

## 第6章 天体力学入門

天体力学, すなわち惑星などの運動の研究は力学系研究の源泉であり, 特にその元祖となった二体問題は微積分の創造にも与った. 二体問題については, 既に第1章で解説したように, 方程式系が完全積分でき, 運動が解析的に決定される. しかし, 次の三体問題になると, もう一般には解けなくなってしまう. 第4章で述べたように, 常微分方程式の定性的理論は解析的に解くことができない三体問題の解の性質を何とかして調べようという動機から発展してきた. ここでは, 三体問題について分かっていることの中から基本的なものを紹介し, 最後に最近の話題にも触れたい. 実際の天体力学は, 摂動計算といって, 既知の解からのずれを摂動パラメータと呼ばれる微小パラメータについて展開し, 近似計算して, 有限な時間区間での軌道の予測をする地味な仕事を中心であるが, ここでは摂動法を用いた実用的計算法には触れない.

### 6.1 三体問題の古典解

三体問題の方程式を改めて書けば,

$$m_j \frac{d^2 \vec{x}_j}{dt^2} = -\gamma \sum_{k \neq j} m_j m_k \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^3}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (6.1)$$

未知数は  $6 \times 3 = 18$  個であり, 2体問題と異なって平面に収まらない解も存在する. 2体問題と同様, いくつかの第一積分が知られている. まず, (6.1) は Hamilton 系の形で

$$\frac{d\vec{x}_j}{dt} = \frac{1}{m_j} \vec{\xi}_j, \quad \frac{d\vec{\xi}_j}{dt} = -\gamma \sum_{k: k \neq j} m_j m_k \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^3}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (6.2)$$

と書かれ, Hamilton 関数は

$$H(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3) = \sum_{j=1}^3 \frac{|\vec{\xi}_j|^2}{2m_j} - \gamma \left( \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{m_1 m_3}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} + \frac{m_2 m_3}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|} \right) \quad (6.3)$$

であり, 従ってこれは各軌道に沿って総エネルギーを値に取る保存量となる. 次に (6.1) の方程式を3個加えれば,

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{j=1}^3 m_j \vec{x}_j = 0 \quad \therefore \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 m_j \vec{x}_j = \vec{c} \quad (\text{一定})$$

従って重心  $\frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \sum_{j=1}^3 m_j \vec{x}_j$  は等速運動をする (運動量保存則) から, これが原点に静止しているとしても一般性を失わない:

$$\sum_{j=1}^3 m_j \vec{x}_j = 0 \quad (6.4)$$

最後に,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^3 m_j \vec{x}_j \times \frac{d\vec{x}_j}{dt} \right) &= \sum_{j=1}^3 m_j \frac{d\vec{x}_j}{dt} \times \frac{d\vec{x}_j}{dt} + \sum_{j=1}^3 \vec{x}_j \times m_j \frac{d^2\vec{x}_j}{dt^2} \\ &= \sum_{j=1}^3 \vec{x}_j \times \gamma \sum_{k:k \neq j} m_j m_k \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^3} = \gamma \sum_{j=1}^3 \sum_{k:k \neq j} m_j m_k \frac{\vec{x}_j \times \vec{x}_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|^3} = 0 \end{aligned}$$

最後の和は外積の交代性  $\vec{x}_j \times \vec{x}_k = -\vec{x}_k \times \vec{x}_j$  により 2 項ずつ打ち消し合う。これは角運動量の保存則である。以上の保存量は 2 体問題のときにも用いたが、これらはより一般の  $n$  体問題、あるいはさらに一般に、閉じた (すなわち外部から力を受けない) 保存系 (すなわち、総エネルギーが摩擦などで熱等の非力学的なエネルギーに変化しない系) が常に持つ第一積分である。以上で  $3 \times 2$  (重心の固定) + 3 (角運動量の固定) + 1 (エネルギーの固定) = 10 個の拘束条件が得られた。この他に Jacobi による昇交点の消去<sup>1</sup> という技法があってもう一つ変数が減らせることが知られているが、それでもまだ未知数は  $18 - 11 = 7$  個も残っている。Poincaré は一般の三体問題では、これ以外に一価解析的な第一積分は存在しないことを証明してしまった。従って、三体問題は二体問題のように式で表された一般解を求めるのは不可能であり、そのような解が欲しければ、自分で新たに保存量を導入して、それを保存するような特殊解を探すしかないことになる。

なお、第一積分とは直接関係ないが、三体問題の解は常に次のような自己相似性を持つことも分かる：

**補題 6.1**  $\vec{x}_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  が (6.1) の解ならば、任意の  $\lambda \neq 0$  に対して  $\lambda^{-2/3}\vec{x}_j(\lambda t)$ ,  $j = 1, 2, 3$  もまた (6.1) の解となる。従って、もしある質量の組に対して、ある周期を持つ周期解が存在すれば、同じ質量の組に対し、任意の周期の周期解でそれと相似な軌道を持つものが存在する。

これは (6.1) に直接代入して計算すれば容易に確かめられることである。

**問 6.1** これを確かめよ。

三体問題の数値解を Runge-Kutta 法などで直接求めるときのために、(6.1) に (6.4) を代入して得られる方程式を書いておこう。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} &= -\gamma \left\{ \frac{m_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} + \frac{m_3(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^3} \right\}, & \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} &= -\gamma \left\{ \frac{m_1(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} + \frac{m_3(\vec{x}_2 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^3} \right\}, \\ \vec{x}_3 &= -\frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_3} \end{aligned}$$

三体問題は 18 世紀には既に Euler や Lagrange など主な数学者によって研究されており、いくつかの特殊解はその頃から知られていた。まずそのような古典的周期解を紹介しよう。

**定理 6.2** (Euler の直線解 1767) 任意の質量の組に対し、三体が同一平面内で同心円上を動き、かつ三体が常に同一直線上に有るような周期解が存在する。

**証明** 重心を原点にとれば、軌道の仮定から  $r_1 > r_2 \geq 0$  を定数とし、

$$\vec{x}_1 = r_1(\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{x}_2 = r_2(\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{x}_3 = -\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_3}(\cos \theta, \sin \theta)$$

<sup>1</sup>elimination of ascending node. 系全体の回転を利用して自由度を一つ下げる方法で、一般の Hamilton 系で有効だが、Jacobi により既に三体問題で用いられた。[3], p.117 参照。

と置くことができる。(重心は三体と同じ直線上に有るので、動かないのは原点だけである。) この時点で未知数は  $\theta$  とそれに対応する運動量座標の計 2 個になっており、従ってこれらはエネルギー保存と角運動量保存の二つの拘束条件から決定されてしまう。

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}_1}{dt} &= r_1 \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta, \cos \theta), \\ \frac{d\vec{x}_2}{dt} &= r_2 \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta, \cos \theta), \\ \frac{d\vec{x}_3}{dt} &= -\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_3} \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta, \cos \theta)\end{aligned}\tag{6.5}$$

であるから、エネルギー保存則は

$$\begin{aligned}\frac{m_1 r_1^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{m_2 r_2^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)^2}{2m_3} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ - \gamma \left( \frac{m_1 m_2}{r_1 - r_2} + \frac{m_1 m_3^2}{(m_1 + m_3)r_1 + m_2 r_2} + \frac{m_2 m_3^2}{m_1 r_1 + (m_2 + m_3)r_2} \right) = E \quad (\text{一定})\end{aligned}$$

また、角運動量の保存則は

$$\left( m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)^2}{m_3} \right) \frac{d\theta}{dt} = \Omega \quad (\text{一定})$$

これより、角速度は一定、従って周期を  $T$  とすれば  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{T}$  であることが分かる。この二つの式から、定数  $m_1, m_2, m_3$ , および  $r_1, r_2, T$  を与えると、それに応じて  $E, \Omega$  が定まり、運動が確定することが分かる。ただし、これらの定数は勝手には与えられない。実際、常識で考えても、軌道半径を定め、質量も定めたときは、周期的円運動を実現するような初期速度、従って  $\frac{d\theta}{dt}$  の値は一つに決まるはずである。そこで元の運動方程式に戻り、 $\frac{d\theta}{dt} = \text{一定}$  という条件を課して (6.5) を  $t$  につき更に微分してみると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} &= -r_1 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (\cos \theta, \sin \theta) = -\gamma \left\{ \frac{m_2}{(r_1 - r_2)^2} + \frac{m_3^3}{((m_1 + m_3)r_1 + m_2 r_2)^2} \right\} (\cos \theta, \sin \theta), \\ \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} &= -r_2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (\cos \theta, \sin \theta) = -\gamma \left\{ -\frac{m_2}{(r_1 - r_2)^2} + \frac{m_3^3}{(m_1 r_1 + (m_2 + m_3)r_2)^2} \right\} (\cos \theta, \sin \theta), \\ \frac{d^2 \vec{x}_3}{dt^2} &= \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_3} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= \gamma \left\{ \frac{m_1 m_3^2}{((m_1 + m_3)r_1 + m_2 r_2)^2} + \frac{m_2 m_3^3}{(m_1 r_1 + (m_2 + m_3)r_2)^2} \right\} (\cos \theta, \sin \theta)\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}r_1 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \gamma \left\{ \frac{m_2}{(r_1 - r_2)^2} + \frac{m_3^3}{((m_1 + m_3)r_1 + m_2 r_2)^2} \right\}, \\ r_2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \gamma \left\{ -\frac{m_2}{(r_1 - r_2)^2} + \frac{m_3^3}{(m_1 r_1 + (m_2 + m_3)r_2)^2} \right\}, \\ \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_3} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \gamma \left\{ \frac{m_1 m_3^2}{((m_1 + m_3)r_1 + m_2 r_2)^2} + \frac{m_2 m_3^3}{(m_1 r_1 + (m_2 + m_3)r_2)^2} \right\}\end{aligned}$$

