第5章　Hamilton 系の理論

天体などの自然な運動を記述する方程式は, 次のような Hamilton 系の構造をしているのが普通である. すなわち, Hamilton 函数 (ハミルトニアン) と呼ばれる $2n$ 変数の函数 $H(\vec{x},\vec{\xi})$ が有り,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \nabla_{\vec{\xi}} H(\vec{x},\vec{\xi}), \quad \frac{d\vec{\xi}}{dt} = -\nabla_{\vec{x}} H(\vec{x},\vec{\xi}) \tag{5.1}$$

力学では, $\vec{\xi}$ を $\vec{p}$ で表すのが普通で, これを運動量座標と呼んでいる. また位置座標 $\vec{x}$ もしばしば $\vec{p}$ と揃いの文字 $\vec{q}$ で表される. このとき函数 H は総エネルギー, すなわち, 運動エネルギーと位置エネルギーの和に対応する. 例えば, 最も簡単な単振子の運動は $H(x,p) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{kx^2}{2}$ という運動エネルギーと位置エネルギーの和から, (5.1) に従い

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

として導かれる. この形の連立方程式には, 一般の連立方程式には見られない顕著な性質がいくつかある. まず最初にそれらを列挙し, 次いで天体力学などから生ずるより複雑な問題を考えてゆこう.

5.1　Hamilton 系の基本的性質

最も基本的なのは次の保存則である：

定理 **5.1**　Hamilton 系 (5.1) の軌道に沿って $H(\vec{x},\vec{\xi})$ は一定である.

証明　軌道に沿う $H(\vec{x},\vec{\xi})$ の時間微分が 0 になることを示す：

$$\frac{d}{dt}H(\vec{x},\vec{\xi}) = \nabla_{\vec{x}} H(\vec{x},\vec{\xi})\frac{d\vec{x}}{dt} + \nabla_{\vec{\xi}} H(\vec{x},\vec{\xi})\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \nabla_{\vec{x}} H(\vec{x},\vec{\xi})\nabla_{\vec{\xi}} H(\vec{x},\vec{\xi}) - \nabla_{\vec{\xi}} H(\vec{x},\vec{\xi})\nabla_{\vec{x}} H(\vec{x},\vec{\xi}) = 0$$

次の結果はそれほど自明ではない.

定理 **5.2**　(Liouville の定理)　Hamilton 系 (5.1) が定める相空間の流れ (1 パラメータ変換群) は相空間の体積を保存する.

証明 変換による体積の変化率は, Jacobi 行列式で表される. 従って, (5.1) の解 $\vec{x} = \vec{x}(t), \vec{\xi} = \vec{\xi}(t)$ の初期値を $\vec{x}(0) = \vec{y}, \vec{\xi}(0) = \vec{\eta}$ と置くとき, 変換 $(\vec{y},\vec{\eta}) \mapsto (\vec{x},\vec{\xi})$ の Jacobi 行列式

$$J := \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_n} & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}$$

が恒等的に 1 に等しいことを示せば体積が保存されることが言える. $t=0$ では明らかに $J=1$ なので, J の解軌道に沿う微分が 0 となることを言えばよい. 解軌道に沿う時間微分は初期値 y, η と独立な偏微分であることに注意すると, これらと順序交換できる. 行列式の微分は一つの行だけを微分したものの行列式の和に等しいから,

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dt} &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{d}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_n} & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{d}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{d}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \eta_n} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{d}{dt}\frac{\partial \xi_n}{\partial y_n} & \frac{d}{dt}\frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{d}{dt}\frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{dx_1}{dt} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \eta_n}\frac{dx_1}{dt} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{d\xi_n}{dt} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \eta_n}\frac{d\xi_n}{dt} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial H}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial \eta_n}\frac{\partial H}{\partial \xi_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_n} \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial H}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial}{\partial \eta_n}\frac{\partial H}{\partial x_n} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ここで, 例えば,

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{\partial H}{\partial \xi_1} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_j}\frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial \xi_1} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_k}{\partial y_j}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_k \partial \xi_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta_j}\frac{\partial H}{\partial \xi_1} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial \eta_j}\frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial \xi_1} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_k}{\partial \eta_j}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_k \partial \xi_1}$$

なので, 最後の辺の最初の行列式は, 第 1 行の成分が $k=1$ を除き他の行の一次結合となっているので, その分を取り去れば,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial \xi_1} J$$

に等しい. 残りの行列式も同様で, 結局,

$$\frac{dJ}{dt} = \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial \xi_k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_k \partial x_k}\Big) J = 0$$

を得る. □

定理 5.1 により, Hamilton 力学系は, エネルギー曲面 $H(\vec{x},\vec{\xi}) = E$ の流れを誘導する. もしエネルギー曲面に誘導されたベクトル場が特異点を持たなければ, エネルギー曲面は特異点の無いベクトル場が存在し得るような曲面でなければならない. このことは, H 以外の第一積分についても言える. Hamilton 系 (5.1) の第一積分とは, (5.1) の解軌道に沿って一定となるような函数 $F(\vec{x},\vec{\xi})$ のことであった. より一般に次が成り立つ：

補題 5.3 Hamilton 系 (5.1) の解軌道に沿う量 $F(\vec{x},\vec{\xi})$ の時間変化率は F と H の Poisson 括弧式

$$\{F,H\} := \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_j}\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial \xi_j}\Big)$$

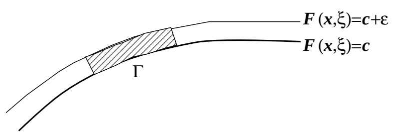
で与えられる. 従って特に, $F(\vec{x},\vec{\xi})$ が (5.1) の第一積分であるための必要かつ十分な条件は, $\{F,H\}=0$ となることである.

証明
$$\frac{dF}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial \xi_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \xi_j}\frac{\partial H}{\partial x_j}=\{F,H\}$$
による. □

明らかに $\{H,H\}=0$ なので, 定理 5.1 はこの定理の特別な場合となる.

