問題３ 1) f を台が $[-\pi/h, \pi/h]$ に含まれるような滑らかな函数とするとき，Fourier 級数論を用いて

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{ixh\ell} \widehat{f}(h\ell) h \tag{1}$$

が $-\pi/h \leq x \leq \pi/h$ において成り立つことを示せ．ここに

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

は f の Fourier 変換を表す．［ヒント：$\xi = h\ell$ のとき，$\hat{f}(\xi)$ は f の第 ℓ Fourier 係数に他ならないことを用いよ．］

2) $h \to 0$ の極限をとることにより

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \tag{2}$$

を示せ．［ヒント：$\hat{f}(\xi)$ は急減少の連続函数で，(1) は (2) の (広義) Riemann 積分としての近似和と解釈されることを用いよ．

問題４ 1) $\boldsymbol{R}$ 上の L^2 級函数 $\dfrac{1}{x+i}$ の Fourier 変換を計算せよ．［ヒント：ξ の符号により場合に分けて，積分路を上半平面または下半平面へ並行移動し，留数計算を用いよ．］

2) 得られた結果は L^1 級の函数であることを確認し，これに逆 Fourier 変換を施して，元に戻ることを確かめよ．

3) 数学系の人は以上の計算の正当化を試みよ．