

1 複素数

【複素数と函数論の歴史】

... 代数計算で平方根の内部に負の数が現れうることは東西の文明で認識, しかし“虚題”として捨てられた.

...Cardano G.: 3 次方程式の根の公式で虚数を使用. しかしその有用性に気づいていない

...Bombelli R.: Cardano の公式で虚数の計算をうまくやると 3 実根がすべて求まることを指摘. $2i \times i = -2$ 式の計算をしていた.

...Euler L.: 虚数を用いて膨大な計算を残した. 記号 i も導入. しかし著作物の中には $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{6}$ などとも書かれている. (彼は多価函数を知っていたのでその意味で書いているかもしれない.)

...Argand R.: 複素数を平面の点に対応させた最初の人 (1806). しかしそれだけ.

...Gauss C.F.: 代数方程式が複素数の範囲で次数だけの根を持つことを証明. 複素数を変数とする函数の理論を持っていた. 複素積分が平面の線積分であることも認識. Cauchy の積分定理を知っていた. (しかし非難を恐れて公表論文では複素数を使わず. そのため函数論の創始者の中に入らず.)

...Abel N. H.: 楕円函数, 及びそれを一般化した Abel 函数の理論を複素変数の函数の理論として与えた.

...Cauchy A.: 正則関数の定義は与えずに函数論をどんどん展開.

...Riemann. B., Weierstrass K.: それぞれ幾何学的, 及び解析学的立場から一般の解析函数の理論的基礎を築いた.

問題 1.1 下記参考書の中から (あるいは他の数学史書から) 適当なものを選んで一部または全部を読み, 上の箇条書きの中から (あるいはそれ以外に函数論に関連した歴史の中から) 気に入ったトピックを選んでレポートせよ.

参考書

- 1) 高木貞治『近世数学史談』, 共立全書
- 2) クライン『19 世紀の数学』, 共立
- 3) ボタチーニ『解析学の歴史』, 現代数学社
- 4) デュードネ編『数学史 I, II, III』, 岩波

【Cardano の公式】 3 次方程式は組立除法を用いた根の平行移動演算で $x^3 + qx + r = 0$ に帰着される.

因数分解の公式: $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ (1 の原始 3 乗根) として

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z)$$

すると, $R = \frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$, $y = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{R}}$, $z = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{R}}$ と置いたとき, $q = 3yz$, $r = -y^3 - z^3$. 従って

$$0 = x^3 + qx + r = x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz = (x - y - z)(x - \omega y - \omega^2 z)(x - \omega^2 y - \omega z)$$

これから 3 根

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{R}}, \quad \omega \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{R}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{R}}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{R}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{R}}$$

が得られる.

判別式: $D := -108R = -27r^2 - 4q^3$. $D=0$ のとき重根. 更に p, q が実なら, $D > 0$ のとき 3 実根, $D < 0$ のとき 1 実根と共役複素根.

問題 1.2 3 次方程式 $x^3 - 15x - 4 = 0$ を 1) 高校生式のやり方で, 2) Cardano の公式を用いて, 解け. (3 根とも実のときに計算の途中で必ず虚数が必要となることは Galois 理論を用いて後に示された.)

【複素数の演算と複素平面】 $x + iy \leftrightarrow (x, y)$ と見なすと, 加減算と実数倍はベクトル演算に他ならない. 複素数同士の乗除算が新しい.

実は, 数学史の上ではベクトルの方が概念としては新しい. \mathbf{R}^n の点に四則演算が入るのは $n = 2, 4$ だけだが, ベクトル空間は n が何でも可. それが分かるまでは, $n = 4$ の場合 Hamilton の四元数 (quaternion) はとても貴重だった: $\mathbf{x} = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$, $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$. 非可換体となる.

i による乗法は 90 度の回転と解釈される. よって i^2 は 180 度の回転, すなわち -1 倍. (2 次の正方行列による表現も可能: $a + bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. しかしこれもずっと後の話.)

【極表示】 $z = x + iy = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (絶対値), $\theta = \text{Arctan} \frac{y}{x}$ (偏角). ここに $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ の略 (Euler の等式). de Moivre の定理:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

これは指数法則 ($e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$ に他ならない.

極表示を用いると, 冪乗根は偏角の等分に帰着される.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

特に, 1 の n 乗根は $e^{2\pi ki/n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. 最初の $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ を 1 の 原始 n 乗根 という.

\sqrt{z} は本質的に多価函数である. $\sqrt{1} = 1$ という規約を連続的に繋げてゆくと, 原点を一回転した後は $\sqrt{1} = 1 \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{-1} = i \Rightarrow \sqrt{-i} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{1} = -1$ となってしまう. (折り紙の帆かけ舟!)

【初等函数の複素化】 多項式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

は, 変数が複素数 $z = x + iy$ になってもそのまま意味を持つ.

冪級数

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

は, 収束円内の複素数 z に対して意味が付く.

複素数の列が収束 \iff 平面の点列として収束 \iff 実部, 虚部それぞれの数列が収束.

平面の距離は複素数の絶対値 $\text{dis}(x+iy, 0) = |x+iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を用いて測られる: $\text{dis}(z, w) = |z-w|$ は平面の Euclid 距離と一致.

冪級数を用いて複素化する例:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

指数法則が成立するので, $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, また Euler の等式の正当化も得られる:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) = \cos y + i \sin y$$

三角函数は指数函数に帰着:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

問題 1.3 双曲線函数 $\sinh x, \cosh x$ の定義と、それらが満たす諸公式を挙げ、それらの関係式が何故 $\sin x, \cos x$ のそれに似ているかを説明せよ。

$w = e^z$ の絶対値は e^x , 偏角は y . 従って逆函数をとると

$$\log w = \log |w| + i \arg w$$

問題 1.4 対数函数の Taylor 展開を用いて $\log(1+z) = \log \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + i \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x}$ を直接示せるか?

