問題 1 境界値問題

$$\frac{d^4u}{dx^4} = f, \qquad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$$

を考える．ここに u は両端を固定された棒が，棒に垂直な方向に単位長さあたり f の強さで働く外力による曲げの変位を表す．

(a) 力学では，この方程式は次のようにして導かれる．各方程式の物理的な意味を述べよ．

$$M = u'', \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$
$$M'' = f, \qquad 0 < x < 1, \tag{2}$$
$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \tag{3}$$

(b) 上の問題の弱形式による表現：

$$(u'', v'') = (f, v) \qquad \forall v \in W$$

を求める．適当な空間 W を定義せよ．

(c) 区間 $I = [a, b]$ に対し，

$$P_3(I) = \{v; v\text{は 3 次以下の実係数多項式で表される連続函数}\}$$

と置く．$P_3(I)$ の元 v は 4 個の値 $v(a), v'(a), v(b), v'(b)$ により一意的に定まることを示せ．

(d) $[0, 1]$ 上に与えられたメッシュ分割に関して，この上で区分的に 3 次式であるような C^1 級函数の空間 W_h を導入し，この基底と次元を示せ．

(e) 最初に与えられた問題に対し，このような区分 3 次要素による有限要素解法を示せ．

(f) 実際にプログラムを書いてこの解法を実行して見よ．純粋数学系の人は大まかな分割を用いて手計算で代行してもよい．