という三つの式を得る。これから、例えば  $m_1, m_2, m_3$  を一般的に与えると比  $r_2 : r_1$  が (従って  $r_3 : r_1$  も) 定まり、更に  $r_1$  を定めると角速度が決まってしまうことが分かる。□

等質量  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  のときは, 明らかに  $r_2 = 0$  であるが, このとき  $r_1 = r_3 = r$  と書き直せば, 上の最後の連立方程式は, 真中が消失し, 最初と最後は一致して

$$r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \gamma \left\{ \frac{m}{r^2} + \frac{m}{4r^2} \right\} = \gamma \frac{5m}{4r^2}$$

となる. よって  $m$  と  $r$  は勝手に与えることができ, それに応じて  $\frac{d\theta}{dt}$  が決まる. また, 全エネルギーと角運動量

$$E = m r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \gamma \left( \frac{m^2}{r} + \frac{m^2}{2r} + \frac{m^2}{r} \right) = \gamma \frac{5m^2}{4r} - \gamma \frac{5m^2}{2r} = -\gamma \frac{5m^2}{4r},$$

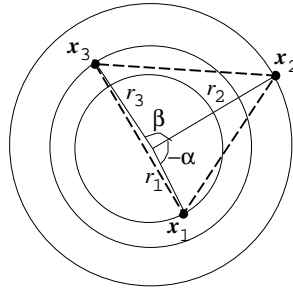
$$\Omega = 2m r^2 \frac{d\theta}{dt} = m \sqrt{5\gamma m r}$$

も  $m, r$  から定まる.

残念ながら, Euler の直線解はどんなパラメータの値に対しても常に不安定であることが知られている. 従って外部からの系の微小な攪乱が長い年月の間には周期軌道からはずれさせてしまうので, 自然界にこのような三体を見出すことは不可能であろう.

**問 6.2** 三体がすべて静止しているような解は存在するか? [答: 存在しない. 方程式 (6.1) の右辺 = 0 から, 三体が一直線上に並ぶことがまず分かり, 次いでどの順に並んでも矛盾が起こることが分かる.]

**定理 6.3** (Lagrange の正三角形解 1772) 三体が平面内で原点を中心とする円運動をし, かつ三体が常に正三角形を形作るような解が存在する. 三体の重心は必然的に同心円の中心となる.



**証明** 簡単のため平面ベクトルを複素数で表示しよう. 軌道の仮定から  $r_j, j = 1, 2, 3$  を定数とし,

$$\vec{x}_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad \vec{x}_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \quad \vec{x}_3 = r_3 e^{i\theta_3}$$

と置くと, 重心が動かないことから,

$$m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + m_3 \vec{x}_3 = m_1 r_1 e^{i\theta_1} + m_2 r_2 e^{i\theta_2} + m_3 r_3 e^{i\theta_3} = c \quad (6.6)$$

ただし, 今の原点の決め方では,  $c = 0$  かどうかはそれほど自明ではない. 次に正三角形の条件から

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = (\vec{x}_3 - \vec{x}_2) e^{\pi i/3}$$

$$i.e. \quad (r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2}) = (r_3 e^{i\theta_3} - r_2 e^{i\theta_2}) e^{\pi i/3} \quad (6.7)$$

ただし, 正三角形の辺長が時間によらず一定かどうかは最初から明らかではない. (6.6), (6.7) を  $e^{i\theta_2}$  で割り算して

$$|m_1 r_1 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + m_2 r_2 + m_3 r_3 e^{i(\theta_3 - \theta_2)}| = |c|, \quad r_1 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} - r_2 = (r_3 e^{i(\theta_3 - \theta_2)} - r_2) e^{\pi i/3}.$$

$$\therefore \quad |(m_1 + m_3 e^{-\pi i/3}) r_1 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + m_2 r_2 + m_3 (1 - e^{-\pi i/3}) r_2| = |c|$$

ここで明らかに  $m_2 r_2 + m_3(1 - e^{-\pi i/3})r_2 \neq 0$  だから, これより,  $\alpha := \theta_1 - \theta_2$  が一定, 従って  $\beta := \theta_3 - \theta_2$  も一定なことが分かり, 従って三角形の合同条件から, 正三角形の辺も一定となる. 今これを  $r$  と置き,  $\theta := \theta_2$  を唯一の変数とすれば,

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= r_2 e^{i\theta}, \quad \vec{x}_1 = r_1 e^{i(\theta+\alpha)}, \quad \vec{x}_3 = r_3 e^{i(\theta+\beta)}, \\ |r_1 e^{i\alpha} - r_2| &= |r_3 e^{i\beta} - r_2| = r, \quad r_1 e^{i\alpha} - r_2 = (r_3 e^{i\beta} - r_2) e^{\pi i/3}\end{aligned}\quad (6.8)$$

となる.

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} = ir_1 e^{i\theta_1} \frac{d\theta_1}{dt} = ir_1 e^{i(\theta+\alpha)} \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\vec{x}_2}{dt} = ir_2 e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\vec{x}_3}{dt} = ir_3 e^{i\theta_3} \frac{d\theta_3}{dt} = ir_3 e^{i(\theta+\beta)} \frac{d\theta}{dt}\quad (6.9)$$

であり, 従って (6.6) を微分した式から

$$(m_1 r_1 e^{i\alpha} + m_2 r_2 + m_3 r_3 e^{i\beta}) i e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$\frac{d\theta}{dt} \neq 0$  なので (問 6.2 参照), これより

$$m_1 r_1 e^{i\alpha} + m_2 r_2 + m_3 r_3 e^{i\beta} = 0\quad (6.10)$$

従って (6.6) より  $\mathbf{c} = 0$  となり, 重心は原点であることが分かった. また, エネルギー保存則は

$$\left( \frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2} + \frac{m_3 r_3^2}{2} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \gamma \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}{r} = E \quad (\text{一定})$$

よって  $\frac{d\theta}{dt}$  が一定となり, 三体は同じ速度で等速円運動をすることが分かった. 周期を  $T$  とすれば

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{T}.$$

最後に角運動量保存則は, ベクトル  $1$  と  $i$  が直交し,  $1 \times i = (0, 0, 1)$  であることに注意すると, それらを同じ角  $\theta_j$  だけ回転しても外積の値は変わらないので,

$$\vec{x}_j \times m_j \frac{d\vec{x}_j}{dt} = m_j r_j^2 \frac{d\theta}{dt} (0, 0, 1)$$

となり, 従って

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \frac{d\theta}{dt} = \Omega \quad (\text{一定})$$

以上より, Lagrange の正三角形解は  $m_1, m_2, m_3$  と  $r_2$  を与えたとき, (6.8), (6.10) から  $r_1 e^{i\alpha}$  と  $r_3 e^{i\beta}$  が決まり, 次いで周期  $T$  を与えると, 上の二つの式で定まるエネルギー  $E$  と角運動量  $\Omega$  を持った運動が定まることが分かる. よって対称性により, 指定するのは  $r_1, r_2, r_3$  の任意の一個でよい. 幾何学的には, 正三角形を原点がその内部に含まれるようにまず描き, 次いで重心が原点に一致するように各頂点に質量  $m_1, m_2, m_3$  を配置すれば, これから  $r_1, r_2, r_3$  と  $\alpha, \beta$  が定まって, すべての条件を満たす配位が得られる. この幾何学的条件を満たす限り,  $r_1, r_2, r_3$  と  $m_1, m_2, m_3$  のうち任意の一つを自由に指定できることも分かる. ただし, この場合も周期, あるいは角速度は, 質量と3角形の位置から決まってしまう. (6.9) を微分して運動方程式と比較することにより

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} &= -r_1 e^{i(\theta+\alpha)} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\gamma \frac{m_2}{r^3} (r_1 e^{i(\theta+\alpha)} - r_2 e^{i\theta}) - \gamma \frac{m_3}{r^3} (r_1 e^{i(\theta+\alpha)} - r_3 e^{i(\theta+\beta)}), \\ \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} &= -r_2 e^{i\theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\gamma \frac{m_2}{r^3} (r_2 e^{i\theta} - r_1 e^{i(\theta+\alpha)}) - \gamma \frac{m_3}{r^3} (r_2 e^{i\theta} - r_3 e^{i(\theta+\beta)}), \\ \frac{d^3 \vec{x}_2}{dt^2} &= -r_3 e^{i(\theta+\beta)} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\gamma \frac{m_2}{r^3} (r_3 e^{i(\theta+\beta)} - r_1 e^{i(\theta+\alpha)}) - \gamma \frac{m_3}{r^3} (r_3 e^{i(\theta+\beta)} - r_2 e^{i\theta})\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \gamma \frac{m_2}{r^3} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} e^{-i\alpha}\right) + \gamma \frac{m_3}{r^3} \left(1 - \frac{r_3}{r_1} e^{i(\beta-\alpha)}\right), \\
&= \gamma \frac{m_2}{r^3} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} e^{i\alpha}\right) + \gamma \frac{m_3}{r^3} \left(1 - \frac{r_3}{r_2} e^{i\beta}\right), \\
&= \gamma \frac{m_2}{r^3} \left(1 - \frac{r_1}{r_3} e^{i(\alpha-\beta)}\right) + \gamma \frac{m_3}{r^3} \left(1 - \frac{r_2}{r_3} e^{-i\beta}\right)
\end{aligned}$$

□

特に,  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  で原点が正三角形の重心と一致する場合のデータは,  $\alpha = -2\pi/3$ ,  $\beta = 2\pi/3$  で,  $e^{-i\alpha} + e^{i(\beta-\alpha)} = \omega + \omega^2 = -1$  ( $\omega^3 = 1$ ) 等々だから,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \gamma \frac{3m}{r^3}$$

となる.

