態がよりはっきりと見えるようになるであろう. これに成功したのが Rössler の方程式である.

$$x' = -y - z, \quad y' = x + ay, \quad z' = bx + z(x - c)$$

特異点は $(0, 0, 0)$ と $(c - ab, b - c/a, c/a - b)$ の二つである. 下図は $a = 0.5, b = 0.4, c = 4.5$ に対する軌道であり, $c - ab > 0, c/a - b > 0$ の場合である. 各特異点における線型近似の係数行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c}{a} & 0 & -ab \end{pmatrix}$$

となり, 下図の例を含むパラメータの範囲では, 原点の方は負の実固有値が一つと, 虚部正の共役複素固有値を持ち, もう一つの特異点では, 正の実固有値一つと虚部負の共役複素固有値を持つ. これら二つの特異点が巻き込みと吹き出しを交換し合って strange attractor を構成しているのである.



問 4.5 Rössler 方程式に対し, 上に述べたことを計算で確認し, Lorenz の方程式と同様の考察で strange attractor の存在を説明してみよ.

Rössler 方程式の第 3 式の右辺が $b + z(x - c)$ になっている文献もある. これは上のものから簡単な変換で書き換え可能である.

問 4.6 このことを確かめよ. [ヒント: 元の方程式で $X = x + ab, Y = y - b, Z = z + b$ と置換してみよ.]

これらの方程式はパラメータの値が変化すると, あるところから急に解軌道の様子が変わってしまう現象がしばしばみられる. このような現象を研究するのが分岐理論 (bifurcation theory) であり, 力学系, すなわち連立常微分方程式の定性的研究の重要な一分野を成している. この講義では扱わないが, 参考書を見られたい.

この章の参考書

- [1] 吉沢太郎『微分方程式入門』, 朝倉書店, 1970.
- [2] トンプソン-ステュアート『非線形力学とカオス』, オーム社, 1988.