補題 5.4 第一積分 $F_1,\dots,F_k$ が函数的に独立なら, $F_1=c_1,\dots,F_k=c_k$ で定まる余次元 k の多様体[1] M の上に (5.1) から誘導される力学系 g^t に対して, M 上の適当な正値密度函数 ρ と $2n-k$ 次元体積要素 dA が存在し, ρdA は g^t に関して不変な測度となる. すなわち, M 上の任意の $2n-k$ 次元領域 Γ に対し,
$$\int_{\Gamma}\rho dA=\int_{g^t(\Gamma)}\rho dA$$

証明 仮定により $F_1,\dots,F_k$ に適当な函数 $u_{k+1},\dots,u_{2n}$ を追加して, M に含まれるある点の近傍において相空間 $\boldsymbol{R}^{2n}$ の局所座標とすることができる. このとき, 函数行列式
$$\frac{\partial(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial(F_1,\dots,F_k,u_{k+1},\dots,u_{2n})}\neq 0$$
であって,
$$\Gamma_\varepsilon:=\{(\vec{x},\vec{\xi})\mid c_1<F_1<c_1+\varepsilon,\dots,c_k<F_k<c_k+\varepsilon,(u_{k+1},\dots,u_{2n})\in\Gamma\}$$
と置くとき, 全空間における積分の不変性と F_j の不変性より



$$\begin{aligned}&\int_{g^t(\Gamma_\varepsilon)}dx_1\cdots dx_n d\xi_1\cdots d\xi_n\\&\quad=\int_{c_1}^{c_1+\varepsilon}dF_1\cdots\int_{c_k}^{c_k+\varepsilon}dF_k\int_{g^t(\Gamma)}\frac{\partial(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial(F_1,\dots,F_k,u_{k+1},\dots,u_{2n})}du_{k+1}\cdots du_{2n}\end{aligned}$$
は t によらず一定であるが, ここで, ε^k で割って $\varepsilon\to 0$ とすれば, 上は
$$\int_{g^t(\Gamma)}\left.\frac{\partial(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial(F_1,\dots,F_k,u_{k+1},\dots,u_{2n})}\right|_{F_1=c_1,\dots,F_k=c_k}du_{k+1}\cdots du_{2n}$$

[1]幾何図形は 1 次元なら曲線, 2 次元なら曲面, 余次元 1 (すなわち全空間の次元から一つだけ下がった次元を持つ) なら超曲面と呼ばれるが, それ以外のものに対する適当な名前がないので, ここではより抽象的な用語である多様体を用いる. 本当の多様体はユークリッド空間内に存在する必要は無いので, ここで対象となるものをていねいに言えば“ユークリッド空間に埋め込まれた $2n-k$ 次元多様体”となる.

に近付くから, これも t によらないことが分かる. よって, 少なくともこの座標系が意味を持つ範囲では

$$\rho = \left.\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial(F_1,\ldots,F_k,u_{k+1},\ldots,u_{2n})}\right|_{F_1=c_1,\ldots,F_k=c_k}, \qquad dA = du_{k+1}\cdots du_{2n}$$

ととればよいことが分かる. ρ および dA は M 上の局所座標 $u_{k+1},\ldots,u_{2n}$ に依存するが, これを別のもの, 例えば $v_{k+1},\ldots,v_{2n}$ と取り替えたときも同様の議論で

$$\widetilde{\rho} = \left.\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial(F_1,\ldots,F_k,v_{k+1},\ldots,v_{2n})}\right|_{F_1=c_1,\ldots,F_k=c_k}, \qquad d\widetilde{A} = dv_{k+1}\cdots dv_{2n}$$

を用いて不変測度 $\widetilde{\rho}d\widetilde{A}$ が得られる. 両者の関係は,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}d\widetilde{A} &= \left.\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial(F_1,\ldots,F_k,v_{k+1},\ldots,v_{2n})}\right|_{F_1=c_1,\ldots,F_k=c_k} dv_{k+1}\cdots dv_{2n} \\
&= \left.\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial(F_1,\ldots,F_k,u_{k+1},\ldots,u_{2n})}\right|_{F_1=c_1,\ldots,F_k=c_k} \left.\frac{\partial(F_1,\ldots,F_k,u_{k+1},\ldots,u_{2n})}{\partial(F_1,\ldots,F_k,v_{k+1},\ldots,v_{2n})}\right|_{F_1=c_1,\ldots,F_k=c_k} dv_{k+1}\cdots dv_{2n} \\
&= \left.\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial(F_1,\ldots,F_k,u_{k+1},\ldots,u_{2n})}\right|_{F_1=c_1,\ldots,F_k=c_k} \frac{\partial(u_{k+1},\ldots,u_{2n})}{\partial(v_{k+1},\ldots,v_{2n})} dv_{k+1}\cdots dv_{2n} \\
&= \rho du_{k+1}\cdots du_{2n} = \rho dA
\end{aligned}$$

となる. ここで, F_j が M に沿って定数なので, それを M の局所座標で微分したものは 0 となり, 従って

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_k,u_{k+1},\ldots,u_{2n})}{\partial(F_1,\ldots,F_k,v_{k+1},\ldots,v_{2n})} = \begin{vmatrix} E & O \\ * & \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial v_j}\right) \end{vmatrix} = \frac{\partial(u_{k+1},\ldots,u_{2n})}{\partial(v_{k+1},\ldots,v_{2n})}$$

となることを用いた. よってこの構成法で座標近傍ごとに局所的に作った不変測度 ρdA は隣同志繋がり, 結局多様体 M 上の大域的に定義された g^t で不変な体積要素となる. □

以下 ρdA を単に $d\mu$ と書こう. これを力学系 g^t の正値な不変測度と呼ぶ.

次の定理は, 特異点の無い Hamilton ベクトル場が閉じたエネルギー曲面上に誘導する力学系が複雑なものになることを示唆している.

定理 5.5 (Poincaré の回帰定理) 多様体 M 上のベクトル場が特異点を持たず, かつこれから定まる M 上の力学系 g^t には正値不変測度 $d\mu$ が存在するとする. このとき, もしこの測度で測った M の総体積 $\displaystyle\int_M d\mu < \infty$ なら, M 上の任意の閉集合[2] Γ と任意の $\tau > 0$ に対し, 部分集合 $\Gamma' \subset \Gamma$ で $\displaystyle\int_{\Gamma\setminus\Gamma'} d\mu = 0$ なるものを適当に選べば, $\forall \mathrm{P} \in \Gamma'$ については $g^{k\tau}(\mathrm{P})$, $k = 1, 2, \ldots$ の中に Γ 内に戻って来るものが無限個存在するようにできる.

証明　以下簡単のため集合 $\Gamma \subset M$ に対し $\mu(\Gamma) := \displaystyle\int_\Gamma d\mu$ と略記する. $\mu(\Gamma) > 0$ と仮定してよい. (そうでなければ $\Gamma' = \emptyset$ は条件を満たす.) まず, $\mathrm{P} \in \Gamma$ で, その τ-離散軌道 $g^{k\tau}(\mathrm{P})$ のうちの

[2] ユークリッド空間の普通の積分の場合の類推から, 積分 $\int_\Gamma d\mu$ が意味を持つために集合 Γ の可測性を仮定しなければと思う人も居るであろうが, Lebesgue 式の積分論では Γ を閉集合と仮定すれば自然に可測になる. 定理の本質を理解するためには Γ としてある点の (局所座標の意味での) ε-近傍のようなごく普通の集合を考えておけば十分であるが, 以下の証明では最後に測度 $d\mu$ の可算加法性を少しだけ使う.

