函数論講義メモ No.10

金子　晃

【留数計算】　$f(z)$ が $z=a$ に孤立特異点を持つとき, f の $z=a$ における Laurent 展開 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の $1/z$ の係数 c_{-1} を f の点 a における留数 (residue) という.

留数定理　$f(z)$ は閉曲線 C の内部にただ一つの特異点を持ち，そこでの留数が γ であるとすれば

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\gamma$$

系　$f(z)$ が閉曲線 C の内部に持つ特異点を $a_j, j=1,\ldots,n$ とし, そこでの留数を $\mathrm{Res}_{a_j} f$ で表すとき

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_j} f$$

$f(z)$ の特異点 a が一位の極であるとき，留数は

$$\mathrm{Res}_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

で計算できる．

留数計算の方法

1) 直接適用　積分路は閉曲線のままでよい場合である．ただし，実の定積分の計算に応用するときは，公式の形に持ち込むために変形が必要な場合が多い．

例　実の定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a-b\cos\theta}d\theta \quad (a>b>0) \tag{1}$$

を留数で計算してみる. これを単位円周に関する複素線積分に変形するには, $|z|=1$ 上

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{z}$$

従って

$$\cos\theta = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin\theta = \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$$

また,

$$dz = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \qquad \text{すなわち} \qquad d\theta = \frac{1}{iz}dz$$

であるから (1) は

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{a-b\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{iz}dz = 2i\int_{|z|=1}\frac{1}{bz^2-2az+b}dz$$

分母の零点は $bz^2-2az+b=0$ の根で, これは a,b に対する仮定により二根とも実で, 一つは単位円内に, もう一つは単位円外にある. 単位円内にある方を α とすれば, 被積分函数のそこでの留数は

$$\mathrm{Res}_{z=\alpha}\frac{1}{bz^2-2az+b} = \mathrm{Res}_{z=\alpha}\frac{1}{b(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{b(\alpha-\beta)}$$

実は

$$\alpha = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad \beta = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad \therefore\ \alpha-\beta = -\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

である. よって積分値は

$$2i \times 2\pi i \mathrm{Res}_{\,z=\alpha} \frac{1}{bz^2+2az+b} = -\frac{4\pi}{b(\alpha-\beta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

演習 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{a-b\cos\theta}d\theta$ $\qquad$ [$\displaystyle= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a-b\cos\theta}d\theta$]

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a-b\cos\theta}d\theta$ はこの方法ではできない.

2) 積分路を無限遠に遠ざけた極限を見る方法

例 **1** ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

普通に漸化式を用いてやるのは面倒だが, 積分路を上の方にずらしてゆくと, $z=i$ を通過するときに留数が残り, その後の積分は 0 に収束する ：

$$= \oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2}dz + \int_{-\infty+Ri}^{\infty+Ri} \frac{1}{(z^2+1)^2}dz \quad (R >> 1)$$

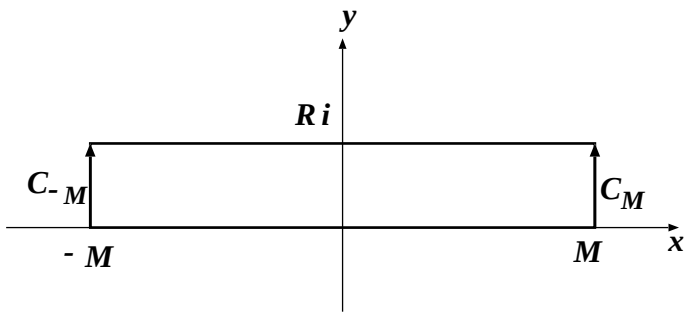
第一の積分を留数定理で計算するため $z=i$ における Laurent 展開を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2}\left(\frac{1}{2i+(z-i)}\right)^2 = \frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{(2i)^2}\left(1-\frac{z-i}{2i}+\cdots\right)^2 \\ &= \frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{(2i)^2}\left(1-2\frac{z-i}{2i}+\cdots\right) = -\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)} + \cdots\end{aligned}$$

よって

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i \times \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

この方法は図の線分 $C_{\pm M}$ 上の積分が $M \to \infty$ のとき 0 に近付けば Cauchy の積分定理により正当化される.



