函数論講義メモ No.5

金子　晃

Taylor 展開の系 正則函数の零点は孤立する. i.e. もし $f(a)=0$ なら, $\exists\varepsilon>0$ such that $0<|z-a|<\epsilon$ で $f(z)\neq 0$.

何者, $z=a$ が重複度 m の零点なら,

$$f(z)=a_m(z-a)^m+a_{m+1}z^{m+1}+\cdots=a_m(z-a)^m\Big\{1+\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-a)+\cdots\Big\}$$

において, ε が十分小さければ, 右辺の第二因子 $\neq 0$.

【代数方程式の根の計算】　偏角原理 :$f(z)$ が領域 D の内部およびその境界 $C=\partial D$ の近傍で正則で, C 上では 0 にならないとき,

$$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi iN,\qquad \text{ここに}\quad N=\#\{z\in D;\,f(z)=0\}$$

ただし零点の個数 N は重複度も込めて数えるものとする.

何者, $f(z)=\prod_{j=1}^{N}(z-a_j)g(z)$, $g(z)$ は D で 0 にならない, と零点を括り出しておけば,

$$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\oint_C(\log f(z))'dz=\sum_{j=1}^{N}\oint_C\frac{1}{z-a_j}dz+\oint_C\frac{g'(z)}{g(z)}dz=2\pi iN$$

従って

$$N=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{1}$$

名前の由来は $\log f(z)=i\arg f(z)$ より, “領域の周に沿っての偏角の増加量 $/2\pi$ が 領域内部の零点の個数となる” から.
結果が整数になることがわかっているので, かなり荒い線積分の近似計算でも零点の個数が正確にわかる.

演習問題 1　次の多項式は各象限内にそれぞれ何個の複素根を持つか ?(1) 式を適当な閉曲線 C に対して数値計算することにより明らかにせよ. (数値計算は C または pascal または Fortran または Mathematica いずれにても可.)

1) z^3-z+5　　2) z^4+2z^2+1　　3) z^5-z+2　　4) z^6+z^5-1

Newton 法 ：初期値 $z=z_1$ を $f(z)$ の零点 a に十分近くとって

$$z_n\mapsto z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)},\qquad n=1,2,\ldots$$

という変換を反復させると, $z_n\to a$. 実際,

$$\begin{aligned}z_{n+1}-a &= z_n-a-\frac{f(z_n)-f(a)}{f'(z_n)}=z_n-a-\frac{f'(a)(z_n-a)+O(z_n-a)^2}{f'(z_n)}\\ &= \frac{z_n-a}{f'(z_n)}\{f'(z_n)-f'(a)+O(z_n-a)\}=O((z_n-a)^2)\end{aligned}$$

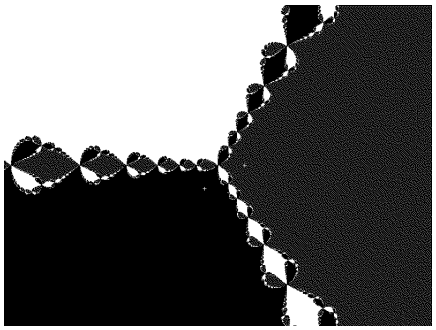
普通の反復法は $|z_{n+1}-a|\le\lambda|z_n-a|$, $\lambda<1$ の形の収束の速さ (1 次の収束) で, Newton 法はそれより定性的に速い (2 次の収束).

$f(z)$ が m 次多項式のときは, $f'(z)$ の零点に出くわすという例外的な初期値を除き必ず $f(z)$ の根のどれかに収束する: 何者, z_n が十分大きいとき

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \doteqdot z_n - \frac{z_n}{m} = \Big(1 - \frac{1}{m}\Big) z_n$$

で原点方向に引き寄せられる.

どの根に収束するかで初期値を色分けすると, Julia 集合の一種であるフラクタル図形ができあがる.



$z^3 - 1$ の根を求める **Newton** 法の反復図

演習問題 **2** 上の問題で挙げた各多項式の根を Newton 法で近似計算せよ. (数値計算は C または pascal または Fortran または Mathematica いずれにても可.)

演習問題 **3** 上の問題で挙げた各多項式の各々について, Newton 法による反復がどの根に収束するかを初期値に対して色分けした図を描け. (計算結果の図示は C または pascal または Fortran と xgrc.o の組合せ, または Mathematica いずれにても可.)

演習問題 **4** $\sin z$ の Taylor 展開の部分和として得られる多項式

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

の根は始めの $1/3$ 個くらいは $0, \pi, 2\pi, \ldots$ に近い実根となる (去年の夏休みの宿題 !). では残りの根はどこにあるか ?