Lagrange の正三角形解は, 一体の質量が他の二体のそれに比して大きいとき, 安定となることが知られている. 実際にも, 小惑星の中に, 太陽と木星を組として正三角形を成して運動しているものが 20 世紀始めに発見された. これらはほぼ木星の軌道上で木星の前と後を運動しており, それぞれギリシャ群, トロヤ群と呼ばれている (制限三体問題の特異点の項を参照).

Lagrange の正三角形解は, 各天体が原点を焦点とする楕円上を動き, かつそれらが常に正三角形を形作る場合に一般化される. この場合は正三角形の大きさは常に変化する. 任意の質量比に対して存在が知られている解の族としては以上がすべてである.

## 6.2 制限三体問題

制限三体問題とは, 三体目の質量が始めの二体に比して極端に小さいときに, 三体問題の方程式を漸近解析で近似方程式に置き換えたもののことである. 地球から出発するロケットはもちろん, 太陽と地球と月とか, 太陽と木星と地球などについてもこの近似が良く当てはまるので, 実用的計算としても重要である. 近似の考え方は, 三番目の小さい天体は始めの二体の運動に全く影響を及ぼさないとし, まず前者を二体問題として解き, その解を具体的に用いて残りの微小天体の軌道を求めるというものである. 普通は更に現実的に, 始めの二体がそれらの重心を中心とする円運動をしており, 従って等速で回転する線分上にあることまで仮定する. また, 第三の天体が最初の二体と同一の平面内を運動することも仮定するのが普通である. 以上を運動方程式で書けば,

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = -m_1 m_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -m_1 m_2 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}, \quad (6.11)$$

$$m_3 \frac{d^2 \vec{x}_3}{dt^2} = -m_3 m_1 \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|^3} - m_3 m_2 \frac{\vec{x}_3 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|^3} \quad (6.12)$$

となる. ここで,

$$\vec{x}_1 = r_1 e^{i\omega t}, \quad \vec{x}_2 = -r_2 e^{i\omega t} \quad (m_1 r_1 = m_2 r_2)$$

なので, 普通は  $\mu := \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  と置き,  $m_j$  の単位を調整 (すなわち相似変換) して  $m_1 = 1 - \mu$ ,  $m_2 = \mu$  と置き直す. (後で  $\mu$  も小さいと仮定する. よって, 例えば  $\vec{x}_1$  が太陽,  $\vec{x}_2$  が地球,  $\vec{x}_3$  が月

だと思えばよい。) また,  $r_2 = \frac{1-\mu}{\mu}r_1$  に注意して  $r_1 + r_2 = \frac{r_1}{\mu}$ . これは始めの二体間の距離なので, これを長さの単位に取り,  $r_1 + r_2 = 1$  と置けば,  $r_1 = \mu, r_2 = 1 - \mu$  となる.

以上により, これから主役となる  $\vec{x}_3 = re^{i\theta}$  が満たす方程式は ( $vecx_2 = -r_2e^{i\omega t}$  と置いたことに注意!)

$$\frac{d^2}{dt^2}(re^{i\theta}) = -(1-\mu)\frac{re^{i\theta} - \mu e^{i\omega t}}{|re^{i\theta} - \mu e^{i\omega t}|^3} - \mu\frac{re^{i\theta} + (1-\mu)e^{i\omega t}}{|re^{i\theta} + (1-\mu)e^{i\omega t}|^3} \quad (6.13)$$

この方程式は時間変数  $t$  を陽に含むため, 保存系の形をしていない. そこで, 時間に依存する座標変換として, 最初の二体とともに回転する座標を導入する. これは  $\varphi = \theta - \omega t$  を新しい角度変数に採用することに相当するので, 上の式でこの置き換えをして両辺を  $e^{i\omega t}$  で割ると

$$e^{-i\omega t} \frac{d^2}{dt^2}(re^{i(\varphi+\omega t)}) = -(1-\mu)\frac{re^{i\varphi} - \mu}{|re^{i\varphi} - \mu|^3} - \mu\frac{re^{i\varphi} + 1 - \mu}{|re^{i\varphi} + 1 - \mu|^3}$$

ここで左辺は

$$e^{-i\omega t} \frac{d^2}{dt^2}(re^{i(\varphi+\omega t)}) = \frac{d^2}{dt^2}(re^{i\varphi}) + 2\omega i \frac{d}{dt}(re^{i\varphi}) - re^{i\varphi}\omega^2$$

となるので, 時間を陽に含まない方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}(re^{i\varphi}) + 2\omega i \frac{d}{dt}(re^{i\varphi}) - re^{i\varphi}\omega^2 = -(1-\mu)\frac{re^{i\varphi} - \mu}{|re^{i\varphi} - \mu|^3} - \mu\frac{re^{i\varphi} + 1 - \mu}{|re^{i\varphi} + 1 - \mu|^3}$$

が得られた. これを直角座標  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  に書き戻すと,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} - \omega^2 x &= -(1-\mu)\frac{x-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}} - \mu\frac{x+1-\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2+y^2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega \frac{dx}{dt} - \omega^2 y &= -(1-\mu)\frac{y}{\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}} - \mu\frac{y}{\sqrt{(x+1-\mu)^2+y^2}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

となるが, これは

$$\begin{aligned} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &:= \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2+y^2}} \\ &= \frac{(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2}{2} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2+y^2}} \end{aligned}$$

という Lagrange 関数に対する Lagrange の運動方程式となっていることが容易に分かる. よって  $x, y$  に対する共役運動量座標を

$$\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \omega y, \quad \eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + \omega x$$

と導入すれば,

$$\begin{aligned} H(x, y, \xi, \eta) &:= \xi\dot{x} + \eta\dot{y} - L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ &= \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \omega(\xi y - \eta x) - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2+y^2}} \end{aligned} \quad (6.15)$$

を Hamilton 関数として, 正準方程式による表現

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \xi} = \xi + \omega y, \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta} = \eta - \omega x, \\
\frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \omega \eta - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}}, \\
\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\omega \xi - \frac{(1-\mu)y}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu y}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

が得られた. よって  $H$  を第一積分として, 系は 3 次元の 1 階連立方程式に帰着した.  $H$  は制限三体問題の Jacobi の積分と呼ばれている.

さて, (6.16) の右辺のベクトル場の特異点をまず調べよう. まず, 最初の二つの方程式の右辺を 0 と置いて  $\xi = -\omega y, \eta = \omega x$ . これらを残りの方程式の右辺を 0 と置いたものに代入すれば,

$$\begin{aligned}
\omega^2 x &= \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu(x+1-\mu)}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}}, \\
\omega^2 y &= \frac{(1-\mu)y}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu y}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}}
\end{aligned}$$

第二の方程式から

$$y = 0, \quad \text{または} \quad \omega^2 = \frac{1-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}}$$

前者の  $y = 0$  は第三の天体が最初の二体と同一直線上に有ることを意味し, 従ってこれは Euler の直線解を表す. (この解は今の座標では不動点だが, 実は等角速度で回転していたことを思い出せ.) 第一の方程式に  $y = 0$  を代入すると

$$\omega^2 x = \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} + \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2}$$

が得られ, これから第三の天体の位置が決まるが, これは定理 6.2 で述べた解と一致する. 後者に対しては, この方程式に  $x$  を乗じて第一の方程式から引くと

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}$$

これは三体が正三角形を成すことを意味する. これも実際には全体が等角速度で回転しているので, Lagrange の正三角形解のところでも述べた小惑星トロヤ群の運動に相当する解であることが分かる.

次に, 一般の解の挙動を調べるためエネルギー曲面  $H(x, y, \xi, \eta) = E$  の位相を調べよう.

$$\begin{aligned}
0 = 2H(x, y, \xi, \eta) &= (\xi + y)^2 + (\eta - x)^2 - \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{2\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}} \\
&= \tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 - \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}} - \frac{2\mu}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2}}
\end{aligned}$$



よって,

$$z = \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2}}$$

のグラフを描き, +++++ 結局 3次元の射影空間と同相であることが分かる.