\log は無限多価. 例: $\log(-1) = \pi i + 2n\pi i$ ($n \in \mathbf{Z}$). 逆三角函数も対数函数で書ける: 図 1.1 より $x = \sin \theta$ とすると $\theta = \operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{i} \log(\sqrt{1-x^2} + ix)$

例題 1.1 1) 高校では $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$ と絶対値を付けたのに大学の先生が付けないのは何故か?

2) $\int \frac{1}{x^2+a} dx$ は a の正負で形がひどく違うが, 本当に別の函数になってしまうのか?

解答 1) $x < 0$ のとき $\log |x| = \log(-x) = \log x + \log(-1)$ だから, 積分定数の違いに吸収される.

2) $a < 0$ のとき

$$\int \frac{1}{x^2+a} dx = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \int \left(\frac{1}{x-\sqrt{-a}} - \frac{1}{x+\sqrt{-a}} \right) dx = \frac{1}{2\sqrt{-a}} (\log(x-\sqrt{-a}) - \log(x+\sqrt{-a}))$$

だが, ここで $a > 0$ とすれば

$$\log(x \pm \sqrt{-a}) = \log(x \pm \sqrt{a}i) = \log \sqrt{x^2+a^2} \pm i \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{a}}{x} = \log \sqrt{x^2+a^2} \pm i \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{a}} \right)$$

だから

$$\int \frac{1}{x^2+a} dx = \frac{1}{2i\sqrt{a}} \times (-i) \left(\pi - 2 \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$$

第 2 項は積分定数に繰り込める.

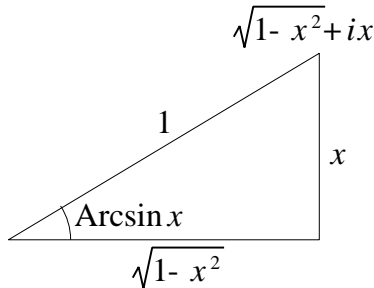


図 1.1 $\operatorname{Arcsin} x$ の \log による表現

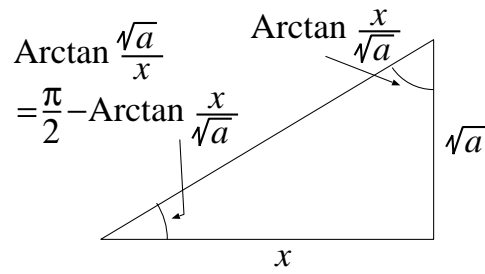


図 1.2 $\operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{a}}$ への書き直し

問題 1.5 $\operatorname{Arctan} x$ を \log で表せ.

問題 1.6 $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+1}} dx$ の表現が $a = 1$ から $a = -1$ まで変わる様子を上にならって解説せよ.

問題 1.7 $\log(-1 + \sqrt{-3})$ の値を示せ.

2 複素数値 2 変数函数に対する微積分

複素 1 変数は実 2 変数に相当:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy \quad \text{より} \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (1)$$

複素変数 z の複素数値関数 $F(z) \Leftrightarrow x, y$ の 2 変数関数 $f(x, y) + ig(x, y)$

微分・積分の演算は線型なので、実部・虚部それぞれに作用

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) + ig(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

積分の方は重積分が自然:

$$\iint_D (f(x, y) + ig(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + i \iint_D g(x, y) dx dy$$

【方向微分】 $x = \varphi(t), y = \psi(t), 0 \leq t \leq T$ を平面曲線 C のパラメータ表示とするとき

$$\text{曲線に沿う微分} \quad \frac{d}{dt}F(\varphi(t), \psi(t)) = F_x \frac{d\varphi}{dt} + F_y \frac{d\psi}{dt}$$

特に $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, a, b$ 単位ベクトルのとき

$$(a, b) \text{ 方向への微分} \quad \frac{d}{dt}F(\varphi(t), \psi(t)) = aF_x + bF_y$$

偏微分は $\Leftrightarrow x$ -軸, y -軸に沿う方向微分の特別なもの.

【線積分】 1 次微分形式 $Fdx + Gdy$ の曲線弧 C に沿う線積分は

$$\int_C Fdx + Gdy = \int_0^T \{F(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + G(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\} dt$$

パラメータの取り換えで値は不変. 曲線の向きを変えると符号が変わる. 特に, $C: y = f(x), a \leq x \leq b$,
あるいは $C: x = g(y), a \leq y \leq b$ のとき, それぞれ

$$\int_C ydx = \int_a^b f(x)dx, \quad \int_C xdy = \int_a^b g(y)dy$$

複素微分形式

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy$$

で表すこともできる: $F = f + ig$ なら,

$$\begin{aligned} \int_C Fdz &= \int_C (f + ig)(dx + idy) = \int_C \{(f dx - g dy) + i(g dx + f dy)\}, \\ \int_C Fd\bar{z} &= \int_C (f + ig)(dx - idy) = \int_C \{(f dx + g dy) + i(g dx - f dy)\} \end{aligned}$$

C が閉曲線のときは線積分に \oint の記号を使うのが慣例.

例 2.1 原点を中心とする半径 R の円周に正の向きをつけたもののパラメータ表示を普通に $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$, あるいはまとめて $z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ として

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta}d\theta}{R^n e^{ni\theta}} = iR^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta = iR^{1-n} \left[\frac{e^{(1-n)i\theta}}{1-n} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (n \neq 1)$$

$n = 1$ のときだけ特別で,

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

線積分の根源的定義 (数値積分でも使える): $C: z = \Phi(t), 0 \leq t \leq T, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, をパラメータの分割として, $z_j = \Phi(t_j)$ と置くと

$$\int_C Fdz = \lim \sum_{j=1}^N F(z_j)(z_j - z_{j-1})$$

極限は分割を細かくする操作に対するもの.

これは, $\Phi = \varphi + i\psi$ のとき

$$\begin{aligned} z_j - z_{j-1} &= \Phi(t_j) - \Phi(t_{j-1}) = (\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})) + i(\psi(t_j) - \psi(t_{j-1})) \\ &\doteq \varphi'(t_j)(t_j - t_{j-1}) + i\psi'(t_j)(t_j - t_{j-1}) \end{aligned}$$

よりわかる. (代表点の取り方はいろいろある.)

