函数論講義メモ No.1

金子　晃

【複素数と函数論の歴史】

... 代数計算で平方根の内部に負の数が現れうることは東西の文明で認識, しかし “虚題” として捨てられた.

...Cardano G.: 3 次方程式の根の公式で虚数を使用. しかしその有用性に気づいていない

...Bombelli R.: Cardano の公式で虚数の計算をうまくやると 3 実根がすべて求まることを指摘. $2i\times i=-2$ 式の計算をしていた.

...Euler L.: 虚数を用いて膨大な計算を残した. 記号 i も導入. しかし著作物の中には $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ などとも書かれている. (彼は多価函数を知っていたのでその意味で書いているかもしれない.)

...Argand R.: 複素数を平面の点に対応させた最初の人 (1806). しかしそれだけ.

...Gauss C.F.: 代数方程式が複素数の範囲で次数だけの根を持つことを証明. 複素数を変数とする函数の理論を持っていた. 複素積分が平面の線積分であることも認識. Cauchy の積分定理を知っていた. (しかし非難を恐れて公表論文では複素数を使わず. そのため函数論の創始者の中に入らず.)

...Abel N. H.: 楕円函数, 及びそれを一般化した Abel 函数の理論を複素変数の函数の理論として与えた.

...Cauchy A.: 正則関数の定義は与えずに函数論をどんどん展開.

...Riemann. B., Weierstrass K.: それぞれ幾何学的, 及び解析学的立場から一般の複素函数の理論的基礎を築いた.

【Cardano の公式】3 次方程式は組立除法を用いた根の平行移動演算で $x^3+qx+r=0$ に帰着される.

因数分解の公式: $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ として

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

判別式: $R=\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$

すると, $y=\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{R}}$, $z=\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{R}}$ と置いたとき, $q=3yz$, $r=-y^3-z^3$. 従って

$$0=x^3+qx+r=x^3-y^3-z^3-3xyz=(x-y-z)(x-\omega y-\omega^2 z)(x-\omega^2 y-\omega z)$$

これから 3 根

$$x=\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{R}},\omega\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{R}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{R}},\omega^2\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{R}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{R}}$$

問題 3 次方程式 $x^3-15x-4=0$ を 1) 高校生式のやり方で, 2) Cardano の公式を用いて, 解け. (3 根とも実のときに計算の途中で必ず虚数が必要となることは Galois 理論を用いて後に示された.)

【複素数の演算と複素平面】　$x+iy\leftrightarrow(x,y)$ と見なすと, 加減算と実数倍はベクトル演算に他ならない.

複素数同士の乗除算が新しい.

実はベクトルの方が概念としては新しい. R^n の点に四則演算が入るのは $n=2,4$ だけだが, ベクトル空間は n が何でも可. それが分かるまでは, $n=4$ の場合 Hamilton の四元数 (quoternion) はとても貴重だった: $x=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, $a_0,a_1,a_2,a_3\in R$, $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$. 非可換体となる.

i による乗法は 90 度の回転と解釈される. よって i^2 は 180 度の回転, すなわち -1 倍. (2 次の正方行列による表現も可能. しかしずっと後の話.)

極表示 $z = x + iy = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$(絶対値), $\theta = \mathrm{Arctan}\, y/x$(偏角). ここに $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の略. de Moivre の法則:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

これは指数法則 $(e^i\theta)^n = e^{ni\theta}$ に他ならない.

極表示を用いると, 冪乗根は偏角の等分に帰着される.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

特に, 1 の n 乗根は $e^{2\pi ki/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

$\sqrt{z}$ は多価函数である. $\sqrt{1} = 1 \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{1\pm i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{-1} = i \Rightarrow \sqrt{-i} = \frac{-1\pm i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{1} = -1$. (折り紙の帆かけ舟.)

【初等函数の複素化】　多項式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

は, 変数が複素数 $z = x + iy$ になってもそのまま意味を持つ.

冪級数

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

はすべて収束円内の複素数 z に対して意味が付く.

複素数の列が収束 $\Leftrightarrow$ 平面の点列として収束 $\Leftrightarrow$ 実部, 虚部それぞれの数列が収束.

平面の距離は複素数の絶対値 $\mathrm{dis}\,(x+iy, 0) = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

冪級数を用いて複素化する例:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

指数法則が成立するので, $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, また

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \cdots\right) = \cos y + i\sin y$$

三角函数は指数函数に帰着:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

問題 双曲線函数 $\sinh x$, $\cosh x$ の定義と, それらが満たす諸公式を挙げ, それらの関係式が何故 $\sin x$, $\cos x$ のそれに似ているかを説明せよ.

$w = e^z$ の絶対値は e^x, 偏角は y. 従って逆函数をとると

$$\log w = \log|w| + i\arg w$$

問題 対数函数の Taylor 展開を用いて $\log(1+z) = \log\sqrt{(1+x)^2+y^2} + i\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{1+x}$ を直接示せるか？

log は無限多価. 例: $\log(-1) = \pi i + 2n\pi i$ $(n \in Z)$. 逆三角函数も対数函数で書ける: 図より $x = \sin\theta$ とすると$\theta = \mathrm{Arcsin}\, x = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1-x^2} + ix)$

例題: 1) 高校では $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$ と絶対値を付けたのに大学の先生が付けないのは何故か ？

2) $\int \frac{1}{x^2+a}dx$ は a の正負で形がひどく違うが, 本当に別の函数になってしまうのか ？

解答　1) $x < 0$ のとき $\log|x| = \log(-x) = \log x + \log(-1)$ だから, 積分定数の違いに吸収される.

2) $a<0$ のとき

$$\int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{2\sqrt{-a}}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{-a}}-\frac{1}{x+\sqrt{-a}}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{-a}}\left(\log(x-\sqrt{-a})-\log(x+\sqrt{-a})\right)$$

だが, ここで $a>0$ とすれば

$$\log(x\pm\sqrt{-a}) = \log(x\pm\sqrt{a}i) = \log\sqrt{x^2+a^2}\pm i\mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt{a}}{x} = \log\sqrt{x^2+a^2}\pm i\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

だから

$$\int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{2i\sqrt{a}}\times(-i)\left(\pi-2\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{\sqrt{a}}-\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$$

第 2 項は積分定数に繰り込める.

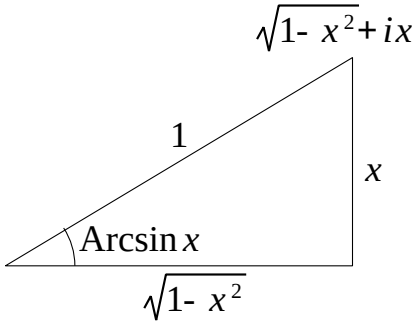

図 1. $\mathrm{Arcsin}\,x$ の log による表現

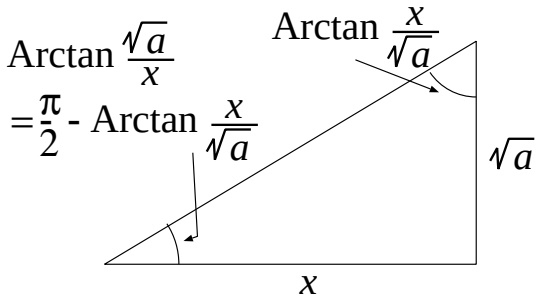

図 2. $\mathrm{Arctan}\,x/\sqrt{a}$ への書き直し

問題 $\mathrm{Arctan}\,x$ を log で表せ.

問題 $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+1}}dx$ の表現が $a=1$ から $a=-1$ まで変わる様を上にならって解説せよ.