無限個の点が Γ に戻って来るようなものが一つは存在することを示そう. 明らかに $g^{i\tau}(g^{j\tau}(\Gamma)) = g^{(i+j)\tau}(\Gamma)$ が成り立ち, また測度 $d\mu$ の g^t-不変性により

$$\mu(\Gamma) = \mu(g^\tau(\Gamma)) = \cdots = \mu(g^{k\tau}(\Gamma)) = \cdots$$

よって, ある $i \neq j$ について $\mu(g^{i\tau}(\Gamma) \cap g^{j\tau}(\Gamma)) > 0$ となる. なぜなら, もしすべての対について $\mu(g^{i\tau}(\Gamma) \cap g^{j\tau}(\Gamma)) = 0$ なら, 一般に $\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ となることを用いると, 任意の N について

$$\mu\Big(\bigcup_{k=0}^{N} g^{k\tau}(\Gamma)\Big) = \mu\Big(\Gamma \cup \bigcup_{k=1}^{N} g^{k\tau}(\Gamma)\Big) = \mu(\Gamma) + \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} g^{k\tau}(\Gamma)\Big) - \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} \{g^{k\tau}(\Gamma) \cap \Gamma\}\Big)$$

において

$$0 \leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} \{g^{k\tau}(\Gamma) \cap \Gamma)\}\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(g^{k\tau}(\Gamma) \cap \Gamma)) = 0$$

より, 上は

$$\mu(\Gamma) + \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N} g^{k\tau}(\Gamma)\Big)$$

に等しい. これを繰り返すと,

$$\mu\Big(\bigcup_{k=0}^{N} g^{k\tau}(\Gamma)\Big) = \cdots = \sum_{k=0}^{N} \mu(g^{k\tau}(\Gamma)) = (N+1)\mu(\Gamma)$$

となるが, これはもちろん $\mu(M) < \infty$ で抑えられているので $N \to \infty$ のとき矛盾となる. そこで, 今 $i < j$ なる対について $\mu(g^{i\tau}(\Gamma) \cap g^{j\tau}(\Gamma)) > 0$, とすれば, 測度の g^t-不変性により

$$0 < \mu(g^{i\tau}(\Gamma) \cap g^{j\tau}(\Gamma)) = \mu(g^{i\tau}(\Gamma \cap g^{(j-i)\tau}(\Gamma))) = \mu(\Gamma \cap g^{(j-i)\tau}(\Gamma))$$

今, $\tau_1 = (j-i)\tau$, $\Gamma_1 = \Gamma \cap g^{\tau_1}(\Gamma)$ と置き, Γ_1 から出発して同様に論ずると, ある $\tau_2 = k_2\tau$ について $\Gamma_2 := \Gamma_1 \cap g^{\tau_2}(\Gamma_1)$ は $d\mu$ で測った測度が正となり, Γ_2 の点から出発すれば, τ_2 時刻後に Γ_1 に戻り, 更に τ_1 時刻後に Γ に戻る. この構成を続けると, 閉集合の減少列

$$\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \cdots \supset \Gamma_k \supset \cdots$$

が得られ, Γ_k の点から出発すれば, その τ-離散軌道の少なくとも k 個は Γ 内に戻って来る. 位相空間論でよく知られているように, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \neq \emptyset$ であり, この共通部分に属する点は任意の Γ_k に属するので, 結局 τ-離散軌道が無限回 Γ に戻って来る.

次に, このような回帰性を持つ Γ の点全体が成す部分集合を Γ' と置くとき,

$$\Gamma \setminus \Gamma' = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Sigma_N$$
$$\Sigma_N := \{\mathrm{P} \in \Gamma \mid g^{k\tau}(\mathrm{P}) \text{ のうち高々 } N \text{ 個しか} \Gamma \text{に戻ってこない} \}$$

と分解できる. このとき $\mu(\Sigma_N) = 0$ である. なぜなら, もし $\mu(\Sigma_N) > 0$ だと, Σ_N を Γ だと思って前半の議論を適用すれば, Σ_N の中に, その τ-離散軌道が無限回 Σ_N に戻って来るようなものが存在することが言え, 矛盾となるからである. Lebesgue 式の測度論では, 測度 0 の集合は可算無限個集めても測度 0 なので, これから $\mu(\Gamma \setminus \Gamma') = 0$ が言える. □

5.2 Lagrange 函数と変分法

変分法というのは, ある条件を満たす函数の中で, 積分値などの汎函数を最小にするものを探す数学的理論のことであった. その概要と典型的な例を既に第 1 章で述べた. 力学の問題の解をある種の量を最小にするという条件で記述しようという試みは早くから有り, 最初は Maupertuis の最小作用の原理のように神の摂理を表すというような解釈が与えられていたが, Lagrange が Lagrange 函数というものを導入し, その経路に関する積分値の停留条件から Newton の運動方程式が導かれることを示し, かつこの定式化が座標によらないことから, 座標変換の計算にも有力な道具を提供することが明らかにされて, 数学的研究の立場からも大切な道具となった. ポテンシャル $U(\vec{x})$ が定める保存力場における質点の運動に対する Lagrange 函数は

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(\vec{x})$$

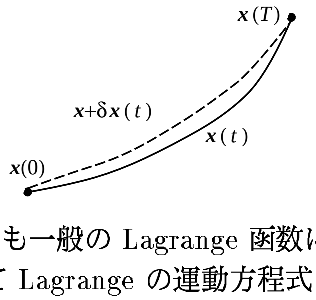
で与えられる. ここに, $\vec{x}$ の時間微分を Newton 流に $\dot{\vec{x}}$ で表している. これに対する積分

$$\int_0^T L(\vec{x},\dot{\vec{x}})dt \tag{5.2}$$

の停留条件から Newton の運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla_{\vec{x}}U(\vec{x})$$

が出て来ることも第 1 章で示した. 最も基本的な調和振動子の場合は $U(\vec{x}) = \dfrac{k}{2}x^2$ なので, $L(x,\dot{x}) = \dfrac{m}{2}\dot{x}^2 - \dfrac{k}{2}x^2$ のタイプであり, この変分問題は正値二次式の最小値を求める類のものとは全く異なり, 双曲放物面のような鞍点型の函数の停留値を求めるタイプであることを注意しておこう. エネルギー $H(x,\xi) = \dfrac{1}{2m}\xi^2 + \dfrac{k}{2}x^2$ の方は正定値だが, この積分を変分計算しても運動方程式は出て来ないのである.



