問題１０ 三角形 $K \subset \boldsymbol{R}^2$ の最大辺長を h, 最小内角を γ とするとき, K の重心座標 λ_j の勾配 $|\nabla\lambda_j|$ の最良評価を h と γ を用いて与えよ.

問題１１ $K \subset \boldsymbol{R}^n$ を n 次元有限要素の領域, $B = B_\rho(x_0) \subset K$ を K の点 x_0 を中心とする半径 ρ の球体とする. φ を台が $B_\rho(x_0)$ と一致するような C^∞ 級の函数で, $\int_K \varphi(x)dx = 1$ を満たすものとする.

1) 函数 $u(x)$ の y を中心とする Taylor 展開は

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(y)(x-y)^\alpha \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m} (x-y)^\alpha \int_0^1 \frac{m}{\alpha!}(1-s)^{m-1} D^\alpha u(sx+(1-s)y)ds \end{aligned}$$

の形に書けることを示せ. ここに, 多重添字 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ に対し,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

を意味する.

2) 上の式を $\varphi(y)$ を重み函数として y につき平均すれば

$$u(x) = Q_{m-1}(x) + R_m u(x)$$

という表現が得られることを示せ. ここに, $Q_{m-1}(x)$ は x の $m-1$ 次多項式であり, R_m は

$$R_m u(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha} \int_{C_x} (x-y)^\alpha k(x,y) D^\alpha u(y)dy$$

の形で, C_x は点 x と $B_\rho(x_0)$ の合併の凸包を表し, 核函数は

$$|k(x,y)| \le C\left(1 + \frac{|x-x_0|}{\rho}\right)^n |x-y|^{-n}$$

という評価を満たす.

3) K の直径を κ とするとき, Sobolev の不等式の $p=2$ の場合である

$$Tu(x) = \int_K \frac{u(y)}{|x-y|^{n-m}} dy \le C\kappa^{m-n/2} \|u\|_{L^2(K)}$$

を示せ. [ヒント：点 y を中心とする極座標を用いよ.]

4) 同じく

$$\|Tu(x)\|_{L^2(K)} \le C\kappa^m \|u\|_{L^2(K)}$$

を示せ.

5) $R_m u(x)$ の $L^2(K)$ ノルムでの評価を求める.

6) $D^\alpha R_m u(x)$ の $L^2(K)$ ノルムでの評価を求める.