問題 2.1 C を単位円周に正の向きを与えたものとするとき, $n \in \mathbf{Z}$ に対し, 次の線積分を定義に従って計算せよ.

$$1) \oint_C z^n dz \qquad 2) \oint_C \bar{z}^n dz$$

これでおしまいなら函数論は不要だが...

3 正則函数

【正則函数】 (holomorphic function) e^z は複素 1 変数 z の函数だから有り難い. すべての複素函数はそうではない. どこが違うかは多項式で見ると明らか: 2 変数の勝手な多項式 $F(x, y)$ は z で表そうとすると, 一般には \bar{z} も必要になる. 例:

$$x^2 + y^2 = z\bar{z}, \quad \text{しかし} \quad x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$$

実 1 変数の多項式を複素化したものはもちろん z だけで書ける.

正則函数の特徴づけ (その 1) $F(z)$ が \bar{z} を含まない $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F = 0$.

(1) より形式的に

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ を Cauchy-Riemann の条件あるいは **Cauchy-Riemann の偏微分方程式** という.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0$$

より, 実で表した条件は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

という実部・虚部に対する連立偏微分方程式となる. こちらの表現の方が元. これより

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta g = 0 \quad (\text{Laplace 方程式})$$

i.e. 正則函数の実部, 虚部は調和函数となる.

問題 3.1 x, y の 2 変数函数 $f(x, y) := x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$ が $z = x + iy$ の正則函数とみなせるかどうかを Cauchy-Riemann の方程式を用いて確認せよ.

問題 3.2 次の函数が正則かどうかを判定せよ.

$$\begin{aligned} 1) x^2 - y^2 + 2xyi & \qquad 2) x^2 - y^2 - 2xyi & \qquad 3) e^{x^2 - y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy) \\ 4) \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xyi}{(x^2 + y^2)^2} & \quad ((x, y) \neq (0, 0) \text{ とする}) \end{aligned}$$

問題 3.3 次の実数値関数に適当な虚部を付けて正則関数にできるか?できるものはその結果を示し,できないものはその理由を示せ.

1) $e^{x^2-y^2} \cos 2xy$

2) $e^x \cos 2y$

問題 3.4 $\log z = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$ が Cauchy-Riemann の偏微分方程式を満たすことを確かめよ. 同じ計算を Mathematica にやらせてみよ.

```
F=Log[Sqrt[x^2+y^2]]+I* ArcTan[y/x]
```

```
G=D[F,x]+I*D[F,y]
```

```
Simplify[G]
```

Mathematica は 5 階の演習室では, kterm のウィンドウから math という指令で起動するので, その後で上を (改行もそのままに) 打ち込んでみよ. 1 行毎に何かレスポンスがあるはずである. ちなみに Mathematica の終了指令は Exit である.

【Green の定理】 D を閉曲線 C で囲まれた領域とするとき

$$\oint_C F dx + G dy = \iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy$$

外微分 (公式記憶法として) $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$, $d(F dx) = dF \wedge dx$, $d(F dx + G dy) = dF \wedge dx + dG \wedge dy$, $dF \wedge dx = -dx \wedge dF$. よって,

$$d(F dx + G dy) = \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

参考: Stokes の定理 d と ∂ は互いの双対作用素である:

$$\langle \omega, \partial D \rangle = \langle d\omega, D \rangle \quad \text{i.e.} \quad \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

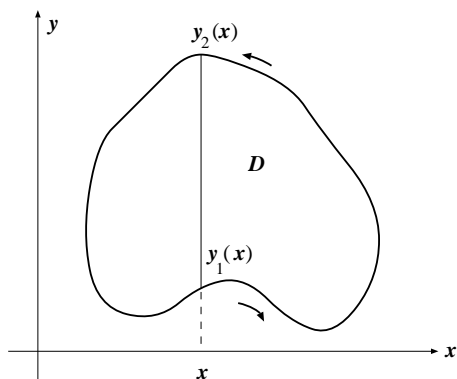


図 2.1

複素表示

$$d(F dz + G d\bar{z}) = \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$$

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$$

$dx \wedge dy$ と $dx dy$ の差は, 向きが伴っているかどうか

Cauchy の積分定理: 正則関数に対しては

$$\oint_C F(z) dz = 0$$

C は F が正則な領域の境界であることが大切.

問題 3.5 D を正方形 $\{(x, y); -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ とし, ∂D をその周に正の向きを与えたものとする. 線積分 $\oint_{\partial D} \bar{z} dz$ を Green の定理を用いて 2 次元定積分に直し, その後で値を計算せよ.

問題 3.6 次の線積分を適当な正則函数の線積分に変形し値を計算せよ. ただし積分路には正の向きが付けられているものとする.

$$1) \oint_{|z|=R} \bar{z}^n dz \quad (n \in \mathbf{Z}) \qquad 2) \oint_{|z|=R} x^n dz \quad (x = \operatorname{Re} z, n \in \mathbf{N})$$

【正則函数の四則演算】 z の 1 変数多項式は正則函数であった.

$f(z), g(z)$ が正則函数なら, それらの C 上の一次結合 $\lambda f(z) + \mu g(z)$ も正則函数. これは, Cauchy-Riemann 方程式が線型だから明らか.

更に, $f(z)g(z)$ も正則. これは, Cauchy-Riemann 方程式が 1 階だから云えること:

$$\bar{\partial}(f(z)g(z)) = (\bar{\partial}f(z))g(z) + f(z)\bar{\partial}g(z) = 0$$

また, $f(z)/g(z)$ は $g(z) \neq 0$ なる限り正則:

$$\bar{\partial} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(\bar{\partial}f(z))g(z) - f(z)\bar{\partial}g(z)}{g(z)^2} = 0$$

よって有理函数は分母の零点を除き正則. 特に $1/(z-a)$ ($a \in \mathbf{C}$ は定数) が重要な例.