ポテンシャルを持つ保存力場よりも一般の Lagrange 函数について, 積分 (5.2) の変分に対する Euler-Lagrange の微分方程式として Lagrange の運動方程式を導いておこう.

$$\begin{aligned}\delta\int_0^T L(\vec{x},\dot{\vec{x}})dt &= \int_0^T \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i\Big)dt = \int_0^T \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big)dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^T \Big(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\Big)\delta x_i dt = 0\end{aligned}$$

ここで δx_i が任意だから,

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\Big) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad i = 1,\dots,n \tag{5.3}$$

Lagrange の運動方程式は Hamilton 系に容易に変換される：

補題 5.12 $L(\vec{x},\dot{\vec{x}})$ を任意の函数とするとき, Lagrange の運動方程式 (5.3) は

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \vec{\xi}, \qquad H(\vec{x},\vec{\xi}) := \text{“}\vec{\xi}\cdot\dot{\vec{x}} - L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) \text{ を } \vec{x},\ \vec{\xi} \text{ で書き直したもの ”} \tag{5.4}$$

で定義された Hamilton 函数 $H(\vec{x},\vec{\xi})$ に対する Hamilton の方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \nabla_{\vec{\xi}} H, \qquad \frac{d\vec{\xi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$$

と同値である.

証明 上の変換 (5.4) で, 独立変数を $\vec{x}, \vec{\xi}$ に取り替えたときの偏微分計算では, $\dot{\vec{x}}$ は $\vec{x}, \vec{\xi}$ の函数となるから,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

ここで Euler 方程式 (5.3) より

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\Big) = \frac{d\xi_i}{dt}$$

だから,

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

次に

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \dot{x}_i + \xi_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial L}{\partial x_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \xi_i} = \dot{x}_i$$

□

変分法によって Hamilton の運動方程式を導く方法を示そう:

$$L(\vec{x},\frac{d\vec{x}}{dt},\vec{\xi}) := \vec{\xi}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} - H(\vec{x},\vec{\xi})$$

と置く. 積分

$$\int_0^T L(\vec{x},\frac{d\vec{x}}{dt},\vec{\xi})dt$$

の変分をとると,

$$\begin{aligned}
\delta\int_0^T L(\vec{x},\frac{d\vec{x}}{dt},\vec{\xi})dt &= \int_0^T \Big(\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\delta\vec{\xi} + \vec{\xi}\cdot\frac{d\delta\vec{x}}{dt} - \nabla_{\vec{x}}H\cdot\delta\vec{x} - \nabla_{\vec{\xi}}H\cdot\delta\vec{\xi}\Big)dt \\
&= \int_0^T \Big(\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\delta\vec{\xi} - \frac{d\vec{\xi}}{dt}\cdot\delta\vec{x} - \nabla_{\vec{x}}H\cdot\delta\vec{x} - \nabla_{\vec{\xi}}H\cdot\delta\vec{\xi}\Big)dt \\
&= \int_0^T \Big\{\Big(\frac{d\vec{x}}{dt} - \nabla_{\vec{\xi}}H\Big)\cdot\delta\vec{\xi} - \Big(\frac{d\vec{\xi}}{dt} + \nabla_{\vec{x}}H\Big)\cdot\delta\vec{x}\Big\}dt
\end{aligned}$$

ここで始点と終点は固定されているという条件の下で部分積分した. $\delta\vec{x}, \delta\vec{\xi}$ が任意だから, 変分法の基本原理によりそれらの係数を 0 と置いて

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \nabla_{\vec{\xi}}H, \quad \frac{d\vec{\xi}}{dt} = -\nabla_{\vec{x}}H$$

と Hamilton の方程式が導かれる. ここで変分を計算した積分

$$S(t,\vec{x},\vec{\eta}) = \vec{y}\cdot\vec{\eta} + \int_0^t \{\vec{\xi}(s)\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}(s) - H(\vec{x}(s),\vec{\xi}(s)\}ds$$

は, 作用と呼ばれる量である. このことから相空間で記述された運動は作用を最小にするような経路で実現されると言える. これを最小作用の法則という.

上の L は三種の変数の組 $\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{\xi}$ の函数であり, 真の Lagrange 函数になっていない. 保存力場の場合のように $\vec{x} = m\dot{\vec{x}}$ という関係式が最初から仮定できる場合を除き, 残念ながら $\vec{\xi}$ と $\dot{\vec{x}}$ の間の関係は予め決められないので, Hamilton 函数から Lagrange 函数を作り出す方法は一意的ではない.

Lagrange の定式化は, 運動方程式の許される変換を劇的に増やし, これによって正準変換の理論を誕生させ解析力学に道を開いたものだが, 現代ではどうせ解けない運動方程式を研究する代わりに, 変分法の停留値の存在を直接研究することにより, 運動方程式の解の存在を示すという使い方もされるようになった. 次章で, 3 体問題に関するそのような例を見るであろう.

5.3 正準変換

これからの計算では微分形式 (丁寧にいうと外微分形式) を使うのが見通しを良くする. 1 次の微分形式とは

$$\sum_{j=1}^n a_j(\vec{x},\vec{\xi})dx_j + \sum_{j=1}^n b_j(\vec{x},\vec{\xi})d\xi_j \tag{5.5}$$

の形をしたもののことである. また, 2 次の微分形式とは

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x},\vec{\xi})dx_i\wedge dx_j + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(\vec{x},\vec{\xi})dx_i\wedge d\xi_j + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(\vec{x},\vec{\xi})d\xi_i\wedge d\xi_j$$

の形のもののことである. 変数が二つのグループに分かれているので, 表記が面倒になっているが, 要するに独立変数に d を付けたものの外積である. 変数の記号を $\xi_j = x_{n+j}$ と書き直せばシグマ記号が使えるようになる. ここで外積 $\wedge$ は結合律と多重線型性と交代性を満たすものとする：A, B, C を微分形式とするとき,

1) $(A\wedge B)\wedge C = A\wedge(B\wedge C)$,
2) $(\lambda A+\mu B)\wedge C = \lambda(A\wedge C)+\mu(B\wedge C)$,
3) A, B が一次の微分形式のとき $A\wedge B = -(B\wedge A)$.

従って, 因子を一次ずつ交換すれば

3′) p 次の微分形式 A と q 次の微分形式 B に対し, $A\wedge B = (-1)^{pq}B\wedge A$

これらの性質を帰納的に使って, 3 次以上の微分形式が定義される. また函数は 0 次の微分形式と解釈する. 座標変換は 1 次の微分形式に対しては共変ベクトル dx_j の座標変換則を適用し, 一般の微分形式に対しては上の諸性質を用いて自然に計算する. 例えば, 一次の微分形式 (5.5) におい

て, $\vec{x}=\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta})$, $\vec{\xi}=\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta})$ と変換すれば,

$$\sum_{j=1}^n a_j(\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta}),\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta}))\sum_{k=1}^n\Big(\frac{dx_j}{dy_k}dy_k+\frac{dx_j}{d\eta_k}d\eta_k\Big)+\sum_{j=1}^n b_j(\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta}),\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta}))\sum_{k=1}^n\Big(\frac{d\xi_j}{dy_k}dy_k+\frac{d\xi_j}{d\eta_k}d\eta_k\Big)$$
$$=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\Big(a_j(\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta}),\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta}))\frac{dx_j}{dy_k}+b_j(\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta}),\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta}))\frac{d\xi_j}{dy_k}\Big)dy_k$$
$$+\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\Big(a_j(\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta}),\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta}))\frac{dx_j}{d\eta_k}+b_j(\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta}),\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta}))\frac{d\xi_j}{d\eta_k}\Big)dy_k$$

となる.