さて, 方程式 (6.16) には最早これ以上第一積分は存在しないので, 周期解の存在に関しては定性的理論でこれを保証するしかない. ここで用いられるのが次の定理である:

**定理 6.** (Poincaré の最後の定理) 平面の円環を

$$T = \{(x, y) \mid a \leq r := \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\}$$

とする.  $T$  からそれ自身への連続写像  $f$  が

- 1)  $r = a$  上では負の向きに回る. i.e.  $f(a \cos \theta, a \sin \theta) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi)$  とするとき,  $\varphi < \theta$ .
- 2)  $r = b$  上では正の向きに回る. i.e.  $f(b \cos \theta, b \sin \theta) = (b \cos \varphi, b \sin \varphi)$  とするとき,  $\varphi > \theta$ .
- 3) ある正值測度  $\rho(x, y) dx dy$  に関して体積を保存する. i.e. 任意の  $\Gamma \subset T$  に対し

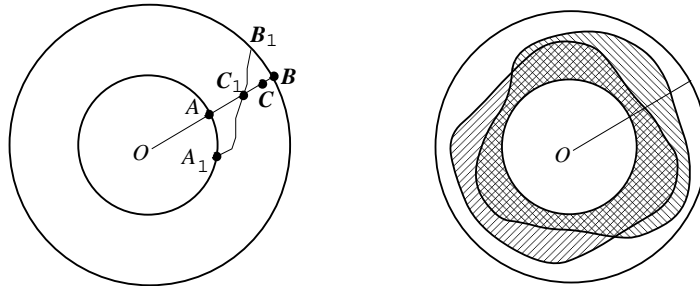
$$\iint_{\Gamma} \rho(x, y) dx dy = \iint_{f(\Gamma)} \rho(x, y) dx dy$$

( $\rho$  は  $T$  の境界では 0 になってもよい.)

この 3 条件を満たすならば,  $f$  の不動点が  $T$  内に少なくとも二つ存在する.

この定理は制限三体問題の解の存在を研究していた Poincaré が晩年に行き着いたもので, 自分では証明できずに予想として残し, 発表の 4 ヶ月後に亡くなったので, 上のような名前が付いた. 証明を与えたのはアメリカ最初の本格的数学者 G. D. Birkhoff であった.

定理の厳密な証明は難しくても, 定理の成立の根拠を説明するのは難しくない.



今, 原点を通る半直線が内周, および外周を切る点を  $A, B$  とすれば, これらは  $f$  によりそれぞれ内周上の点  $A_1$ , および外周上の点  $B_1$  に写る. また, 線分  $AB$  は二点  $A, B$  をつなぐ連続曲線弧に写る. この曲線弧が元の線分  $AB$  を切る点を  $C_1$  とすれば, これは線分  $AB$  上のある点  $C$  から  $f$  により写って来ているはずである. 以上により, 各動径の上には,  $f$  により同じ動径上に写る点が必ず存在する. これらの点をうまくつなぐことにより, 円環内に閉曲線  $\gamma$  を作る事ができる (この点の厳密な証明は省略する).  $\gamma$  は  $f$  により別の閉曲線  $f(\gamma)$  に写るが,  $\gamma$  と内周で囲まれた部分領域を  $\Gamma, f(\Gamma)$  と内周で囲まれた部分領域を  $\Gamma'$  とすれば, 仮定により

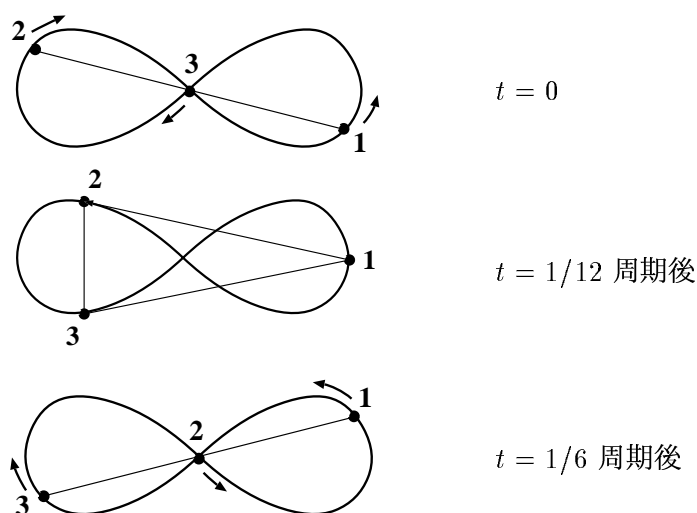
$$\iint_{\Gamma} \rho(x, y) dx dy = \iint_{\Gamma'} \rho(x, y) dx dy$$

なので,  $\Gamma \subsetneq \Gamma'$  でも  $\Gamma' \subsetneq \Gamma$  でも有り得ない. よってこれらの領域は互いに他からはみ出している. したがって, それらの境界線である  $\gamma$  と  $f(\gamma)$  は少なくとも 2 点で交わる.

+++++ (今年はこれはやめ)

### 6.3 三体問題の新しい解

スペインの C. Simó は 1990 年頃から、計算機を用いて質量の等しい  $n$  体の運動の奇妙な周期解を次々と発見し始めた。これらの解は、 $n$  体が結び目のような閉曲線の上をダンスをしながら周期運動するように見えるので、choreography (ダンスの振付け記述法) と名付けられた。理論的正当化はないものの、計算の安定性から、これらの解は真の解であることを確信させるものであった。2000 年になって Chenciner と Montgomery は、Simó の計算を知らず独立に、choreography の最も簡単な例である八の字解の存在を理論的に推測し、その存在証明に成功した。彼らの結果の発表を通して二つの仕事の存在と関連が明らかになったのである。以下、八の字解に関する結果の概略を紹介する。



前章で述べたように、三体問題 (6.1) の解は適当な曲線族の上で作用

$$S[\vec{x}] := \int_0^T L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) dt \quad (6.17)$$

$$\text{ここに、 } \vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \quad L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_{j=1}^3 \frac{m_j |\dot{\vec{x}}_j|^2}{2} + \sum_{j \neq k} \frac{\gamma m_j m_k}{|\vec{x}_j - \vec{x}_k|}$$

を停留にするような曲線として実現できるのであった (最小作用の原理)。以下 9 次元のベクトル  $\vec{x}$  が動く空間を配位空間 (configuration space) と名付け、ここでこの変分問題の解を探せばよい。問題を易しくするため、平面運動を仮定し、また  $m_1 = m_2 = m_3$  としてしまう。すると配位空間は 6 次元になる。また、一般性を失うことなく、いつものように重心を原点に固定して考えることができ、これで配位空間は 4 次元になる。(今は相空間でなく、位置座標のみの空間で考えていることに注意。) 更に、三体が成す三角形の形状の時間変化のみに着目するため、配位空間を向きを変えない合同変換で割る (i.e. 商空間をとる)。三体の質量が等しく、かつ原点固定としているので、結局三体が属する平面の回転で互いに移り得る三角形を同一視するということである。これで自由度が 1 減り、3 次元の記述空間が得られるが、これを三体の形を記述する空間ということで形状空間 (shape space) と名付ける。もとの配位空間には、二体が衝突する ( $\vec{x}_i = \vec{x}_j, i \neq j$ ) とか、三体が同時衝突する ( $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{x}_3$ ) とかの特異点があり、これらが形状空間にも引っ越して来ているので、

解はこのような点を避けて通るような道の中から探さねばならない. 配位空間には系の慣性モーメントに相当する

$$I[\vec{x}] = \sum_{j=1}^3 m_j |\vec{x}_j|^2$$

という距離が入り, 等質量のときは回転不変なので, これも形状空間に引越せる.

作用積分 (6.17) は形状空間に引越せる. そこで対称性をうまく用いて変分法の解の存在を示すのだが, それは実際の軌道ではないので, これを時間に依存する適当な回転と合成し, Newton の運動方程式の真の解を作る. ここでも対称性が有効に使われる.

このからくりをもう少し具体的に述べるため, 以下, 質量が 1 に等しい 3 体の平面運動のみを考えることとし, 平面を複素平面と同一視して, 3 体の動く空間を実 4 次元の線型多様体

$$\mathcal{X} := \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \sum_{j=1}^3 x_j = 0 \right\}$$

と同一視する. これに通常の Hermite 計量

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^3 \bar{x}_j y_j = x \cdot y + i\omega(x, y)$$

を導入する. ここに,

$$x \cdot y := \operatorname{Re} x \cdot \operatorname{Re} y + \operatorname{Im} x \cdot \operatorname{Im} y, \quad \omega(x, y) := \operatorname{Re} x \cdot \operatorname{Im} y - \operatorname{Im} x \cdot \operatorname{Re} y$$

はそれぞれ, 質量スカラー積, および質量シンプレクティック構造と呼ばれる実の双一次形式である.  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$  の等距離群  $O(2)$  は  $\mathcal{X}$  に対角型に作用する: 特に, 第一座標に関する鏡映  $S$  と角  $\theta$  の回転  $R_\theta$  の作用は次のようになる.

$$S(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \quad R_\theta(x_1, x_2, x_3) = (e^{i\theta} x_1, e^{i\theta} x_2, e^{i\theta} x_3)$$

配位空間, すなわち, 3 体の位置を表す空間は  $\mathcal{X}$  から衝突に相当する位置を除いたもの  $\dot{\mathcal{X}}$  であり, 相空間はその接空間  $\dot{\mathcal{X}} \times \dot{\mathcal{X}}$  である.  $O(2)$  の元は相空間に  $P(x, y) - (Px, {}^tPy)$  で作用する. 相空間上に次のような  $O(2)$ -不変関数を定義する:

$$I = x \cdot x, \quad J = x \cdot y, \quad K = y \cdot y, \quad U = U(x), \quad H = \frac{1}{2}K - U, \quad L = \frac{1}{2}K + U$$

ここで,  $U$  は通常の方有引力の位置エネルギー関数の 符号を変えたもの を表している (方有引力定数は 1 としている):

$$U(x) = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|$$

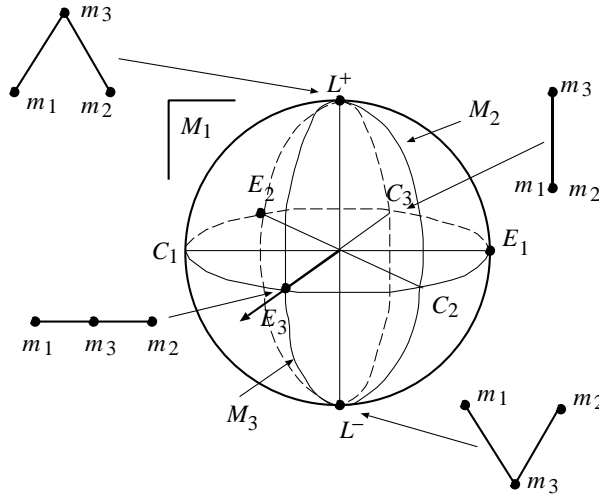
これらの関数の意味は,  $I$  が原点 (= 重心) に関する慣性モーメント,  $J$  がその時間微分の  $1/2$ ,  $K$  が運動エネルギーの 2 倍である. また  $H$  は全エネルギー,  $L$  は Lagrange 関数である.  $r = I^{1/2}$  は配位空間のノルムとなる.