【複素微分】 正則函数の特徴付け (その 2): 複素微分商

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{3}$$

が存在. これは, f が全微分可能で,

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + o(h) = f(z) + A\Delta x + B\Delta y + o(h)$$

ここに $h = \Delta x + i\Delta y$ と書いたときの係数 A, B が Cauchy-Riemann の関係式に従うこと: $A + iB = 0$ を意味する. (3) はあらゆる方向からの方向微分係数が一致することを含む. Cauchy-Riemann は二つの座標軸方向からの方向微分が一致することのみを要求:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z + i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

全微分可能の条件の下でこれらは同値 (i がないととても成立しないこと!).

【正則函数の等角性】 正則函数が定める平面の写像は無限小レベルでは平行移動と複素数の積, つまり回転と相似拡大, 従って $f'(z) \neq 0$ なる点では“等角”, i.e. 角度を保つ.

問題 3.7 正則函数を平面 $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ の可微分写像と見て Jacobian を計算してみよ. そのような写像は常に平面の向きを保つのはなぜか?

【Cauchy の積分公式】 $f(z)$ は領域 D の内部及び境界の近傍で正則とする. $C = \partial D$ は連結な一つの閉曲線よりなるものとするとき, $a \in D$ を中心とする半径 ε の円板 $B_\varepsilon(a)$ を D からくり抜いた領域に Cauchy の積分定理を適用して

$$0 = \int_{\partial(D \setminus B_\varepsilon(a))} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz - \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

ここで,

$$\oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz + \oint_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(a)}{z-a} dz$$

において, 第 1 項 $\rightarrow 0$, また第 2 項 $= 2\pi i f(a)$ より

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

a を動かしたいときは

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (4)$$

という記号の使い方をする.

この式により, “正則函数はほとんど有理函数で尽くされる” ことがわかる.

特に, C として 0 を中心とする半径 R の円周をとれば (とれれば)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (5)$$

この公式から函数論の基本的結果の殆どが導かれる. 特に

【正則なら C^∞ 】 正則函数は何回でも微分可能 (Goursat の定理).

高階微分の公式 (5) を積分記号下で微分して $\zeta = 0$ と置くことにより

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad (6)$$

問題 3.8 点 a を中心とする半径 R の円に対して (5), (6) に相当する式を書け.

【Taylor 展開】 $|z| \leq r < R$ として

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1-z/\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \zeta^n \quad ((6) \text{ による}) \end{aligned}$$

正則函数の特徴付け (その 3): Taylor 展開できる. i.e. 多項式で広義一様に近似できる.

Taylor 展開の収束半径は複素平面において特異点までの距離で与えられる.

4 解析接続

【一致の定理】

零点の孤立性: 正則函数の零点は孤立する. i.e. もし $f(a) = 0$ なら, $\exists \varepsilon > 0$ such that $0 < |z-a| < \varepsilon$ で $f(z) \neq 0$.

何なんとなれば者, $z = a$ が重複度 m の零点なら,

$$f(z) = a_m(z-a)^m + a_{m+1}z^{m+1} + \dots = a_m(z-a)^m \left\{ 1 + \frac{a_{m+1}}{a_m}(z-a) + \dots \right\} \quad (7)$$

において, ε が十分小さければ, 右辺の第二因子 $\neq 0$.

対偶を取れば次を得る:

一致の定理: 正則函数が領域内の点に収束するような点列の上で 0 になれば, 領域全体で 0 となる.

また, (定数でない) 正則関数 f は, (7) より開写像である, i.e. $b = f(a)$ の十分近くの点も f の像に含まれる, ことが分かる. 特に,

最大値原理 定数以外の正則函数 f に対しては, $|f(z)|$, $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ などが, 定義域の内点において最大値に到達することは決してない.

【解析接続】 一致の定理により, 正則函数は定義域が増やせるとき, 函数の延長の仕方が一意に定まる. この延長操作を解析接続と呼ぶ.

解析接続の諸方法

1) **冪級数**による方法 (Weierstrass) Taylor 展開が収束するところまでは解析接続できる. 展開の中心を収束円の境界付近に取り直すことにより少しずつ延ばしてゆく.

2) **函数等式**による方法 例: **ガンマ函数**

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

は $\operatorname{Re} s > 0$ で広義一様に絶対収束し, 正則函数を定める. 函数等式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

が成り立つことが部分積分で容易に確かめられる. よって

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

により $\operatorname{Re} s > -1$, $s \neq 0$ まで定義が拡張できる. これを繰り返すと $s = 0, -1, -2, \dots$ を除き全複素平面に解析接続される.

問題 4.1 $\frac{1}{\Gamma(s)}$ は $s = 0, -1, -2, \dots$ も込めて全複素平面で正則となり, $s = 0, -1, -2, \dots$ は一位の零点となることを示せ.

3) **Cousin 積分**による方法 $f(z)$ が実軸上の線分 $[a, b]$ の近傍で正則函数なら, 積分

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-z} dt$$

で定義された函数は, Cauchy の積分定理による積分路変形で, $]a, b[$ を越えて解析接続される. どこまで解析接続できるかは $f(z)$ が正則な範囲に依存する.

【特異点】 正則函数がどうしても解析接続されない点を特異点と呼ぶ.

孤立特異点 一点の周りでは一価正則で, その点には解析接続されないとき, この点を孤立特異点と呼ぶ. 以下この点を原点とする.

極 $\exists n \in \mathbf{N}$ such that $g(z) = z^n f(z)$ は原点まで解析接続できるとき, $g(0) \neq 0$ なら原点は $f(z)$ の n 位の極と呼ばれる. つまり, $f(z)$ の値は $z \rightarrow 0$ のとき $O(z^{-n})$ 程度で無限大に発散すること.

真性特異点 極でないもの. このとき高々一つの除外値 α が存在して, $f(z)$ は $\forall \varepsilon > 0$ に対して $0 < |z| < \varepsilon$ で α を除くすべての値を必ず (従って無限回) 取る (Picard の定理; α を Picard の除外値という).

これ以外の場合には有り得ない. すなわち次が成り立つ:

Riemann の除去可能特異点定理 $f(z)$ が原点の近傍において原点を除き正則で, かつ原点において値が有界なら, $f(z)$ は実は原点でも正則となる.

