函数論講義メモ No.6

金子　晃

【等角写像】 正則函数は平面の写像を定める．この写像は常に向きを保存する．写像 $z \mapsto f(z)$ の 2 次元写像 $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ としての微分 (Jacobi 行列) は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{1}$$

これは複素数 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ による積を行列で表現したものと一致する．(1) の行列式 (写像の Jacobian) は

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

に等しい．従って $f'(z) = 0$ なる点を除き Jacobian は正, i.e. 局所同型．無限小近似は $\arg f'(z)$ の回転と $|f'(z)|$ 倍の相似拡大．

正則函数の定める写像は等角である．何者, 二つの曲線 C_1, C_2 が交点 a で成す角とは, a でのそれぞれの接線ベクトルが成す角のこと．$f(z)$ によりそれぞれが同じ角 $\arg f'(z)$ だけ回転するので, 成す角は不変．

$f(z)$ が領域 U を V に一対一に写し, かつ U 上 $f'(z) \neq 0$ のとき, $f(z)$ は U から V への等角写像と呼ばれる．このような二つの領域は函数論的に同値と考えられる．

定理 平面領域の同値類は穴の数により相当異なる．単連結領域 (穴が無い) はすべて同値 (等角写像で単位円板と一対一に対応する)．2 重連結領域 (穴一つ) の場合は円環に等角写像される．外側の円と内側の円の半径の比は等角不変量となる．

正則函数の合成函数も正則函数, 逆函数も有れば正則となる従って等角写像も合成したり逆をとったりできる．

【等角写像の応用】　$\Delta u = 0$ の解を表現するのに使える．

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f$$

だから, 正則函数 $f = u + iv$ の実部 u, 虚部 v はそれぞれ $\Delta u = 0$ を満たす (調和函数という)．

逆に, 調和函数 u が与えられたとき, Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi := -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \psi := \frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の連立偏微分方程式と見ると, 両立条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

が満たされ, 従って, 局所的に (あるいは単連結領域で) v が線積分

$$v(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi dx + \psi dy$$

により求まる (Green の定理により, 値は積分路に依存しない)．v を u の共役調和函数という．そして $f = u + iv$ は正則となる．

補題 1　単連結領域上の調和函数に対し共役調和函数が存在する．

系 調和函数は局所的に (あるいは単連結領域で) 二つの正則函数 f, g により $f(z) + \overline{g(z)}$ の形に表される.

$h(z) = \overline{g(z)}$ の形の函数を反正則という. ⇔ $\partial_z h(z) = 0$, $\overline{z}$ だけで表される函数.

補題 2 正則函数と調和函数の合成は調和函数となる: $\varphi(u, v)$ が (u, v) の調和函数で, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則なら, $w = u + iv$ と置いて

$$\begin{aligned}\Delta_{(x,y)}\varphi(u(x,y), v(x,y)) &= 4\partial_z\{\partial_{\overline{z}}\varphi(u,v)\} = 4\partial_z\{\overline{f'(z)}\partial_{\overline{w}}\varphi(u,v)\} = 4\overline{f'(z)}\partial_z\{\partial_{\overline{w}}\varphi(u,v)\} \\ &= 4\overline{f'(z)}f'(z)\partial_w\{\partial_{\overline{w}}\varphi(u,v)\} = 4|f'(z)|^2\Delta_{(u,v)}\varphi = 0\end{aligned}$$

非圧縮性の完全流体の定常流は調和函数の速度ポテンシャルを持つ :$\exists\Phi$ such that $\Delta\Phi = 0$ かつ, 流体の速度場が

$$\boldsymbol{v} = \nabla\Phi := \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$

で与えられる. $\Phi = \mathrm{const.}$ は等ポテンシャル線と呼ばれ, 速度場は常にこれらの線に垂直. Φ の共役調和函数を Ψ とすれば, 速度場に沿って動くと

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ &= 0 \qquad \text{Cauchy-Riemann より}\end{aligned}$$

従って $\Psi = \mathrm{const.}$ が流線を与える. 補題 2 により, 流線の分かっている流れを等角写像で写すと再び流線が得られる. よって複雑な形をした単連結領域の境界に沿う流れを, 円板の境界に沿う流れから等角写像を用いて作り出すという方法が可能となる.

正則函数 $f(z)$ の原始函数もやはり局所的に, あるいは単連結領域の上で線積分

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

により求まる. Cauchy の積分定理により値は積分路によらない.

演習問題 1 次の正則函数による, 指定された領域の像を描け.

1) $w = z^2$, 円板 $|z - 1| \leq 1$ の像
2) $w = z^3$, 円板 $|z - 1| \leq 1$ の像
3) $w = e^z$, 長方形 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2\pi i$ の像
4) $w = z^3 - 3$, 長方形 $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ の像