最後に, 外微分作用素 d を, $x_{n+j}=\xi_j$ なる表記法を用いて

$$\omega=\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{2n}a_{i_1,\dots,i_m}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}\quad \text{に対し}\quad d\omega=\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial a_{i_1,\dots,i_m}}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}$$

で定義する. この定義は座標に依存しているように見えるが, 実はどんな座標を使っても同じ結果が得られることが知られている. これは少なくとも, 0 次微分形式, すなわち函数の外微分, すなわち普通の全微分については微積で学んだことと同等である. また d を続けて 2 回施せば 0 になることが容易に分かる：

$$\begin{aligned}d^2\omega &= d\Big(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial a_{i_1,\dots,i_m}}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}\Big)\\ &= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial^2 a_{i_1,\dots,i_m}}{\partial x_k\partial x_j}dx_k\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{\partial^2 a_{i_1,\dots,i_m}}{\partial x_k\partial x_j}dx_k\wedge dx_j=-\dfrac{\partial^2 a_{i_1,\dots,i_m}}{\partial x_k\partial x_j}dx_j\wedge dx_k$ に注意すると, j,k に関する和は二つずつ打ち消し合うことが分かる.

Hamilton 系が定める力学系の最大の特徴は次の定理である：

定理 5.6 Hamilton 力学系 g^t は相空間の正準変換となる. すなわち, 正準 2-形式

$$d\omega:=\sum_{j=1}^n d\xi_j\wedge dx_j \tag{5.6}$$

は t について一定である.

記号 $d\omega$ は, 正準 2-形式が, 正準 1-形式

$$\omega:=\sum_{j=1}^n \xi_j\wedge dx_j$$

の外微分である, という事実に基づく. 外微分演算が座標変換と可換なので, ω が不変なら $d\omega$ も不変なことはただちに出るが, ω 自身は Hamiltonian $H(\vec{x},\vec{\xi})$ が $\vec{\xi}$ の同次函数でないと, 一般には g^t で保存されない.

証明　独立変数を時刻 t, および初期値 $\vec{y}, \vec{\eta}$ に取ろう. このとき, 任意の時刻 t における $\vec{x}, \vec{\xi}$ は $\vec{y}, \vec{\eta}$ の函数である. その意味で微分計算をすると

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_k} d\eta_k \Big) \wedge \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} d\eta_k \Big)$$

t に関する微分は y_k や η_k に関する微分と独立, 従って順序交換でき,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} d\omega &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{d\xi_j}{dt} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \eta_k} \frac{d\xi_j}{dt} d\eta_k \Big) \wedge \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} d\eta_k \Big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_k} d\eta_k \Big) \wedge \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{dx_j}{dt} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \eta_k} \frac{dx_j}{dt} d\eta_k \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial H}{\partial x_j} dy_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \eta_k} \frac{\partial H}{\partial x_j} d\eta_k \Big) \wedge \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_k} d\eta_k \Big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial \eta_k} d\eta_k \Big) \wedge \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} dy_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \eta_k} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} dy_k \Big) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} d\Big(\frac{\partial H}{\partial x_j} \Big) \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge d\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_j} \Big)
\end{aligned}$$

ここで $d\Big(\dfrac{\partial H}{\partial x_j}\Big)$ 等はどの座標系で計算しても同じだという事実を使うと, 上は

$$= -\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_j} dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_k \partial x_j} d\xi_k \Big) \wedge dx_j + \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial \xi_j} dx_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_k \partial \xi_j} d\xi_k \Big)$$

ここで 2 階微分の順序が交換できることと $dx_j \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_j$ 等々を使うと,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_j} dx_j \wedge dx_k = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_k \partial \xi_j} d\xi_j \wedge d\xi_k = 0$$

となる. また残りの二つの項は添え字を入れ換えると打ち消し合うことが容易に分かる. よって上の最後の辺はすべて 0 になるから, $d\omega$ は解軌道に沿って一定である. □

問 **5.1**　$H(\vec{x}, \vec{\xi})$ が $\vec{\xi}$ の成分について同次式のとき (通常の力学系の運動エネルギーではこうなっている), 一次微分形式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i \wedge dx_i$ が Hamilton 系の解軌道に沿って一定なことを示せ. ［ヒント：軌道に沿って $dH = 0$ なることと, m 次同次式 $f(\vec{\xi})$ に対する Euler の等式：

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = m f(\vec{\xi})$$

を用いる.］

注意　定理 5.6 から Liouville の定理が従う. 実際, 正準 2-形式 $d\omega$ が g^t で不変なことから,

$$(d\omega)^n := \underbrace{d\omega \wedge d\omega \wedge \cdots \wedge d\omega}_{n} = n!\, d\xi_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n \wedge dx_n$$

も g^t で不変なことが直ちに従うが, これを初期値の座標で書き直せば,

$$= n!\,\frac{\partial(\xi_1, x_1, \ldots, \xi_n, x_n)}{\partial(\eta_1, y_1, \ldots, \eta_n, y_n)} d\eta_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge d\eta_n \wedge dy_n$$

となるからである. 最後の式は, 行列式の列ベクトルに関する多重線型性と交代性が, 外積の対応する性質とちょうど一致しており, 従って

$$(a_{11}\vec{e}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n) \wedge \cdots \wedge (a_{1n}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n) = \det(a_{ij})\vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

となることから従う.