実際, $g(z) = z^2 f(z)$ は原点も込めて C^1 級の 2 変数関数となるから, Cauchy-Riemann 作用素が意味をもち, 作用の結果は原点以外で 0 の連続関数となり, 従って原点でも 0 となる. $f(z) = g(z)/z^2$ は仮定により原点で値が有界だから, $g(z)$ の Taylor 展開は 2 次の項から始まる.

【多価性】 単連結でない領域では, 解析接続は一般に多価となる. 孤立点の周りで多価正則のとき, この点は分岐点と呼ばれる. 分岐点の周りを有限回まわると元の値に戻るとき, この分岐点は有限多価と呼ばれ, そうでないとき無限多価あるいは対数分岐と呼ばれる. 元に戻る最少の回数 p を分岐点の分岐次数と呼ぶ. 特に, $\exists n$ such that $z^n f(z)$ の値が p 次の分岐点 $z = 0$ の近傍で有界なとき, $g(z) = f(z^p)$ は原点に高々極を持つ一価関数となる. この場合を代数的特異点と呼ぶ.

例 4.1 \sqrt{z} に対する $z = 0$ (二価, 代数的分岐). $\log z$ に対する $z = 0$ (無限多価).
 z の多項式を係数とする代数方程式

$$w^n + a_1(z)w^{n-1} + a_2(z)w^{n-2} + \cdots + a_n(z) = 0$$

は多価関数を定める. これを代数関数と呼ぶ. これは判別式の零点で代数的分岐する.

例 4.2 z の陰関数 w :

$$w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$$

は右辺の 3 次式の零点 α, β, γ で分岐する.

【Laurent 展開】 $f(z)$ が円環 $r < |z| < R$ で一価正則なら, $f(z)$ はここで正冪と負冪を持つ z の級数, いわゆる Laurent 級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

に展開される. 特に $r = 0$, すなわち, 円板から一点だけを抜いた領域のとき, $f(z)$ が原点で高々極を持つための必要十分条件は, Laurent 展開の負冪の部分が有限項で切れること.

有理関数の不定積分への応用: 分子の次数が分母の次数よりも小さいような有理関数の部分分数分解は分母が 0 となる点での Laurent 展開の負冪の部分を集めたもの.

例 4.3 $\frac{1}{z^2(z^2+1)^2}$ の分母の零点は $z = 0, \pm i$, これらの点での Laurent 展開は漸近解析で

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z^2+1)^2} &= \frac{1}{z^2} \{1 - z^2 + \cdots\} = \frac{1}{z^2} + \cdots, \\ \frac{1}{z^2(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{z^2} \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(z-i+i)^2} \frac{1}{(z-i+2i)^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{\{1+i(z-i)\}^2} \frac{1}{\{1+i(z-i)/2\}^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-i)^2} \{1 \pm 2i(z-i) + \cdots\} \{1 \pm i(z-i) + \cdots\} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-i)^2} \{1 \pm 3i(z-i) + \cdots\} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-i)^2} \pm \frac{3}{4} \frac{i}{z-i} + \cdots \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z^2+1)^2} &= \frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{4} \frac{1}{(z-i)^2} + \frac{3}{4} \frac{i}{z-i} \right) + \left(\frac{1}{4} \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{3}{4} \frac{i}{z+i} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{z^2+1} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z^2+1)^2} - \frac{1}{z^2+1} \end{aligned}$$

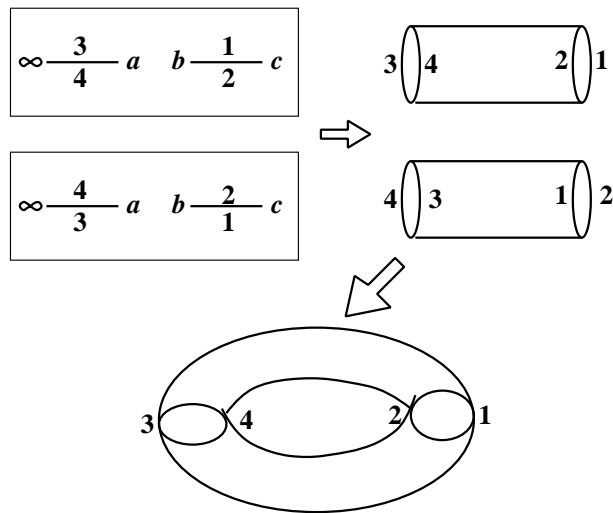


図 4.1 楕円曲線の作り方

5 留数の計算

$f(z)$ が $z = a$ に孤立特異点を持つとき, f の $z = a$ における Laurent 展開 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の $1/z$ の係数 c_{-1} を f の点 a における留数 (residue) という.

【留数定理】 $f(z)$ は閉曲線 C の内部にただ一つの特異点を持ち, そこでの留数が γ であるとすれば

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \gamma$$

一般化 $f(z)$ が閉曲線 C の内部に持つ特異点を $a_j, j = 1, \dots, n$ とし, そこでの留数を $\text{Res}_{a_j} f$ で表すとき

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{a_j} f$$

$f(z)$ の特異点 a が一位の極であるとき, 留数は

$$\text{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$$

で計算できる.

【留数計算の方法】 次の3種は絶対記憶せよ.

1) 留数定理の直接適用 積分路は閉曲線のままでよい場合である. ただし, 実の定積分の計算に応用するときは, 公式の形に持ち込むために変形が必要な場合が多い.