配位空間の中で中心的配位が以下の議論で重要な役割を占める. これは, 相似な運動を許容するもの, すなわち, 相似縮小して重心に崩壊させられるような運動の配位のことであり, 特にその中で, 回転を消去すると不動となる相対的平衡, すなわち全天体が重心の回りに等速度運動をしてい

るようなものは, 被約ポテンシャル函数  $\tilde{U} = \sqrt{I}U$ , あるいは  $U|_{I=1}$  の特異点として求まるものであり, 3体問題の場合は Euler と Lagrange により決定されている. 今は等質量なので, Euler の直線解は線分の中心を占める質量の番号により  $E_1, E_2, E_3$  とラベル付けされ, Lagrange の三角形解は, 向きにより  $L^+, L^-$  と識別される.

実 4 次元の配位空間を  $SO(2)$  の作用で割ったものは,  $\mathbf{R}^3$  と同一視され, 被約配位空間と呼ばれる. これには配位空間の距離  $I$  により導入され, 2 次元球  $I = 1$  を底面とする錐とみなせる. これが上述の形状空間である.

形状空間で  $\bar{x}_i$  が原点に有り, 他の二点の midpoint を占めるという形状は部分多様体を成している. これを Euler の直線解にちなんで  $E_i$  と記そう. また,  $\bar{x}_i$  が原点に有り, この点を頂点, として他の二点とともに二等辺三角形 (isosceles triangle) を成す場合も部分多様体を成すが, これを  $M_i$  と記し, 第  $i$  経線と呼ぼう. これら二つの部分多様体をある一定の時間  $T$  で結ぶような曲線弧の全体は, (6.17) の変分問題を考える際の許容されるクラスとなる. Chenciner と Montgomery は  $E_1$  と  $M_2$  を結ぶ道に関して最小作用を実現するものを取れば, これらが, それぞれ始点の部分多様体と終点の部分多様体に垂直に交わるので, 対称性によりこれを折り返しながら 12 個つなげて, 周期  $\bar{T} = 12T$  を持つ一つの閉じた道にできることを発見したのである. 後はこの  $T$  の基本単位を成す曲線弧の存在を変分法できちんと言えよ.



形状空間の図 (文献 [4] を元に描き直したもの)

**Chenciner-Montgomery の定理** 八の字型をした平面の閉曲線  $q : (\mathbf{R}/\bar{T}\mathbf{Z}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^2, 0)$  で, 以下の性質を持つものが存在する :

- 1) 各  $t$  に対し

$$q(t) + q(t + \bar{T}/2) + q(t + 2\bar{T}/3) = 0.$$

- 2)  $q$  は Klein 群  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  の  $\mathbf{R}/\bar{T}\mathbf{Z}$ , 及び  $\mathbf{R}^2$  への作用

$$\sigma t = t + \frac{\bar{T}}{2}, \quad \tau t = -t + \frac{\bar{T}}{2}; \quad \sigma(x, y) = (-x, y), \quad \tau(x, y) = (x, -y) \quad (6.18)$$

に関して同変 :

$$q(\sigma t) = \sigma q(t), \quad q(\tau t) = \tau q(t).$$

- 3) 形状空間の閉曲線  $x : \mathbf{R}/\bar{T}\mathbf{Z} \mapsto \mathcal{X}$  を

$$x(t) = (q(t + 2\bar{T}/3), q(t + \bar{T}/3), q(t))$$

で定めると、これは角運動量が 0 の平面 3 体問題の  $\bar{T}$ -周期解となる。

### 【証明の粗筋】

#### 1) 直接法 作用積分

$$A = \int_0^T \left( \frac{1}{2}K + U \right) dt$$

を  $L^2$  の意味で一回微分可能な道の空間  $H^1([0, T], \mathcal{X})$  の中で、 $E_3$  から出発し  $M_1$  に終る、という境界条件を満たす部分空間  $A$  において最小化するという変分問題を考える。上の汎関数は性質が良いので、最小の存在は標準的な論法で示せる。

2) 簡約 運動エネルギー  $K$  は二つの非負な項の和  $K_{\text{red}} + K_{\text{rot}}$  に分解される。ここに、 $K_{\text{red}}$  は商空間  $\mathcal{X}/SO(2)$  に  $K$  から誘導された計量である (これは速度の Saari 分解と呼ばれるものに相当する。)  $K_{\text{red}}$  が変形 (相似を含む) に相当する部分であり、 $K_{\text{rot}}$  は回転に相当する部分である。平面運動の場合、 $K_{\text{rot}} = |C|^2/I$  が成り立つ。ここに  $C$  は角運動量ベクトルを表す。(空間運動の場合は不等式  $K_{\text{rot}} \geq |C|^2/I$  のみが成り立つ。) 上の境界条件は  $SO(2)$  の作用で不変である。従って、十分滑らかな任意の  $SO(2)$  上の曲線  $g(t)$  に対し、 $x(t)$  が許容される  $\mathcal{X}$  の曲線なら  $g(t)x(t)$  も許容される。 $g(t)$  を動かすとき  $K_{\text{red}}$  は変らないが、 $K_{\text{rot}}$  は変化する。 $g(t)$  をうまく選べば、 $K_{\text{rot}} = 0$  に、従って  $C = 0$  にできるから、変分問題の解もまた角運動量 0 を持つことが分かる。更に変分問題は被約配位空間  $\mathcal{X}/SO(2)$  上の

$$A_{\text{red}} = \int_0^T \left( K_{\text{red}} + U \right) dt$$

のそれに帰着できた。被約空間は  $\mathbf{R}^3$  と同相で、視覚的に理解しやすいという利点がある。

3) 衝突の排除 衝突を持つような  $H^1([0, T], \mathcal{X})$  クラスの軌道上での  $A$  の下限を計算し、上に得た最小解の作用がそれより小さいことを示すことで、我々の解が衝突を持たないことを示す。前者の下限は 2 体問題の衝突解の作用  $A_2$  により達成されることが示され、こちらは具体的に計算できる。Chenciner と Montgomery はこのために最小解の軌道を近似する等ポテンシャル曲線の方程式を Newton 法で計算し、次いでその作用積分を台形則で計算して、これが  $A_2$  より小さいことを数値的に示したが、後に K.-C. Chen [5] は大円弧を繋いだ近似軌道で  $A_2$  より小さい作用が手計算で得られるものを発見した。

4) 最小解の結び合わせ 等質量のため、三つの質量を取り換えるという対称性が存在する。これらを使い、時間反転と併せると、得られた最小解の弧から更に 11 個の最小解の弧が得られる。境界条件から、最小解が初期 (終期) 多様体に垂直なことが分かるので、これらを繋げて周期  $\bar{L} = 12T$  の  $H^1$  級の閉曲線が被約配位空間  $\mathcal{X}/SO(2)$  上に得られる。もとの配位空間  $\mathcal{X}$  上の運動を得るため、対称性と“面積公式”を利用する。こうして、3 体が同一の閉曲線上を、定理に述べられたような Klein 群に関する対称性を持って運動する解が得られる。

5) 軌道が 8 の字であることの証明 個々の質点が原点を通過する半周期の時点でのみ角運動量 0 を持つことを示す。これにより軌道で囲まれた二つの領域が原点に関して星状形を成すことが分かる。

### 【衝突の排除】

許される道の空間  $A = \{x(t) \in H^1([0, T], \mathcal{X}) \mid x(0) \in E_3, x(T) \in M_1\}$  の上で作用汎関数

$$A = \int_0^T \left( \frac{1}{2}K + U \right) dt$$

を最小にするものは衝突を持たないことを示す. そのため, 質量比が一般の場合の作用

$$A(m_1, m_2, m_3, x) = \int_0^T \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{x}_i(t)|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|x_j(t) - x_i(t)|} \right) dt$$

を考える. これは道  $x(t)$  を固定したとき,  $m_1, m_2, m_3$  のいずれに関しても単調増加関数となっている. 故に, 例えば  $m_1 = 0$  と置けば,

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(1, 1, 1; x) > \mathcal{A}(0, 1, 1; x)$$

となる. 最後の項は質量が等しい2体問題の作用である. 今, 衝突を持つ等質量の2体問題の解の中で,  $t = 0$  において2体が原点から互いに逆方向に出発し,  $t = T$  において距離が最大に離れたところで速度が0となるようなもの(以下これを衝突-反発楕円軌道と呼ぶ)を考え, その作用積分の値を  $A_2$  と置く. このとき次が成り立つ:

**補題 1** もし  $x(t) \in H^1([0, T], \mathcal{X})$  が2重または3重の衝突を含めば, その作用積分の値は必ず  $A_2$  より大きい.

$A_2$  は実際には衝突軌道の作用積分の下限を与える. 実際, 衝突-反発楕円軌道を描く2体に, それらの軌道と垂直に原点から  $n$  だけ離れた第3の静止質量を加えた3体軌道  $x_n(t)$  を考え, その作用積分を  $A(x_n)$  と書くとき,  $n \rightarrow \infty$  とすれば明らかに  $A(x_n) \rightarrow A_2$  となるからである.