我々は運動方程式の取り扱いを易しくするために, 位置座標と運動量座標を独立変数として導入し, 運動方程式を一階の連立系にしたのであるが, 正準変換の理論は元来の力学系からそうやって生ずる相空間の流れは, 最初から $2n$ 変数を同等の座標とみなした $\boldsymbol{R}^{2n}$ の勝手な力学系には無い, 種々の拘束条件があるということが分かって来た. 実際, 位置と運動量は元の力学系では独立な量では有り得ない. 位置座標に

$$y_i = \Phi_i(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

という座標変換を施したときの, 運動量座標の変換がどうなるかを見てみよう. ポテンシャル $U(\vec{x})$ を持つ基本的な保存系の場合に, まず単純に Newton の運動方程式を変換すると,

$$0 = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + U_{x_i} = m_i \frac{d}{dt}\Big(\frac{dx_i}{dt}\Big) + U_{x_i} = m_i \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dt}\Big) + \sum_{j=1}^n U_{y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

これを $\dfrac{d^2 y_j}{dt^2}$ について解いても, きれいな形にはならない. いわゆる慣性力が生じてしまうからである. そこで Lagrange 函数を用いて変分法的定式化で座標変換を計算してみると

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \int_0^T \Big\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i}\Big(\frac{d\dot{x}_i}{dt}\Big)^2 - U(\vec{x})\Big\} dt = \delta \int_0^T \Big\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i}\Big(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\dot{y}_l\Big)^2 - U(\Phi^{-1}(\vec{y}))\Big\} dt \\
&= \int_0^T \Big\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\Big(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\dot{y}_l\Big) \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_j \partial y_k}\dot{y}_k \delta y_j + \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\Big(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\dot{y}_l\Big) \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{d\delta y_j}{dt} \\
&\qquad - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\delta y_j \Big\} dt \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\Big(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\dot{y}_l\Big) \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_j \partial y_k}\dot{y}_k - \frac{d}{dt}\Big\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\Big(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\dot{y}_l\Big)\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big\} \\
&\qquad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big] \delta y_j dt
\end{aligned}$$

故に Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\Big\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\Big(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\dot{y}_l\Big)\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big\} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\Big(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\dot{y}_l\Big) \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_j \partial y_k}\dot{y}_k - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

となるので,

$$\eta_j = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\Big(\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\dot{y}_l\Big)\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}, \quad j = 1, \ldots, n$$

とおけば, 正準方程式になりそうである. 以上の考察から, 位置座標の変数変換から誘導される相空間の変換としては

$$\vec{y} = \vec{\Phi}(\vec{x}), \quad \vec{\eta} = {}^tD\Phi(x)^{-1}\vec{\xi} \quad \left(D\Phi(x) = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right) \text{ は Jacobi 行列}\right)$$

と定義するのが妥当なことが推測されるが, これは実際に正準変換となっている. 実は更に強く

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \wedge dy_i = \sum_{i=1}^n d\eta_i \wedge \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} d\eta_i\Big) \wedge dx_j = \sum_{j=1}^n \xi_j \wedge dx_i$$

も成り立つ. この特別な場合として, 線型座標変換がある：

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad \xi_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \eta_j \tag{5.7}$$

しかし, 正準変換の理論は, もちろん, 座標変換よりも一般の変数変換を用いて力学系を単純化するねらいを持つものである. 特に, 位置座標と運動量座標の交換などは, 元来の力学では想像もできない種類の変換である：

補題 5.7 $i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n$ を $1, 2, \ldots, n$ の順列とするとき, 次の線型写像は正準変換となる：

$$x_{i_1} = y_{i_1}, \ldots, \ldots, x_{i_k} = y_{i_k}, \quad \xi_{i_1} = \eta_{i_1}, \ldots, \ldots, \xi_{i_k} = \eta_{i_k},$$
$$x_{i_{k+1}} = \eta_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n} = \eta_{i_n}, \quad \xi_{i_{k+1}} = -y_{i_{k+1}}, \ldots, \xi_{i_n} = -y_{i_n}$$

より一般に, 線型変換

$$\vec{x} = A\vec{y} + B\vec{\eta}, \quad \vec{\xi} = C\vec{y} + D\vec{\eta}$$

が正準変換となるためには,

$${}^tAC = {}^tCA, \quad {}^tBD = {}^tDB, \quad {}^tDA - {}^tBC = I$$

を満たすことが必要かつ十分である. ここに I は単位行列とする.

実際,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (C_{ij} dy_j + D_{ij} d\eta_j) \wedge \sum_{k=1}^n (A_{ik} dy_k + B_{ik} d\eta_k) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} A_{ik} dy_j \wedge dy_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (D_{ij} A_{ik} - C_{ik} B_{ij}) d\eta_j \wedge dy_k \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} B_{ik} d\eta_j \wedge d\eta_k \\
&= \sum_{i=1}^n d\eta_i \wedge dy_i
\end{aligned}$$

から, 未定係数法で上が得られる. 特に, 最初の項については, 交代性により,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}A_{ik}dy_j \wedge dy_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(C_{ij}A_{ik} - C_{ik}A_{ij})dy_j \wedge dy_k = 0$$

となり, この係数行列は歪対称行列 ${}^tCA - {}^tAC$ に一致することに注意. (5.7) は上の変換の特別な場合であり, $B = C = O$ となっており, 従って $D = {}^tA^{-1}$ である.

特に, x-系統の座標と ξ-系統の座標をそっくり入れ換えるもの

$$x_1 = \eta_1, \ldots, \ldots, x_n = \eta_n, \quad \xi_1 = -y_1, \ldots, \xi_n = -y_n$$

を Legendre 変換と呼ぶ. これも上の特別な場合で, $A = D = 0$, $B = I$, $C = -I$ に相当する. Legendre 変換はしばしば Fourier 変換の幾何学版と言われる. ここでは上のように変数の一部だけを入れ換えるものを部分 Legendre 変換と呼ぼう. これは部分 Fourier 変換の幾何学版であると言える.

曲がった (すなわち, 線型写像でない) 正準変換を導入するには, 一般に母函数を使うのが便利である：

補題 5.8 函数 $S(\vec{x}, \vec{\eta})$ は混合 Hesse 行列 $\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \eta_j}\right)$ が非退化であるようなものとする. このとき

$$\vec{y} = \nabla_{\vec{\eta}} S, \quad \vec{\xi} = \nabla_{\vec{x}} S \tag{5.8}$$

で対応 $(\vec{y}, \vec{\eta}) \leftrightarrow (\vec{x}, \vec{\xi})$ を定めるとき, これは正準変換となる.

証明 Hesse 行列の条件は (5.8) の一つ目が $\vec{x}$ について, あるいは二つ目が $\vec{\eta}$ について局所的に解けるための条件である (陰函数定理). 正準 2-形式を計算すると

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_i &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}dx_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}d\eta_j\Big) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_i}dx_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \eta_j}\frac{\partial S}{\partial x_i}d\eta_j\Big) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \eta_j}\frac{\partial S}{\partial x_i}d\eta_j \wedge dx_i = \sum_{j=1}^{n} d\eta_j \wedge \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial \eta_j}dx_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} d\eta_j \wedge \Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial \eta_j}dx_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \eta_i}\frac{\partial S}{\partial \eta_j}d\eta_i\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} d\eta_j \wedge \Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}dx_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial \eta_i}d\eta_i\Big) = \sum_{j=1}^{n} d\eta_j \wedge dy_j
\end{aligned}$$

□

(5.8) を満たす $S(\vec{x}, \vec{\eta})$ をこのようにして定まる正準変換の母函数と呼ぶ.