上の例では下にずらしても計算できるが, 次の例では上にずらすのが必須 ：

例 **2**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$$

$\cos x = \mathrm{Re}\, e^{ix}$ に注意すると,

$$\begin{aligned}&= \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i \mathrm{Res}_{\,i}\frac{e^{iz}}{z^2+1} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix-R}}{(x+iR)^2+1}dx\right\} \\ &\to \mathrm{Re}\left\{2\pi i \mathrm{Res}_{\,i}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right\} = \mathrm{Re}\left\{2\pi i \frac{e^{-1}}{2i}\right\} = \frac{\pi}{e}\end{aligned}$$

演習 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ $\quad$ [$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$]

Q 次の積分は同じように見えて値は初等的でない：

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2+1}dx$$

3) 多価性を利用して積分路変形後の値との差をとるもの

例：

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}dx$$

積分路の半直線を原点の周りに一周させてみると, $\log$ の多価性により

$$\int_0^\infty \frac{\log x + 2\pi i}{x^2+1}dx = I + 2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$$

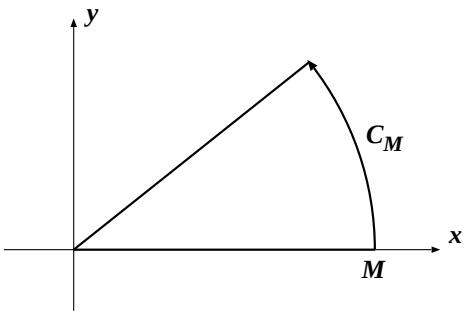
に戻るが, その間に $z = \pm i$ で特異点に引っかかって留数を残すので

$$I = I + 2\pi i \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx + 2\pi i \mathrm{Res}_{\,i} \frac{\log z}{z^2+1} + 2\pi i \mathrm{Res}_{\,-i} \frac{\log z}{z^2+1}$$

これから

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = -\mathrm{Res}_{\,i} \frac{\log z}{z^2+1} - \mathrm{Res}_{\,-i} \frac{\log z}{z^2+1} = -\frac{\log i}{2i} - \frac{\log(-i)}{-2i} = -\frac{\pi i}{2}\frac{1}{2i} - \frac{3\pi i}{2}\frac{1}{-2i} = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

この方法は積分路回転の各段階で図の円弧 C_M 上の積分が $M \to \infty$ のとき 0 に近付けば Cauchy の積分定理により正当化される.



同じ議論で

$$J = \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}dx$$

を変形すると

$$\int_0^\infty \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{x^2+1}dx = J + 4\pi i \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}dx - 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$$

に戻るので, 留数計算で I の値が

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}dx &= \frac{4\pi^2}{4\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{2\pi i}{4\pi i}\Big\{\mathrm{Res}_{\,i}\frac{(\log x)^2}{x^2+1} + \mathrm{Res}_{\,-i}\frac{(\log x)^2}{x^2+1}\Big\} \\ &= -\frac{\pi^2 i}{2} - \frac{1}{2}\Big\{\frac{(\pi i/2)^2}{2i} + \frac{(3\pi i/2)^2}{-2i}\Big\} \\ &= -\frac{\pi^2 i}{2} + \frac{\pi^2 i}{2} = 0\end{aligned}$$

と求まる.

∞ この例では $1/x = t$ なる変換で

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}dx = \int_\infty^0 \frac{\log(1/t)}{1/t^2+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+1}dt = -I$$

から $I = 0$ がわかる. しかしこれは偶然うまくいっただけである.

演習 1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$ [$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^3+1}dx$ を原点の周りに一回廻せ]

2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}dx$ [$\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^3}{x^2+1}dx$ を原点の周りに一回廻せ]