例 5.1 実の定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b \cos \theta} d\theta \quad (a > b > 0) \quad (8)$$

を留数で計算してみる. これを単位円周に関する複素線積分に変形するには, $|z| = 1$ 上

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta = \frac{1}{z}$$

従って

$$\cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin \theta = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

また,

$$dz = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta \quad \text{すなわち} \quad d\theta = \frac{1}{iz} dz$$

であるから (8) は

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{a - b\frac{z^2+1}{2z}} \frac{1}{iz} dz = 2i \int_{|z|=1} \frac{1}{bz^2 - 2az + b} dz$$

分母の零点は $bz^2 - 2az + b = 0$ の根で, これは a, b に対する仮定により二根とも実で, 一つは単位円内に, もう一つは単位円外にある. 単位円内にある方を α とすれば, 被積分函数のそこでの留数は

$$\text{Res}_{z=\alpha} \frac{1}{bz^2 - 2az + b} = \text{Res}_{z=\alpha} \frac{1}{b(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{b(\alpha-\beta)}$$

実は

$$\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad \beta = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad \therefore \alpha - \beta = -\frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

である. よって積分値は

$$2i \times 2\pi i \text{Res}_{z=\alpha} \frac{1}{bz^2 - 2az + b} = -\frac{4\pi}{b(\alpha-\beta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

問題 5.1 $\int_0^\pi \frac{1}{a - b \cos \theta} d\theta \quad \left[= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - b \cos \theta} d\theta \right]$

⊗ $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a - b \cos \theta} d\theta$ はこの方法ではできない.

2) 積分路を無限遠に遠ざけた極限を見る方法

例 5.2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

普通に漸化式を用いてやるのは面倒だが, 積分路を上の方にずらしてゆくと, $z = i$ を通過するときに留数が残り, その後の積分は 0 に収束する:

$$= \oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz + \int_{-\infty+Ri}^{\infty+Ri} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz \quad (R \gg 1)$$

第一の積分を留数定理で計算するため $z = i$ における Laurent 展開を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} &= \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \left(\frac{1}{2i + (z-i)} \right)^2 = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(2i)^2} \left(1 - \frac{z-i}{2i} + \dots \right)^2 \\ &= \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(2i)^2} \left(1 - 2\frac{z-i}{2i} + \dots \right) = -\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)} + \dots \end{aligned}$$

よって

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz = 2\pi i \times \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

この方法は図 5.1 の線分 $C_{\pm M}$ 上の積分が $M \rightarrow \infty$ のとき 0 に近付けば Cauchy の積分定理により正当化される.

上の例では下にずらしても計算できるが, 次の例では上にずらすのが必須:

例 5.3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

$\cos x = \text{Re } e^{ix}$ に注意すると,

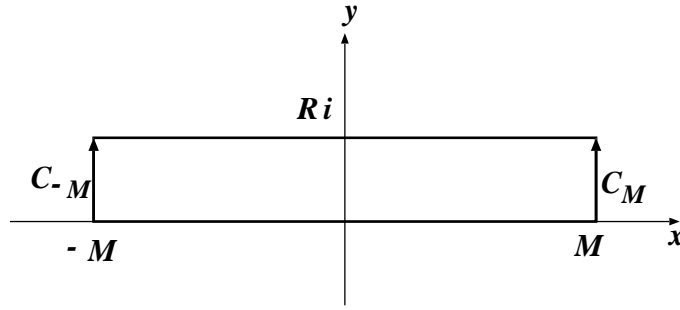


図 5.1

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix-R}}{(x+iR)^2 + 1} dx \right\} \\
 &\rightarrow \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} \right\} = \frac{\pi}{e}
 \end{aligned}$$

問題 5.2 $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$ $\left[= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx \right]$

ℚ 次の積分は同じように見えて値は初等的でない:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx$$

問題 5.3 有理関数 $f(z) := \frac{1}{z^3(z-1)(z^2+1)}$ の直線 $L := \{z = x + i/2; -\infty < x < \infty\}$ に沿う線積分の値を求めよ.

3) 多価性を利用して積分路変形後の値との差をとるもの

例 5.4

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx$$

積分路の半直線を原点の周りに一周させてみると, \log の多価性により

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{x^2 + 1} dx = I + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

に戻るが, その間に $z = \pm i$ で特異点に引っかかって留数を残すので

$$I = I + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{\log z}{z^2 + 1} + 2\pi i \operatorname{Res}_{-i} \frac{\log z}{z^2 + 1}$$

これから

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = -\operatorname{Res}_i \frac{\log z}{z^2 + 1} - \operatorname{Res}_{-i} \frac{\log z}{z^2 + 1} = -\frac{\log i}{2i} - \frac{\log(-i)}{-2i} = -\frac{\pi i}{2} \frac{1}{2i} - \frac{3\pi i}{2} \frac{1}{-2i} = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

この方法は積分路回転の各段階で図 5.2 の円弧 C_M 上の積分が $M \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づけば Cauchy の積分定理により正当化される.

同じ議論で

$$J = \int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2 + 1} dx$$

を変形すると

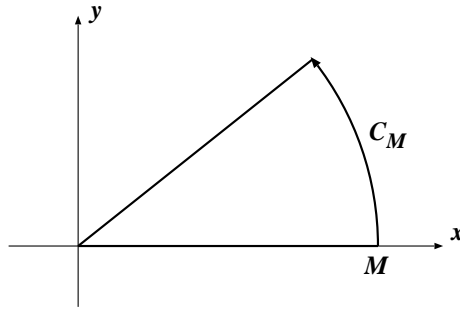


図 5.2

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{x^2 + 1} dx = J + 4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx - 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

に戻るので、留数計算で I の値が

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx &= \frac{4\pi^2}{4\pi i} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx - \frac{2\pi i}{4\pi i} \left\{ \operatorname{Res}_i \frac{(\log x)^2}{x^2 + 1} + \operatorname{Res}_{-i} \frac{(\log x)^2}{x^2 + 1} \right\} \\ &= -\frac{\pi^2 i}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\pi i/2)^2}{2i} + \frac{(3\pi i/2)^2}{-2i} \right\} \\ &= -\frac{\pi^2 i}{2} + \frac{\pi^2 i}{2} = 0 \end{aligned}$$

と求まる。

この例では $1/x = t$ なる変換で

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} dx = \int_{\infty}^0 \frac{\log(1/t)}{1/t^2 + 1} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_0^{\infty} \frac{\log t}{t^2 + 1} dt = -I$$

から $I = 0$ がわかる。しかしこれは偶然うまくいっただけである。

問題 5.4 次の定積分を計算せよ。

1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$ [$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^3 + 1} dx$ を原点の周りに一回廻せ]

2) $\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2 + 1} dx$ [$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^3}{x^2 + 1} dx$ を原点の周りに一回廻せ]

問題 5.5 定積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2 + x + 1} dx$ の値を留数を用いて計算せよ。[ヒント: $\sqrt[4]{x}$ を原点の周りに一周させると、正の実軸に戻ったときどうなるか調べよ。]

問題 5.6 次の実 1 次元定積分を留数を用いて計算せよ。

1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ 2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$ 3) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^3 + 1} dx$ 4) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^4 + 1} dx$

5) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + x^2 + 1} dx$ 6) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx$ 7) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta$

6 補遺

【一次変換】 $w = \frac{az + b}{cz + d}$ の形の写像。分母が 0 のときは無限遠点に写ると考えると、Riemann 球面の双正則写像と同値。

円円対応：円は円に写る (直線も円と考える). 勝手な二つの円を対応させられる.

