函数論レポート No.2

提出期限 ：11 月 20 日 (金) 午後 5 時
提出場所 ：研究室 (理 III-301) 前の北キツネのレポートボックス

注意 1) 最後の一週間では解けません. そのために一ヶ月の期限が付けてあります. ^^;)
2) ◜ は楽しんで頂くためのもの (解けないからといって寝込んだりしないように), ⊙ は試験に似た問題が出る可能性の有るものです.

問題 **1** ◜ 3 次方程式 $x^3 - 15x - 4 = 0$ を 1) 高校生式のやり方で, 2) Cardano の公式を用いて, 解け.

問題 **2** ⊙ 双曲線函数 $\sinh x$, $\cosh x$ の定義と, それらが満たす諸公式を挙げ, それらの関係式が何故 $\sin x$, $\cos x$ のそれに似ているかを説明せよ.

問題 **3** ⊙ $\mathrm{Arctan}\, x$ を複素変数の log により表せ.

問題 **4** ⊙ $\int \dfrac{1}{\sqrt{ax^2+1}}dx$ の表現が $a = 1$ から $a = -1$ まで変わるときの様子を複素数を用いて調べ

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \mathrm{Arcsin}\, x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

の二つの公式を関連付けよ.

問題 **5** ◜ $\log(1+x)$ の Taylor 展開を複素化したものを用いて $\log(1+z) = \log\sqrt{(1+x)^2+y^2} + i\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{1+x}$ が直接示せるかどうか研究してみよ.

問題 **6** ⊙ $\log z = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ が Cauchy-Riemann の偏微分方程式を満たすことを確かめよ .

◜ 同じ計算を Mathematica にやらせてみよ. (出力結果を印刷して提出せよ.) [Mathematica は 6 階の機械なら login してターミナルから math と打てば起動する. 情報の人は, 5 階の機械では必ずしも math に path が通っていないかもしれないので~kanenko/Biseki/math を実行するか, このファイルの記述を参考にせよ. 更に詳しい使い方については, edusv.edu.cc.ocha.ac.jp:~kanenko/Biseki/mathematica.ps あるいはxx999.xx.is.ocha.ac.jp:~kanenko/Biseki/mathematica.ps を見よ.]

```
F=Log[Sqrt[x^2+y^2]]+I* ArcTan[y/x]
G=D[F,x]+I*D[F,y]
Simplify[G]
```

問題 **7** ⊙ 次の線積分を定義に従って計算せよ . ただし n は正整数とする.
1) C を単位円周に正の向きを与えたものとするとき , $\oint_C \dfrac{1}{\overline{z}^n}dz$
2) C を正方形 $\{(x,y);\, |x| \le 1,\, |y| \le 1\}$ の周に正の向きを与えたものとするとき , $\oint_C \dfrac{1}{\overline{z}^n}dz$