**証明**  $m_2$  と  $m_3$  が時刻  $T_1$  で衝突するとせよ. (このとき  $m_3$  もまた衝突しても構わない.) 上に注意したように, このとき  $m_3 = 0$  とすれば作用の値は小さくなるので, 以下  $m_3$  を忘れて2体だけで論ずることができる. この場合の作用の最小値は Gordon [6] により調べられており, 上記の値に等しいことが分かっている. その論法の概略は次の通りである: +++++(時間が有ったら補う)

次は, 適当な衝突を持たないテスト軌道を用意し, その作用積分値の評価を, テスト軌道の形状空間への射影の長さの評価に帰着させる. ここで Chenciner-Montgomery はテスト軌道として, 等ポテンシャル曲線をとる.  $E_3$  上に任意の初期点を取り, その点の角運動量とポテンシャルの値をそれぞれ  $I_0, U_0$  とする. 被約配位空間の半径  $\sqrt{I_0}$  の球  $I = I_0$  に制限して考えると,  $U = U_0$  は求められている八の字解と非常によく似た曲線を与える. この  $1/12$  である,  $E_3$  と  $M_1$  を結ぶ弧を取り, これをちょうど時間  $T$  で通過するような定速度の軌道を考えて, これは  $I_0$  でパラメータ付けられた  $\mathcal{X}/SO(2)$  内の被約テスト軌道の族を与える. もとの配位空間のテスト軌道としては, この引き戻しで角速度0を持つものをとる. これらの軌道の長さは,  $I_0 = 1$  のときの長さを  $l_0$  と置けば,  $l_0 \sqrt{I_0}$  と書ける. 以下  $l_0$  を Euler 等ポテンシャル長と呼ぶことにする.

**補題 2** 等ポテンシャルテスト軌道の作用が  $A_2$  より小さいかどうかは, Euler 等ポテンシャル長が

$$l_0 < \frac{\pi}{5}$$

を満たすかどうかで判定できる.

**証明**  $A_2$  の値は Chenciner-Desolneux [7] により計算されており,

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times (2\pi^2)^{1/3} \left( \frac{1}{2} \tilde{U}_2 \right)^{2/3} (2T)^{1/3}, \quad \tilde{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\tilde{U}_2$  はスケール変換されたポテンシャル  $\tilde{U} = \sqrt{I}U$  の等質量1の2体問題における値である. この計算は以下の通りである +++++ (時間があったら補う)

$I_0$  を動かしたときの等ポテンシャルテスト軌道の作用  $A(I_0)$  の最小値を計算しよう. 軌道に沿って  $I$  も  $U$  も一定なので, 作用積分の中身は定数となり, テスト軌道の定速度が  $l_0\sqrt{I_0}/T$  で与えられることに注意すれば,

$$A(I_0) = \left(\frac{1}{2}K_0 + U_0\right)T, \quad \text{ここに } K_0 = \left(\frac{l_0\sqrt{I_0}}{T}\right)^2, \quad U_0 = \frac{\tilde{U}_E}{\sqrt{I_0}}$$

定数  $\tilde{U}_E = \frac{5}{\sqrt{2}}$  はスケール変換されたポテンシャルの Euler 軌道に対する値である. よって問題は,  $I_0$  の関数

$$A(I_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{l_0\sqrt{I_0}}{T}\right)^2 T + \frac{5}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{I_0}}T$$

を最小にするという微積の問題に帰着し,

$$I_0 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}l_0^2}\right)^{2/3} T^{4/3} \quad \text{においてただ一つの極小} \quad a = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} l_0^{2/3} T^{1/3}$$

を持つことが分かる.

以上により  $a < A_2$  となるのは

$$\frac{3}{2}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} l_0^{2/3} T^{1/3} < \frac{1}{2} \times 3 \times (2\pi^2)^{1/3} \left(\frac{1}{2}\tilde{U}_2\right)^{2/3} (2T)^{1/3}$$

のときであり, これは簡単な計算で

$$l_0 < \frac{\sqrt{2}}{5}\tilde{U}_2\pi = \frac{\pi}{5}$$

に帰着する.  $\square$

### 【弧長の計算】

ここでは実際に上の条件が成り立つことを確かめるため, 等ポテンシャル曲線をなるべく具体的に表示する. まず, Jacobi 写像  $\mathcal{J} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}^2$  を

$$(z_1, z_2) = \mathcal{J}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_3 - x_2, \sqrt{\frac{2}{3}}\left(x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right)\right)$$

により  $\mathcal{X}$  と  $\mathcal{C}^2$  の等距離同型を実現する.  $\mathcal{X}$  の点  $((x_1, x_2, x_3))$  は  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  を満たしていることに注意. このことから  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = I$  が成り立つことが容易に確かめられる. この対応で  $SO(2)$  の  $\mathcal{X}$  への作用は, その  $\mathcal{C}^2$  への対角型作用に対応するから,  $\mathcal{X}/SO(2) = \mathcal{C}^2/S^1$  となる. 後者の商空間はこの作用で不変な多項式を並べた写像で実現できる:

$$\mathcal{K}(z_1, z_2) = (u_1, u_2 + iu_3) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2).$$

これは Hopf 写像と呼ばれるもので, ファイブレーション  $\mathcal{K} : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{C} = \mathbf{R}^3$  を実現している. 容易に分かるように

$$|\mathcal{K}(z_1, z_2)|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2 = I^2$$

が成り立つので, 3次元球面  $I = 1$  は  $\mathbf{R}^3$  内の2次元単位球面に写像される. (これが普通に言われる Hopf ファイブレーションである.) 最後の球面上で, 衝突点, Euler 点, Lagrange 点の座標は

それぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned} C_1 &= (-1, 0, 0), & C_2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & C_3 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \\ E_1 &= (1, 0, 0), & E_2 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & E_3 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \\ L^+ &= (0, 0, 1), & L^- &= (0, 0, -1) \end{aligned}$$

実際、例えば、 $C_1$  の場合は最初の座標で  $x_2 = x_3$ ,  $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = 1$  から、 $x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}x_1$ ,  $|x_1| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $|x_2| = |x_3| = \sqrt{\frac{1}{6}}$  となり、従って  $(z_1, z_2) = (0, \sqrt{\frac{3}{2}}x_1)$ ,  $(u_1, u_2, u_3) = (-1, 0, 0)$  と計算される。他も同様である。更に、

$$r_{23} = |x_2 - x_3| = \sqrt{2}|z_1|, \quad r_{31} = |x_3 - x_1| = \left| \sqrt{\frac{3}{2}}z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 \right|, \quad r_{12} = |x_1 - x_2| = \left| \sqrt{\frac{3}{2}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 \right|$$

に注意すると、次が得られる：

**補題 3** 形状球面上の点  $u = (u_1, u_2, u_3)$  に対応する配位空間の三角形は、辺長が

$$r_{23} = \sqrt{1 - C_1 \cdot u}, \quad r_{31} = \sqrt{1 - C_2 \cdot u}, \quad r_{12} = \sqrt{1 - C_3 \cdot u}$$

のものである。

実際、

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - C_1 \cdot u} &= \sqrt{1 + u_1} = \sqrt{1 + |z_1|^2 - |z_2|^2} = \sqrt{2}|z_1| = r_{23}, \\ \sqrt{1 - C_2 \cdot u} &= \sqrt{1 + \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2) - \sqrt{3}\operatorname{Re} \bar{z}_1 z_2} = \sqrt{\frac{3}{2}|z_2|^2 + \frac{1}{2}|z_1|^2 - \sqrt{3}\operatorname{Re} \bar{z}_1 z_2} = r_{31} \end{aligned}$$

等々である。□

次に、商空間の被約計量  $K_{\text{red}}$  を求めるため、配位空間の 2 点  $x, y \in \mathcal{X}$  の  $SO(2)$ -軌道の間距離  $d(x, y)$  を計算する。 $SO(2)$  は等距離写像として働くから、

$$d(x, y)^2 = \inf_{\theta} \sum_{j=1}^3 |x_j - e^{i\theta} y_j|^2 = \inf_{\theta} [|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y \cos \theta + 2\omega(x, y) \sin \theta]$$

