函数論講義メモ No.8

金子　晃

以下, ☆は定義, ★は定理, ◎ は注意を表す

【平面の位相】

ε 近傍

☆ $a \in \boldsymbol{C} \tilde{=} \boldsymbol{R}^2$ の ε 近傍とは, $B_\varepsilon(a) := \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| < \varepsilon\}$ のこと.

平面の点の分類　平面集合 X が一つ有ると, 平面の点がこの集合に関して次の 3 種に分類される ：

☆ $X \subset \boldsymbol{C}$ に対し, $a \in X$ が X の内点とは, $\exists \varepsilon > 0$ such that $B_\varepsilon(a) \subset X$. i.e. 隣近所と道連れに X に含まれること.

☆ $X \subset \boldsymbol{C}$ に対し, $a \in X$ が X の外点とは, $\exists \varepsilon > 0$ such that $B_\varepsilon(a) \cap X = \emptyset$.

☆ X の内点でも外点でも無い点は X の境界点と呼ばれる.

★ $a \in X$ が X の外点 $\Leftrightarrow$ a が補集合 X^c の内点.

★ $a \in X$ が X の境界点 $\Leftrightarrow$ a が補集合 X^c の境界点.

開集合 ・閉集合

☆$\Omega \subset \boldsymbol{C}$ が開集合とは, Ω が境界点を一つも含まないこと. i.e. $\forall a \in \Omega$ に対し $\exists \varepsilon > 0$ such that $B_\varepsilon(a) \subset \Omega$.

☆ $E \subset \boldsymbol{C}$ が閉集合とは, E がその境界点をすべて含むこと.

★$\Omega \subset \boldsymbol{C}$ が開集合 $\Leftrightarrow$ 補集合$\Omega^c = \boldsymbol{C} \setminus \Omega$ が閉集合.

◎ 一般には $X \subset \boldsymbol{C}$ は開集合でも閉集合でもない.

★ $E \subset \boldsymbol{C}$ が閉集合 $\Leftrightarrow \forall \{a_n\} \subset E$ に対し $\boldsymbol{C}$ において $a_n \to a$ なら, 再び $a \in E$ となること,
i.e. 極限で E から飛び出さない.

位相的集合算　平面の点集合から次の 3 種の新しい集合ができる ：

☆ X の内部 (開核) $\overset{\circ}{X} = X$ の内点の集合

☆ X の閉包 $\overline{X} = X$ にその境界点をすべて追加したもの$\Leftrightarrow$ X の収束列の極限点をすべて追加したもの.

☆ X の境界 $\partial X = X$ の境界点の集合.

★$\overset{\circ}{X} = X \setminus \partial X = X$ に含まれる最大の開集合

★$\overline{X} = X \cup \partial X = X$ を含む最小の閉集合.

近傍

☆ $U \subset X$ が $a \in X$ の近傍とは, $\exists \varepsilon > 0$ such that $B_\varepsilon(a) \subset X$.

★ $U \subset X$ が $a \in X$ の近傍 $\Leftrightarrow$ $a \in \Omega \subset U$ なる開集合 Ω が存在すること.

☆開集合である近傍を開近傍, 閉集合である近傍を閉近傍という. 普通は単に近傍と云えば, 開近傍を指す.

☆一般の集合 E の近傍とは, E を含む開集合, あるいは E を内部に含む集合のこと.

連結性

☆★部分集合 $X \subset \boldsymbol{C}$ が連結

$\Leftrightarrow$ $X \subset U \cup V, U \cap V = \emptyset$ なる開集合 $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ は存在しない.

$\Leftrightarrow$ $X \subset U \cup V, U \cap V = \emptyset$ なる閉集合 $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ は存在しない.

☆部分集合 $X \subset \boldsymbol{C}$ が弧状連結

$\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in X$ に対し, これらを結ぶ連続曲線弧 $\exists \varphi(t), 0 \leq t \leq T, \varphi(0) = a, \varphi(T) = b$ で, 跡が X に含まれるもの (i.e. $\forall t$ について $\varphi(t) \in X$ となるもの) が存在する.

例　連結だが弧状連結でないもの ：

$$\{(x,y);\, y=\sin\frac{1}{x}, 0<x\leq 1\}\cup\{(0,y);\, -1\leq y\leq 1\}$$

★開集合 $\Omega\subset \boldsymbol{C}$ が連結 $\Leftrightarrow$ Ω は弧状連結.

☆連結開集合のことを領域という. その閉包を閉領域ということがある.

◎ 領域の閉包の開核はもとに戻ると限らない. 例 $X=\{z\in\boldsymbol{C};\, 0<|z|<1\}$.

◎ 領域は正則函数の定義域として最も自然なものである.