問 5.2 位置座標の変数変換 $\vec{y} = \Phi(\vec{x})$ から誘導される正準変換の母函数を示せ. ［解：$S(\vec{x}, \vec{\eta}) = \Phi(\vec{x}) \cdot \vec{\eta}$］

一般の正準変換は局所的には母函数を用いた変換と部分 Legendre 変換の合成として表される：

補題 **5.9** 1) $(\vec{x},\vec{\xi}) \leftrightarrow (\vec{y},\vec{\eta})$ が正準変換で, かつ $\vec{x}=\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta})$ が $\vec{y}$ につき解けるようなものなら, この変換で対応する両座標の 2 点の十分小さい近傍では局所的に母函数 $S(\vec{x},\vec{\eta})$ が存在して (5.8) のように表される.

2) 一般の正準変換に対しては, $i_1,\dots,i_k$ を適当に選べば, $\vec{x}=\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta})$ が $y_{i_1},\dots,y_{i_k},\eta_{i_{k+1}},\dots,\eta_{i_n}$ について局所的に解け, 後半の座標を空間座標と入れ換える部分 Legendre 変換と上のような母函数を持つ正準変換の合成として書くことができる.

証明　対応 $(\vec{x},\vec{\xi}) \leftrightarrow (\vec{y},\vec{\eta})$ から, $\vec{x}=\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta})$, $\vec{\xi}=\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta})$ と書けるが, 仮定により前者が $\vec{y}=\vec{y}(\vec{x},\vec{\eta})$ と $\vec{y}$ につき解けるので, これを後者に代入して

$$\vec{\xi}=\vec{\xi}(\vec{y},\vec{\eta})=\vec{\xi}(\vec{y}(\vec{x},\vec{\eta}),\vec{\eta})$$

となり, 独立変数を $\vec{x},\vec{\eta}$ に取り $\vec{\xi},\vec{y}$ を表すことができ, このとき (5.8) すなわち未知函数 $S(\vec{x},\vec{\eta})$ に対する偏微分方程式系

$$\nabla_{\vec{x}}S=\vec{\xi},\quad \nabla_{\vec{\eta}}S=\vec{y}$$

は, $dS=\vec{\xi}d\vec{x}+\vec{y}d\vec{\eta}$ と書き直される. これが局所解を持つための条件は, 右辺の外微分が消えること：

$$0=d(\vec{\xi}d\vec{x}+\vec{y}d\vec{\eta})=d\vec{\xi}\wedge d\vec{x}+d\vec{y}\wedge d\vec{\eta}=d\vec{\xi}\wedge d\vec{x}-d\vec{\eta}\wedge d\vec{y} \tag{5.9}$$

であるが, 最後の量は正準変換の仮定から確かに 0 となる. このとき S は変数 $\vec{x},\vec{\eta}$ の空間 $\boldsymbol{R}^{2n}$ において適当に選んだ基点から任意の道に沿う積分

$$S(\vec{x},\vec{\eta})=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\vec{\xi}d\vec{x}+\vec{y}d\vec{\eta}$$

で計算することができる. Stokes の定理によれば, 積分可能条件 (5.9) はこの線積分が道の取り方によらないという条件に等しい.

2) $\vec{x}=\vec{x}(\vec{y},\vec{\eta})$ が $\vec{y}$ につき局所的に解けるためには, 陰函数定理により $\dfrac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}$ の階数が n となっていればよい. 一般の正準変換については, $2n$ 次の Jacobi 行列 $\dfrac{\partial(x_1,\dots,\xi_n)}{\partial(y_1,\dots,\eta_n)}$ が非退化なので, その上半分の n 行 $\dfrac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,\eta_n)}$ は最大階数 n を持ち, 従ってその適当な n 列の小行列は非退化となるから, それを使えばよい. □

次の定理は力学系の運動に伴う正準変換の母函数の生成法を与えると言う内容だが, Hamilton 型の常微分方程式系を一階偏微分方程式に直して, 変数分離法等の適用により求積する方法をも与えるもので, 19 世紀の解析力学の最大の成果の一つである.

定理 **5.10** (Hamilton-Jacobi の理論) 1) $\vec{x}(t;\vec{y},\vec{\eta})$, $\vec{\xi}(t;\vec{y},\vec{\eta})$ を Hamilton 系 (5.1) の初期値 $(\vec{y},\vec{\eta})$ に対応する初期値問題の解とすれば, $\vec{x}=\vec{x}(t;\vec{y},\vec{\eta})$ が $\vec{y}$ につき $\vec{y}=\vec{y}(t;\vec{x},\vec{\eta})$ と逆に解ける限り, 次のような解軌道に沿う線積分にそれらを代入して得られる函数

$$S(t,\vec{x},\vec{\eta}):=\vec{y}\cdot\vec{\eta}+\int_0^t\left(\vec{\xi}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}-H\right)dt\Big|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}(t,\vec{y},\vec{\eta}),\vec{y}=\vec{y}(t,\vec{x},\vec{\eta})} \tag{5.10}$$

は Hamilton-Jacobi の方程式と呼ばれる 1 階偏微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}+H(\vec{x},\nabla_{\vec{x}}S)=0,\\ S(0,\vec{x},\vec{\eta})=\vec{x}\cdot\vec{\eta}\end{cases} \tag{5.11}$$

の解となる．

2) 逆に，後者の解 $S(t,\vec{x},\vec{\eta})$ から

$$\nabla_{\vec{\eta}}S(t,\vec{x},\vec{\eta})=\vec{y},\qquad \nabla_{\vec{x}}S(t,\vec{x},\vec{\eta})=\vec{\xi} \tag{5.12}$$

と置くとき，一つ目の方程式が $\vec{x}$ について解ける限り，これから定まる $\vec{x}=\vec{x}(t,\vec{y},\vec{\eta}),\vec{\xi}=\vec{\xi}(t,\vec{y},\vec{\eta})$ は Hamilton の方程式系 (5.1) の初期値問題の解となる．

いずれの場合も可解性の仮定は $t=0$ の近くでは成立することが陰函数定理により容易に分かる．

証明　1) $\vec{x}(0;\vec{y},\vec{\eta})=\vec{y}$ なので初期値の対応の方は明らかである．(5.1) の解軌道に沿って (5.10) を微分してみよう．初期値の $\vec{y},\vec{\eta}$ は定数とみなされており, 従ってこれらと対の意味での $\dfrac{\partial}{\partial t}$ はまさに軌道に沿う時間微分に他ならないことに注意すれば

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial t}+\nabla_{\vec{x}}S\frac{d\vec{x}}{dt}\\ &= \vec{\xi}\frac{d\vec{x}}{dt}-H\end{aligned}$$

従って $\nabla_{\vec{x}}S=\vec{\xi}$ が示されれば，これより (5.11) の偏微分方程式が得られる．今，(5.10) の両辺を y_j で偏微分すれば

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}(t,\vec{x},\vec{\eta})\frac{\partial x_i}{\partial y_j}=\eta_j+\int_0^t\frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\vec{\xi}\frac{d\vec{x}}{dt}-H\Big)dt$$

