問題１２ ξ^k を勾配法による $A\xi = b$ の解の近似列とする.

1) $e^k = \xi - \xi^k$ を誤差とするとき, A- ノルム $\|\cdot\| := \sqrt{(A\cdot,\cdot)}$ に関して

$$\frac{\|e^k\|_A^2 - \|e^{k+1}\|_A^2}{\|e^k\|_A^2} = \frac{(d^k, d^k)}{(Ad^k, d^k)} \frac{(d^k, d^k)}{(A^{-1}d^k, d^k)}$$

を示せ.

2) 上の量 $\geq 1/\kappa(A)$ を示せ.

3) $\|e^k\|_A$ の減り方は

$$\|e^{k+1}\|_A \leq \gamma \|e^k\|_A, \qquad \gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa(A)}} \doteqdot 1 - \frac{1}{2\kappa(A)}$$

を満たすことを示せ.

問題１３ n 次の Chebyshev 多項式を

$$T_n(x) := \cos(n \mathrm{Arccos}\, x)$$

で定める.

1) $T_n(1)$, $T_n(-1)$ の値を求める. また $n \geq 1$ については x^n の係数は 2^{n-1} であることを示せ.

2) Euler の関係式

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

および

$$\theta = \mathrm{Arccos}\, x = -i \log e^{i\theta} = -i \log(x + i\sqrt{1 - x^2})$$

を用いて, $|x| > 1$ のときにも通用する表現

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\}$$

を導け.

3) $\varepsilon > 0$ を微小数として $x = (1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$ と置くとき

$$T_n\left(-\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) = \frac{(-1)^n}{2}\left\{\left(\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{\varepsilon}}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}\right)^n\right\}$$

を示せ.

4) $p_n(x)$ を

$$p_n(x) = c_n T_n\left(2\frac{x - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} - 1\right)$$

(ただし c_n は $p_n(0) = 1$ となるように選ぶ) により定めるとき, 区間 $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ において

$$|p_n(x)| \leq 2\left(\frac{1 - \sqrt{\kappa(A)}}{1 + \sqrt{\kappa(A)}}\right)^n$$

が成り立つことを示せ. [$\varepsilon = 1/\kappa(A)$ ととり, $[-1, 1]$ では $|T_n(x)| \leq 1$ なる事実と 3) の計算を用いよ.]

【付記】 普通, Chebyshev 多項式のミニマックス性は, "x^n の係数を 1 に正規化した状態で, ある区間での最大値を最小にする多項式は Chebyshev 多項式の相似変換で与えられる" という風に述べられる. ここでは, 区間外の点での値を正規化した状態でのミニマックスが問われているので, 通常の議論が当てはまることは少しも

自明ではない．しかし，このミニマックス問題の解が何かわからなくても，講義で述べた評価を達成するような多項式が存在することだけは，上の考察からわかる．評価がこれ以上改良出来ないことをいうのに，この正規化条件が普通と異なるミニマックス問題の解が Chebyshev 多項式の相似変換で与えられることを示す必要があるわけである．興味のある人は，数値解析の参考書に書かれている通常のミニマックス問題の解の議論を勉強しながら考えてみよ．

これで本当におしまい．講義は面白かった？少しは役に立ちそう？感想を e-mail で送ってください．来年の役に立てます．それから，講義は終っても，後でわからないところがあったら，いつでも質問に来て下さい．アフターサービス付きです．(*^^*)