単位円の内部 $|z| < 1$ を上半平面 $\text{Im } w > 0$ に写す一次変換は $w = i \frac{1+z}{1-z}$, その逆は $z = \frac{w-i}{w+i}$.

複比の保存： z_1, z_2, z_3, z_4 の像を w_1, w_2, w_3, w_4 とすれば, $\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_4} : \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_4} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$.
この公式を用いて, Riemann 球面の勝手な 3 点を勝手な 3 点に写す一次変換がただ一つ得られる.

問題 6.1 1) 単位円を単位円に写し, 単位円の内部を単位円の内部に写し, かつ点 α を原点に写すような一次変換 $f(z)$ の一般形を書け.

2) 上の $f(z)$ に対して $|f(0) + f'(0)z| \leq 5/4$ が $|z| < 1$ に対して成り立つことを示せ.

3) $f(z)$ が単位円の内部で定義された正則関数で, 単位円の内部を単位円の内部に写し, かつ原点を原点に写すならば, $|f'(0)| \leq 1$ となることを示せ.

4) $f(z)$ が単位円の内部を単位円の内部に写すような一般の正則関数とするとき, 2) と同じ不等式が成立することを示せ. また限界の値 $5/4$ はこれ以上改良できないことを示せ.

【等角写像】 正則関数 f が定める写像は $f'(z) \neq 0$ なる点では等角, 従つてもとの座標の x, y 格子が新しい座標の直交曲線格子に変換される. $f'(z) = 0$ なる点では, 零点の位数に応じた歪曲を受ける.

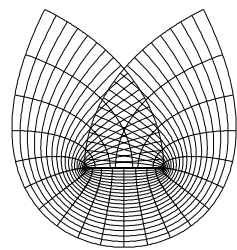
問題 6.2 次の正則関数による, 指定された領域の像を記述せよ. 境界まで込めて等角性が崩れているのはどの点か明らかにせよ.

- 1) $w = (z-1)/(z+1)$ による, 開円板 $|z| < 1$ の像.
- 2) $z^2 - 1$ による, 開円板 $|z-1| < 1$ の像.
- 3) $w = e^z$ による, 閉じた帯 $-\infty \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \pi i$ の像.
- 4) $w = \frac{1}{z}$ による, 開長方形 $-2 < x < 2, 0 < y < 1$ の像.

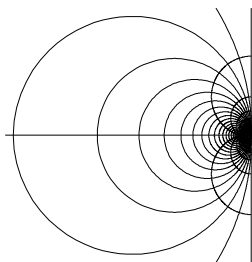
問題 6.3 次の正則関数による指定された領域の像を下の図の中から選び出せ. 判断の理由も簡単に記せ. ただし, 図に示されている曲線族は, 原領域における極座標, あるいは直角座標に関する等間隔格子のそれぞれの写像による像である.

- 1) $w = (z-1)/(z+2)$; 円板 $|z| < 1$ _____
- 2) $w = (z-1)/(z+2)$; 円板 $|z+1| < 1$ _____
- 3) $w = (z-1)/(z+2)$; 円板 $|z+1| < 2$ _____
- 4) $w = z^2$; 長方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ _____
- 5) $w = z^3 - 3z$; 長方形 $|x| \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ _____
- 6) $w = z^3 - 3z$; 長方形 $|x| \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ _____

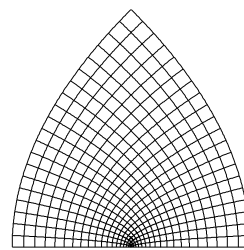
a)



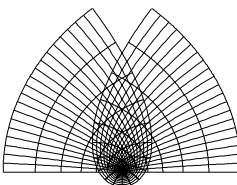
b)



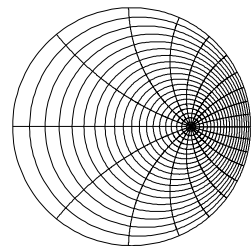
c)



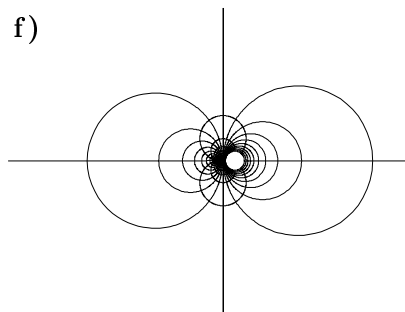
d)



e)



f)



Q Mathematica による倒閣写像の描画例: $w = z^2 - 1$ による正方形 $\max\{|x|, |y|\} < 1$ の像

`z=x+I*y;`

`points=Table[N[z^2-1],{x,-1,1,0.1},{y,-1,1,0.1}];`

`coords=Map[{Re[#],Im[#]}&,points,{2}];`


```
lines=Map[Line,Join[coords,Transpose[coords]]];
Show[Graphics[lines],AspectRatio->Automatic,Axes->Automatic]
```

指令の意味は、順に 0.1 刻みの格子点 (x, y) を実部、虚部とする複素数 $z = x + iy$ の函数 $z^2 - 1$ による像の 2 次元テーブル points を作り、それに函数 Re, Im を適用してテーブルごと平面の点对の 2 次元テーブル coords に変換し、それとその行と列を入れ換えたものを Join という函数で一つの表に結合して、最後にその表の各行毎に点と点を結ぶ函数 Line を適用して線分のテーブル lines を作ってそれを描画する。