[ ] 内の量を  $\theta$  で微分することにより、最小値を与える  $\theta_0$  が  $x \cdot y \sin \theta_0 + \omega(x, y) \cos \theta_0 = 0$  で決まることが分かり、これから

$$d(x, y)^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\sqrt{(x \cdot y)^2 + \omega(x, y)^2} = |x|^2 + |y|^2 - 2|\langle x, y \rangle|$$

と求まる。ここに  $\langle x, y \rangle = x \cdot y + i\omega(x, y)$  は先に定義した Hermite 質量スカラー積である。運動エネルギーはこの計量が接ベクトル空間に誘導する計量であるから、 $d(x, x + \varepsilon v)$  の展開を計算すると、

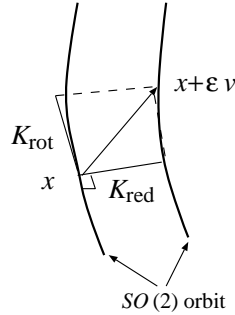
$$\begin{aligned} d(x, x + \varepsilon v) &= |x|^2 + (x + \varepsilon v) \cdot (x + \varepsilon v) - 2\sqrt{(x \cdot x + \varepsilon x \cdot v)^2 + \{\omega(x, x) + \varepsilon\omega(x, v)\}^2} \\ &= 2|x|^2 + 2\varepsilon x \cdot v + \varepsilon^2 |v|^2 - 2\sqrt{|x|^4 + 2\varepsilon x \cdot v |x|^2 + \varepsilon^2 (x \cdot v)^2 + \varepsilon^2 \omega(x, v)^2} \\ &= 2|x|^2 + 2\varepsilon x \cdot v + \varepsilon^2 |v|^2 - 2|x|^2 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon x \cdot v}{|x|^2} + \varepsilon^2 \frac{(x \cdot v)^2 + \omega(x, v)^2}{2|x|^4} \right\} + o(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon^2 \left\{ |v|^2 - \frac{(x \cdot v)^2 + \omega(x, v)^2}{|x|^2} \right\} + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$



ここで  $\omega(x, x) = 0$  を用いた. 以上により被約運動エネルギー  $K_{\text{red}}(x, v)$  は  $\varepsilon^2$  の係数

$$K_{\text{red}}(x, v) = |v|^2 - \frac{\omega(x, v)^2}{|x|^2}$$

に等しい. (ここでは, 自然な射影  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/SO(2)$  による引き戻しの方を記している.)  $v$  が  $x$  の軌道に接するとき, すなわち,  $v \parallel ix$  のとき, これは 0 となるので,  $K_{\text{red}}$  は軌道に沿って一定である.



ここで形状空間  $\mathbf{R}^3$  の極座標

$$u_1 = r^2 \cos \varphi \cos \theta, \quad u_2 = r^2 \cos \varphi \sin \theta, \quad u_3 = r^2 \sin \varphi$$

を導入する.

$$r^2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 = I$$

となるので, わざと  $r$  でなく  $r^2$  としたのである. また, 通常の球面座標と比べて  $\varphi$  と  $\theta$  の役割が入れ替わっていることに注意. 平面三角形の配位空間としての形状球面に対する極座標の各変数の意味は次の通りである: 緯線  $\varphi = \text{const.}$  は同じ向きと (回転を除き) 同じ慣性主軸を持つ三角形の集合を表す. これはまた, 面積一定ということで特徴付けられる. 三角形の面積は  $\text{Im} \bar{z}_1 z_2$  に, 従って  $u_3 = \sin \varphi$  に比例する. 次に, 経線  $\theta = \text{const.}$  は  $|z_1|^2 - |z_2|^2$  一定に相当し, これは配置空間  $\mathcal{D}$  に働く特殊直交群の軌道となる.  $\mathcal{D}$  の詳細は [9] に書かれている.++++

**補題 4** 被約運動エネルギー  $K_{\text{red}}$  に相当する商計量は上の極座標で

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4} (\cos^2 \varphi d\theta^2 + d\varphi^2)$$

と表される. 特に, 形状球面  $I = 1$  はこの計量に関する半径  $1/2$  の通常の球面と距離同型となる. また形状空間  $\mathbf{R}^3$  はこの球面を底とする錐を成し, 球面は三重衝突の点から等距離 1 を成す.

実際, +++++

補題 3 を用いると,  $r = 1$  に注意して

$$-C_2 \cdot u = -\frac{1}{2} \cos \varphi \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \theta = \cos \varphi \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

等々に注意して, Euler 配位を通る形状球面上の等ポテンシャル曲線が

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cos(\theta + \frac{4\pi}{3})}} = \tilde{U}_E = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

という方程式で表されることが分かる。これは赤道  $\varphi = 0$  の二重被覆となっており、従って  $\varphi = \varphi(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 4\pi$  でパラメトライズされる。よってこの長さの  $1/12$  が我々に興味のある量

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{12} \int_0^{l_0} ds = \frac{1}{12} \int_0^{4\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \varphi(\theta) + \varphi'(\theta)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \varphi(\theta) + \varphi'(\theta)^2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos^2 \varphi(\theta) + \varphi'(\theta)^2} d\theta. \end{aligned}$$

を与える。この値を精度保証付きで数値計算し、 $\pi/5$  より小さいことを示せばよい。Chenciner と Montgomery はこの計算を C. Simó に依頼し、その結果

$$\frac{\pi}{5.082553924511} \leq l_0 \leq \frac{\pi}{5.082553924509}$$

を得た。計算は精度保証付きの Newton 法による  $\varphi(\theta)$  の計算と、精度保証および誤差評価付きの台形則による数値積分を組み合わせたものであった。

私はこの計算を追試し、その結果+++++(精度保証のプログラムが自分で書けないときは西川さんに聞きなさい) を得た。

#### 【対称性を持つ周期軌道の存在証明】

Klein 群  $Z/2Z \times Z/2Z$  の  $R/\bar{T}Z$ , 及び  $R^2$  への作用 (6.18) を思い出そう。

**補題 5** Euler 等ポテンシャル曲線と同様のパターンで対称性を与えられ、角運動量 0 で持ち上げられたた最小化パスの連結ループ  $x$  は時間の平行移動と空間の回転を除き

$$x(t) = (q(t + 2\bar{T}/3), q(t + \bar{T}/3), q(t))$$

の形を持つ。

**証明** 3段階に分けて行われる。

第1段 形状空間の最小化弧は初期および終期多様体に直交する。これは直交していなければそのように修正したものの方が作用積分を小さくするから直感的明らかだが、厳密には作用の変分を計算し、現われる境界項を観察することで示される。

第2段 この弧を経線に関して、あるいは赤道に関して鏡映変換したものは再び最小化弧を与える。ただし経線に関して鏡映したものは始点と終点の境界条件が入れ替わる。これらの合同な弧から適当なものを 12 個選んで、すなわち、経線においては経線に関して鏡映したものと、また Euler 配位においては赤道に関して折り返したものを別の経線で鏡映したものと、繋げれば、接線も一致するように繋がり、周期  $\bar{T} = 12T$  の  $H^1$  級の閉曲線  $x(t)$  が得られる。以下に繋ぎ方をより正確に述べる。

まず、最初の弧を  $M_1$  で折り返したものは  $M_1$  と直交するので、元の弧とは明らかに  $H^1$  級で繋がる。この繋げ方から  $x(T+t) = s_1 x(T-t)$  という対称性が成り立つことが分かる。ここに、 $s_1$  は  $M_1$  に関する鏡映変換である。これは配位空間では次のように実現される： $M_1$  は  $m_1$  を頂点とする二等辺三角形なので、その対称軸（底辺の二等分線）に関する鏡映  $\tau$  が存在する。 $R^2$  の座標をこの対称軸が  $x$  軸となるように、i.e.  $\tau(x, y) = (x, -y)$  となるように、選ぶ。また  $S_1$  を  $m_2$  と  $m_3$  を交換する演算子とする： $S_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$ 。このとき  $s_1 = S_1 \circ \tau = \tau \circ S_1$  である。こうして  $E_3$  から  $E_2$  に到る時間区間  $2T = \bar{T}/6$  分の弧ができた。

次に、これを  $E_2$  が載る緯線  $M_2$  に関する鏡映と赤道に関する鏡映の合成で得られる“半捻り”  $H_2$  で、 $E_2$  における接線を一致させて倍に延長する。式で書けば  $x(2T+t) = H_2 x(2T-t)$  となる。

配位空間では  $H_2$  は  $m_1$  と  $m_3$  の交換と半捻り  $\sigma \circ \tau(x, y) = (-x, -y)$  の合成で実現される. こうして  $E_3$  を  $E_1$  に結ぶ  $4T = \bar{T}/3$  分の弧ができる.

あとはこの操作を繰り返せば,  $E_3 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1$  で  $6T = \bar{T}/2$  分の弧ができ, 出発時の弧と赤道に関して対称な形で元の  $E_1$  に戻って来るので, 更にこの操作を継続すれば, その倍の時間  $12T = \bar{T}$  で出発時と接線も一致して  $E_1$  に戻る. こうして, 形状空間の  $\bar{T}$  周期の閉軌道が得られた. これは運動エネルギー  $I_0$  の等ポテンシャル曲線と構造的に酷似している. またこれを配位空間に引き戻したものは, 周期  $\bar{T}$  で回転を除き元に戻るような軌道を与える.