ここで $\Big(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big)_{i,j=1,\dots,n}$ は Jacobi 行列で, 従って $t=0$ とすれば,

$$\Big(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\Big)\Big|_{t=0}=\Big(\frac{\partial x_i(0,\vec{y},\vec{\eta})}{\partial y_j}\Big)=I\quad\text{（単位行列）}$$

となることから, $t=0$ では $\nabla_{\vec{x}}S=\vec{\eta}=\vec{\xi}$ は成立している．そこで $\nabla_{\vec{x}}S$ と $\vec{\xi}$ が恒等的に一致することを微分方程式の解の一意性を用いて示そう. $\nabla_{\vec{x}}S$ は S を $t,\vec{x},\vec{\eta}$ の函数と見ての偏微分であるのに対し，t に関する常微分はそれを $t,\vec{y},\vec{\eta}$ の函数と見ての t に関する偏微分であることに注意しよう．よって $\vec{x}$ の偏微分と t の常微分とは可換ではなく

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial S}{\partial x_i}\Big)\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial S}{\partial x_i}\Big)\frac{dx_j}{dt}\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{dS}{dt}-\sum_{j=1}^n\frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}\Big)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial S}{\partial x_i}\Big)\frac{dx_j}{dt}\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^n\xi_j\frac{dx_j}{dt}\underline{-H}-\sum_{j=1}^n\frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}\Big)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial S}{\partial x_i}\Big)\frac{dx_j}{dt}\\ &= \sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{dx_j}{dt}\Big)\Big(\xi_j-\frac{\partial S}{\partial x_j}\Big)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\frac{dx_j}{dt}\underline{-\frac{\partial H}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^n\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}H_{\xi_j}}\\ &= \sum_{j=1}^n\frac{\partial H_{\xi_j}}{\partial x_i}\Big(\xi_j-\frac{\partial S}{\partial x_j}\Big)-H_{x_i}\end{aligned}$$

ここで微分にからむ独立変数は t の他は $\vec{x},\vec{\eta}$ なので, ξ_j を x_i で偏微分したものは 0 とは限らないことに注意しよう. H を x_i で偏微分したものも波線のようになる. さて $\dfrac{d\xi_i}{dt}=-H_{x_i}$ であった

から，引き算すれば

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\xi_i\Big)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H_{\xi_j}}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial S}{\partial x_j}-\xi_j\Big),\qquad i=1,\dots,n$$

よって $\nabla_x S-\vec{\xi}$ はこの連立線型斉次常微分方程式の 0 を 初期値とする解となり，従って恒等的に 0 に等しい．

2) $\nabla_{\vec{\eta}}S=\vec{y}$ が $\vec{x}$ について解けるかどうかは, $\vec{x}\mapsto\nabla_{\vec{\eta}}S$ を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ の写像と見たときに可逆かどうかで分かる．この写像の微分は $\Big(\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial\eta_i}\Big)$ という行列で, これは $t=0$ のとき $S(0,\vec{x},\vec{\eta})=\vec{x}\cdot\vec{\eta}$ より

$$\Big(\frac{\partial^2(\vec{x}\cdot\vec{\eta})}{\partial x_j\partial\eta_i}\Big)=\Big(\delta_{ij}\Big)=I\ \ (n\text{ 次の単位行列})$$

となるから, 陰函数定理により, $\nabla_{\vec{\eta}}S=\vec{y}$ は $t=0$ の近くでは確かに局所的に一意に解ける．これから定まる $\vec{x},\vec{\xi}$ が (5.1) を満たすことを見ればよいが，初期条件は上と同様の計算で容易に確かめられる．常微分方程式を導くため $\dfrac{\partial S(t,\vec{x},\vec{\eta})}{\partial\eta_i}=y_i$ の両辺を t で常微分（これは先に注意したように変数セット $t,\vec{y},\vec{\eta}$ に関しては t に関する偏微分と同じこと）すれば

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\eta_i}\Big)S(t,\vec{x},\vec{\eta})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial\eta_i}\frac{dx_j}{dt}=0$$

次に偏微分方程式 (5.11) の両辺を η_i で偏微分して

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\eta_i}\frac{\partial}{\partial t}\Big)S(t,\vec{x},\vec{\eta})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial\eta_i\partial x_j}(t,\vec{x},\vec{\eta})\frac{\partial H}{\partial\xi_j}(\vec{x},\nabla_x S)=0$$

この 2 式を比較し，行列 $\Big(\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial\eta_i}\Big)$ が $t=0$ の近くでは可逆なことに注意すれば

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\xi_j}(\vec{x},\nabla_x S)=\frac{\partial H}{\partial\xi_j}(\vec{x},\vec{\xi}),\quad j=1,\dots,n$$

を得る．次に，$\dfrac{\partial S}{\partial x_i}(t,\vec{x},\vec{\eta})=\xi_i$ の両辺を t で常微分して

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial^2 S}{\partial t\partial x_i}(t,\vec{x},\vec{\eta})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial x_i}(t,\vec{x},\vec{\eta})\frac{dx_j}{dt}\\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial t}\Big)(t,\vec{x},\vec{\eta})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial x_i}(t,\vec{x},\vec{\eta})\frac{\partial H}{\partial\xi_j}(\vec{x},\vec{\xi})\\
&= -\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}H(\vec{x},\nabla_{\vec{x}}S)\Big)(t,\vec{x},\vec{\eta}))+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial x_i}(t,\vec{x},\vec{\eta})\frac{\partial H}{\partial\xi_j}(\vec{x},\vec{\xi})\\
&= -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\vec{x},\vec{\xi})-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\xi_j}(\vec{x},\vec{\xi})\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}(t,\vec{x},\vec{\eta})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial x_i}(t,\vec{x},\vec{\eta})\frac{\partial H}{\partial\xi_j}(\vec{x},\vec{\xi})\\
&= -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\vec{x},\vec{\xi})
\end{aligned}$$

と，もう一つの方程式も得られる．(ここで $\dfrac{\partial}{\partial x_i}H(\vec{x},\nabla_{\vec{x}}S)$ と書いているときは, 合成函数として $H(\vec{x},\nabla_{\vec{x}}S)$ のあちこちに含まれる x_i についてすべて微分する意味を, また $\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$ と書いているときは, $\vec{x},\vec{\xi}$ の函数としての H を x_i のところだけで偏微分する意味を表していることに注意.) □

Hamilton 系, あるいは Hamilton-Jacobi の方程式が解ければ, その解を用いて (時間に依存した) 相空間の正準変換を施せば, どんな力学系も静止系に帰着してしまう. 逆に言えば, 力学系を静止系に帰着させるような正準変換を求めることが, 運動方程式を解くことの意味でもある.