函数論講義メモ No.4

金子　晃

【正則函数の例 1】　z の 1 変数多項式は正則函数であった.

$f(z)$, $g(z)$ が正則函数なら, それらの $\boldsymbol{C}$ 上の一次結合$\lambda f(z)+\mu g(z)$ も正則函数. これは, Cauchy-Riemann 方程式が線型だから.

更に, $f(z)g(z)$ も正則. これは, Cauchy-Riemann 方程式が 1 階だから云える :

$$\overline{\partial}(f(z)g(z))=(\overline{\partial}f(z))g(z)+f(z)\overline{\partial}g(z)=0$$

また, $f(z)/g(z)$ は $g(z)\neq 0$ なる限り正則 :

$$\overline{\partial}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(\overline{\partial}f(z))g(z)-f(z)\overline{\partial}g(z)}{g(z)^2}=0$$

よって有理函数は正則. 特に $1/(z-a)$ $(a\in\boldsymbol{C}$ は定数$)$ が重要な例.

【複素微分】　正則函数の特徴付け (その 2) :複素微分商

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \tag{1}$$

が存在. $\Leftrightarrow$ 全微分可能で,

$$f(z+h)=f(z)+A\Delta x+B\Delta y+o(h)\qquad h=\Delta x+i\Delta y$$

の係数 A,B が Cauchy-Riemann の関係式に従う: $A+iB=0$ とすれば

$$f(z+h)=f(z)+Ah+o(h)=f(z)-iBh+o(h)$$

(1) はあらゆる方向からの方向微分係数が一致することを含む . Cauchy-Riemann は二つの座標軸方向からの方向微分が一致することのみを要求 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z+\Delta x)-f(z)}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z+i\Delta y)-f(z)}{i\Delta y}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

全微分可能の条件の下でこれらは同値 (i がないととても成立しない) .

系　正則函数が定める平面の写像は無限小レベルでは並行移動と複素数の積, つまり回転と相似拡大, 従って $f'(z)\neq 0$ なる点では “等角” .

【Cauchy の積分公式】　$f(z)$ は領域 D の内部及び境界の近傍で正則とする. $C=\partial D$ は連結な一つの閉曲線よりなるものとするとき, $a\in D$ を中心とする半径 ε の円板 $B_\varepsilon(a)$ を D からくり抜いた領域に Cauchy の積分定理を適用して

$$0=\int_{\partial(D\setminus B_\varepsilon(a))}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz-\oint_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

ここで,

$$\oint_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz+\oint_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(a)}{z-a}dz$$

において, 第 1 項 $\to 0$, また第 2 項 $=2\pi i f(a)$ より

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz$$

a を動かしたいときは

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{2}$$

という記号の使い方をする．

この式により, “正則函数はほとんど有理函数で尽くされる” ことがわかる.

特に, C として 0 を中心とする半径 R の円周をとれば (とれれば)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{3}$$

この公式から函数論の基本的結果の殆どが導かれる．

系　正則函数は何回でも微分可能．

問題　点 a を中心とする半径 R の円に対して (3) に相当する式を書け．

(3) を積分記号下で微分して $\zeta = 0$ と置くことにより

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \tag{4}$$

【Taylor 展開】　$|z| \leq r < R$ として

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1 - z/\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \oint_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \zeta^n \qquad ((4) \text{ による}) \end{aligned}$$

正則函数の特徴付け (その 3) :Taylor 展開できる. 多項式で広義一様に近似できる.

系　Taylor 展開の収束半径は複素平面において特異点までの距離で与えられる．