第3段 回転の不定性を調節して配位空間における真の周期軌道を構成する. そのため面積原理 ([8]) を用いる: 形状球面上に閉曲線があるとき, それを引き戻した配位空間の曲線の始点と終点に対応する三角形は相似である. 二つを (スカラー倍を除き) 同じ向きにするために必要な回転量は形状球面でこの閉曲線が囲む球面領域の符号付き面積の2倍に等しい. (形状球面の半径は  $1/2$  なので, 総面積は  $4\pi \cdot (\frac{1}{2})^2 = \pi$  となり, 2倍が付くことで角度が  $\text{mod } 2\pi$  で確定することが分かる.) また, 曲線が閉じておらず, 形状球面の赤道上の Euler 点から出て他の Euler 点に終わるときは, 赤道上を後戻りしてもとの Euler 点に戻り閉じた道とする. このとき囲まれる符号付き面積の二倍は, この曲線を実現する配位空間の運動の初期と周期での Euler 軌道の線分の成す角に等しい. 最後に, 二等辺三角形を表す緯線上の点から発して他の同様の緯線上の点に終る弧の場合は, それらの緯線に沿って赤道まで降り, 赤道上の大円弧と結んで閉曲線にしたものの符号付き面積が, 最初の二等辺三角形と最後の二等辺三角形の間の回転角を与える.

上で構成した形状球面上の閉曲線は赤道に関して, また二等辺三角形の経線に関して対称性をもっている. 符号付き面積はいずれも 0 に等しいことに注意しよう. 詳しく見ると,

1)  $E_1$  から出発して  $2T$  後に  $E_2$  を通って  $4T$  後に  $E_1$  に達するとき,  $2T$  後では配位線分は元と異なる方向を持つが,  $4T$  後では出発時と同じ方向になる.

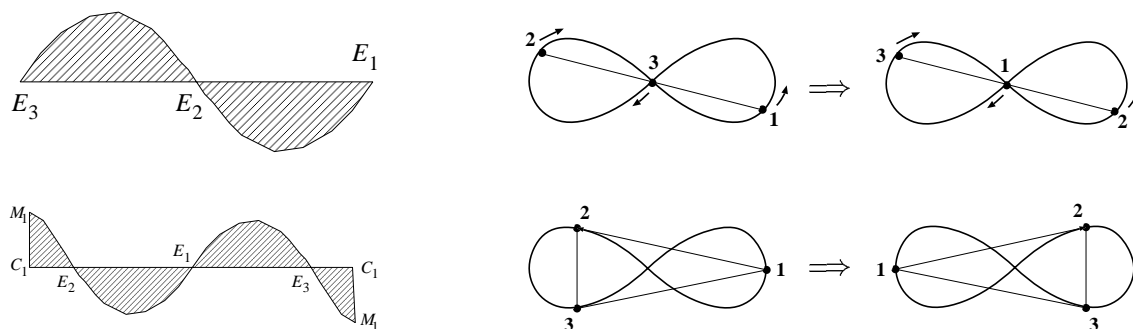
2)  $6T$  後に二等辺三角形は同じ形に戻る.

ただしいずれの場合も質点  $m_1, m_2, m_3$  の間の入れ換えは起こっている訳である.

以上をまとめると, 時刻の原点  $t = 0$  に Euler 配位  $E_3$  を置き, こうして得た解  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  から  $q(t) = x_3(t)$  を取り出せば,

$$q(t) = \begin{cases} x_3(t) & \text{for } 0 \leq t \leq 4T, \\ x_2(t - 4T) & \text{for } 4T \leq t \leq 8T, \\ x_1(t - 8T) & \text{for } 8T \leq t \leq 12T \end{cases}$$

となっている訳である. こうして,  $4T$  時間後には 2, 3, 1 は 3, 1, 2 に, また  $8T$  時間後には 1, 2, 3 に, 同じ速度を持って入れ替わる. 3体は同一の閉曲線  $q(t)$  を周期  $\bar{T} = 12T$  で, 位相差  $\bar{T}/3$  を持って運動する. 以上より Klein 群の作用に関する同変性も容易に分かる.



### 【軌道が八の字であることの証明】

以上で Klein 群に関する同変性を持った閉軌道解の存在は示されたが、まだその形が八の字であることは分からない。もしかすると他にも小さなループなどが存在するかもしれないからである。閉軌道が二つの“耳たぶ”より成ることは次の補題から分かる：

**補題 6** 個別の質点の角運動量  $q(t) \times \dot{q}(t)$  は  $0 < t \leq \bar{T}/4$  の間、決して 0 にならない。従って対称性により、質点が原点を通過する  $t = 0$  と  $t = \bar{T}/2$  においてしか 0 とならない。

**補題の証明**  $q(t) = x_3(t)$  であったことを思い出すと、Newton の運動方程式により

$$\frac{d}{dt}\{q(t) \times \dot{q}(t)\} = \dot{q}(t) \times \dot{q}(t) + q(t) \times \ddot{q}(t) = q(t) \times \ddot{q}(t) = x_3 \times \left( \frac{x_1 - x_3}{r_{13}^3} + \frac{x_2 - x_3}{r_{23}^3} \right)$$

ここで  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  を使うと  $x_3 \times x_2 = -x_3 \times x_1$  なので

$$\frac{d}{dt}\{q(t) \times \dot{q}(t)\} = \left( \frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) x_3 \times x_1$$

この量が 0 となるのは

- a)  $x_1$  と  $x_2$  が一次従属となる。
- b)  $r_{13} = r_{23}$

のいずれかの場合にしか起こり得ない。a) の場合は関係式  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  により 3 体が一直線を成し、従ってその点で形状空間の赤道を切ることになる。しかし、最小解の場合、それは Euler 点でなければならない。なぜなら、もし Euler 点の途中で赤道を切れば、 $E_3$  と  $M_1$  の間で最小解の弧が赤道の上部と下部の部分に分けられることになる。このとき、どちらかを赤道に関して折り返したものは同じ値の作用積分を持ち、かつ衝突も持たない別の軌道となるが、この軌道は赤道上の折り目で解析的弧にはならず、3 体問題の常微分方程式の解の正則性に反する。

次に b) の場合、最小解の軌道は、 $E_3$  を通る経線  $M_3$  (対応する二等辺三角形を表す) に再び交わったことを意味するが、 $M_3$  に関して弧の一部を折り返したものを考えれば同様の矛盾を得る。

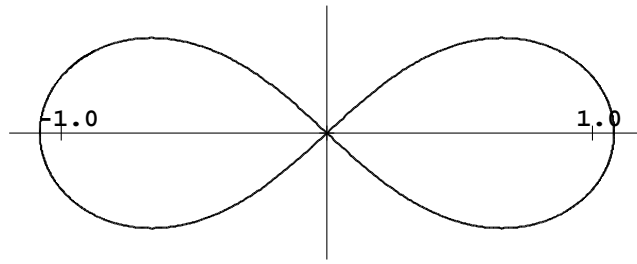
以上の計算から、 $E_1$  に達する  $0 < t < \bar{T}/6$  の間、角運動量の増加率は負、その後の  $\bar{T} < t \leq \bar{T}/4$  では正となることが分かった。証明を完了するには、最後の点において角運動量の値自身がまだ負であることを言えば、到るところ負であることが示せる。しかしこの点で  $m_3$  は速度が 0 になることも、原点方向に運動していないことも明らかである (もしそうなら、対称性によりこの点で軌道が折れ曲がってしまい、解析弧でなくなる) ことから明らかである。□

この補題により、軌道は原点に関して星状形をした二つの上下左右対称な耳たぶより成る (従ってこれを八の字と呼んでも差し支えない) ことが分かる。実際、角運動量の平面極座標表示  $(r, \theta)$  により

$$q(t) \times \dot{q}(t) = r e^{i\theta} \times (\dot{r} e^{i\theta} + i r e^{i\theta} \dot{\theta}) = r^2 \dot{\theta}$$

なので、これが常に負ということは、 $\theta$  が単調減少すること、すなわち原点から見て起動が時計回りに常に動いており逆戻りはしないことを意味するからである。

ちなみに、4 次の Runge-Kutta 法を用いた数値計算で描いた八の字軌道の正確な図は次のようなものである。恐らく代数曲線などにはなっていないであろうが、この曲線の解析的表現を探求するのは興味深い。



### この章の参考書

- [1] 斎藤利弥『解析力学入門』, 至文堂, 1964.
- [2] C. L. Siegel-J. K. Moser “Lectures on Celestial Mechanics”, Springer, 1971.
- [3] R. Montgomery “A new solution to the three-body problem”, Notices of the AMS, **48-5** (2001),471–481.
- [4] A. Chenciner-R.Montgomery “A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses”, Annals of Math. **152** (2000), 881–901.
- [5] K.-C. Chen “On Chenciner-Montgomery’s orbit in the three-body problem, Discrete and Computational Dynamical Systems, **XXX** (2001), XXX–XXX.
- [6] W.B. Gordon “A minimizing property of Keplerian orbits”, Amer. J. Math. **99** (1977), 961–971.
- [7] A. Chenciner-N. Desolneux “Minima de l’intégrale d’action et équilibres relatifs de  $n$ -corps”, CRAS **326** Série I (1998), 1209–1212; ibid. **327** (1998), 193.
- [8] R. Montgomery “The geometric phase of the three-body problem”, Nonlinearity **9** (1996), 1341–1360.
- [9] A. Albouy-A. Chenciner “Le problème des  $n$  corps et les distances mutuelles”, Inventiones Math. **131** (1998),151–184.