等角なところでは、格子は直交していなければならない。AspectRatio->Automatic の指定を忘れると、縦横比がデフォルトの黄金比になってしまい、直交しなくなる。等角性がくずれるところ、一対一でなく像が重なってしまうところは、自分の頭を働かせて、事態を把握できるようにすること。

【偏角の原理と代数方程式の根の計算】 偏角原理： $f(z)$ が領域 D の内部およびその境界 $C = \partial D$ の近傍で正則で、 C 上では 0 にならないとき、

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i N, \quad \text{ここに } N = \#\{z \in D; f(z) = 0\}$$

ただし零点の個数 N は重複度も込めて数えるものとする。

何者、 $f(z) = \prod_{j=1}^N (z - a_j)g(z)$, $g(z)$ は D で 0 にならない、と零点を括り出しておけば (a_j の中に等しいものがいくつ有ってもよい),

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_C (\log f(z))' dz = \sum_{j=1}^N \oint_C \frac{1}{z - a_j} dz + \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 2\pi i N$$

従って

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (9)$$

名前の由来は $\log f(z) = i \arg f(z)$ より、“領域の周に沿っての偏角の増加量 $/2\pi$ が領域内部の零点の個数となる” から。

結果が整数になることがわかっているのだから、かなり荒い線積分の近似計算でも零点の個数が正確にわかる。

系 代数学の基本定理の証明. $f(z)$ を n 次の多項式とするとき、 R が十分大きければ $|z| = R$ 上

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{na_0 z^{n-1} + \dots + a_1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{n}{z} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\}$$

より

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{n}{z} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \therefore \oint_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \oint_{|z|=R} \frac{n}{z} dz \rightarrow 0$$

$f(z)$ の零点は高々有限個だから、 R が大きければ積分値は一定で

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n$$

を得る。すなわち $f(z)$ は重複度も込めて n 個の零点をもつ。

問題 6.4 次の多項式は各象限内にそれぞれ何個の複素根を持つか？線積分 (9) 式を適当な閉曲線 C に対して数値計算することにより明らかにせよ。(数値計算は C または pascal または Fortran または Mathematica いずれにても可。答は整数となることが分かっているのだから、誤差 < 0.5 であれば OK.)

- 1) $z^3 - z + 5$ 2) $z^4 + 2z^2 + 1$ 3) $z^5 - z + 2$ 4) $z^6 + z^5 - 1$

Newton 法：初期値 $z = z_1$ を $f(z)$ の零点 a に十分近くとって

$$z_n \mapsto z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

という変換を反復させると, $z_n \rightarrow a$. 実際,

$$\begin{aligned} z_{n+1} - a &= z_n - a - \frac{f(z_n) - f(a)}{f'(z_n)} = z_n - a - \frac{f'(a)(z_n - a) + O((z_n - a)^2)}{f'(z_n)} \\ &= \frac{z_n - a}{f'(z_n)} \{f'(z_n) - f'(a) + O(z_n - a)\} = O((z_n - a)^2) \end{aligned}$$

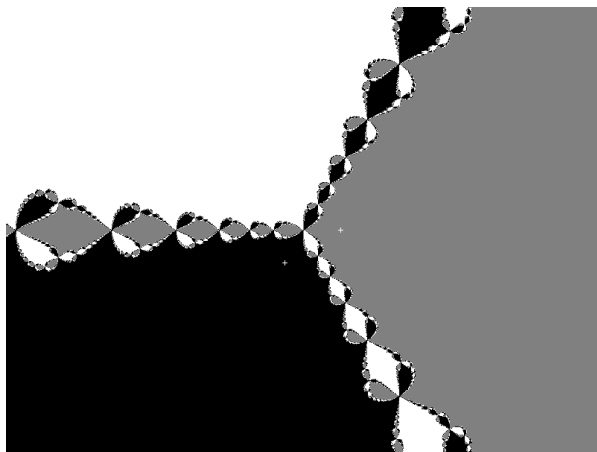
普通の反復法は $|z_{n+1} - a| \leq \lambda |z_n - a|$, $\lambda < 1$ の形の収束の速さ (1 次の収束) で, Newton 法はそれより定性的に速い (2 次の収束).

$f(z)$ が m 次多項式のときは, $f'(z)$ の零点に出くわすという例外的な初期値を除き必ず $f(z)$ の根のどれかに収束する: 何者, z_n が十分大きいとき

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \doteq z_n - \frac{z_n}{m} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)z_n$$

で原点方向に引き寄せられる.

どの根に収束するかで初期値を色分けすると, Julia 集合の一種であるフラクタル図形ができあがる.



$z^3 - 1$ の根を求める Newton 法の反復図

問題 6.5 5 次方程式 $f(z) = z^5 - z + 2 = 0$ の複素根について, 次の各問に答えよ.

- 1) $|z| \geq 2$ には根が存在しないことを示せ.
- 2) 実根はいくつあるか追跡し, それらを整数で挟め (i.e. 半开区間 $[m, m + 1)$ が根を含むような整数 m をすべて挙げよ.
- 3) 虚軸上には根が無いことを示せ?
- 4) C を半円 $\{z \in \mathbf{C}; |z| \leq 2, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ の周とすると, $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ の数値積分を近似計算せよ. この結果に偏角の原理を適用して, 与えられた方程式の虚根が第一象限にいくつあるか確定せよ.
- 5) Newton 法ですべての根の近似値を十進法で小数点以下 10 桁まで正しく求めよ.
- 6) $|\operatorname{Re} z| \leq 2, |\operatorname{Im} z| \leq 2$ の範囲の複素数を初期値とした Newton 法がどの根に収束するかを色分けした図を作れ.

問題 6.6 $\sin z$ の Taylor 展開の部分和として得られる多項式

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

の根は始めの $1/3$ 個くらいは $0, \pi, 2\pi, \dots$ に近い実根となる. では残りの根はどこにあるか?