写像と位相

☆★平面の写像 $\Phi:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ が連続

$\Leftrightarrow$ $\forall a\in\boldsymbol{C}, \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ such that $|z-a|<\delta\Rightarrow|\Phi(z)-\Phi(a)|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall\{a_n\}\subset\boldsymbol{C}$ について, $a_n\to a\Rightarrow\Phi(a_n)\to\Phi(a)$

$\Leftrightarrow$ $\forall$ 開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{C}$ に対し$\Phi^{-1}(\Omega)$ は再び開集合となる.

$\Leftrightarrow$ $\forall$ 閉集合 $E\subset\boldsymbol{C}$ に対し$\Phi^{-1}(E)$ は再び閉集合となる.

★連続函数 $f(z)$ を用いて $\{f(z)<0\}$ の形で開集合を, また $\{f(z)\leq 0\}$ の形で閉集合を, いくらでも作ることができる.

連続帰納法

☆平面の領域 X の各点 z についてある命題 $P(z)$ が付与されており,

1) $P(z)$ が真であるような点 $z\in X$ の集合は空でない.

2) ある点 a で $P(a)$ が真なら, $\exists\varepsilon>0$ such that $|z-a|<\varepsilon$ なる任意の点 z で $P(z)$ は真

3) X の点列 a_n に対して $P(a_n)$ が真で, $a_n\to a\in X$ なら, $P(a)$ も真.

を満たすならば, $P(z)$ は $\forall z\in X$ に対して真である.

これは, $P(z)$ が真である $z\in X$ の集合 U と $P(z)$ が擬である $z\in X$ の集合 V に連結性の条件を当てはめると $V=\emptyset$ とならざるを得ないことから示される.

応用例 ：

★一致の定理　領域 X で定義された正則函数が, X のある点の近傍で 0 なら X 上至るところで 0 となる.

精密化 ： 領域 X で定義された正則函数が, X のある点に収束する点列の上で 0 なら X 上至るところで 0 となる.

系 :函数関係不変の原理　二つの正則函数 $F(z), G(z)$ が実軸のある線分の上で一致すれば, この線分を含む共通の定義領域で両者は一致する.

系 ： 正則函数に対する等式は実軸の一部の線分上で証明しておけば十分である.

例 ： 指数法則や三角函数の等式は, 複素化しても保存される.

ホモロジーとホモトピー

☆領域 Ω 内の始点と終点を同じくする二つの曲線弧 $C_1: z=\varphi(t), 0\leq t\leq T$ と $C_2: z=\psi(t), 0\leq t\leq T$ が homotopic (ホモトピー同値) $\Leftrightarrow$ Ω の中で連続変形できる. i.e. $\exists$ 連続写像 $\Phi:[0,1]\times[0,t]\to\Omega$ such that $\Phi(0,t)=\varphi(t)$, $\Phi(1,t)=\psi(t)$, $0\leq t\leq T$.

☆領域 Ω 内の始点と終点を同じくする二つの曲線弧 $C_1: z=\varphi(t), 0\leq t\leq T$ と $C_2: z=\psi(t), 0\leq t\leq T$ が homologous (ホモロジー同値) $\Leftrightarrow$ Ω 内の面図形 (2 次元鎖) $D=\sum_{j=1}^{p} n_jD_j$ が存在し $C_1-C_2=\partial D$ となる.

★ホモトピー同値 $\Rightarrow$ ホモロジー同値

★ **Cauchy** の積分定理　f が領域 X で正則で, C_1 と C_2 が X でホモトピー同値 (ホモロジー同値) なら

$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz$$

☆領域 X の基本群 $\pi_1(X) =$ 定点 $a \in X$ を通る閉曲線のホモトピー同値類. 二つの曲線をつなげるという演算で群を成す. 単位元は定点 a から動かないもの (一点).

☆領域 X の 1 次ホモロジー群 $=$ 定点 $a \in X$ を通る閉曲線のホモロジー同値類

★一般にはホモトピー同値 $\Rightarrow$ ホモロジー同値だが, 平面領域 Ω については二つの群は一致し, 自由加群 (i.e. $\boldsymbol{Z}$ の直積) となる. 直積の個数 $= \Omega$ の穴の個数

☆★領域 Ω が単連結 $\Leftrightarrow$ 穴が無い $\Leftrightarrow$ 基本群が 0

$\Leftrightarrow$ 任意の閉曲線が Ω 内の連続変形で一点に潰せる.

★正則函数 $f(z)$ の原始函数は単連結領域の上では線積分

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

により一価に求まる. Cauchy の積分定理により値は積分路によらない.

☆単連結でない領域は複連結と呼ばれる. 特に, 穴が一つの領域は二重連結領域と呼ばれる.

★複連結領域 Ω の上では原始函数は一般に多価となる. 例 : $\Omega = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ として

$$\log z = \int_{1}^{z} \frac{1}{z} dz$$