函数論レポート No.2 解答と講評

問題 1 解答 1) 奇数次の代数方程式は中間値の定理を用いると必ず実根が取り出せる. (計算可能かどうかは別.) よって $x^3-15x-4=0$ の符号変化を追跡してゆくと, $x=4$ が根であることが容易に分かる. $x-4$ で方程式を割ると 2 次方程式 $x^2+4x+1=0$ が残るので, 他の 2 根は $-2\pm\sqrt{3}$ と求まる.

2) Cardano の公式を使うため, まず $-r/2=2$, $R=r^2/4+q^3/27=4-125=-121$. よって $\sqrt{R}=11i$ だから

$$\sqrt[3]{-\frac{r}{2}\pm\sqrt{R}}=\sqrt[3]{2\pm 11i}=2\pm i$$

を得る. (3 乗根は三つ有るわけだが, どうせ後で ω を使うので, ここは何でも一つ求めればよい.) すると

$$\begin{aligned}
z_1 &= (2+i)+(2-i)=4, \qquad ,\\
z_2 &= (2+i)\omega+(2-i)\omega^2=\frac{(2+i)(-1+\sqrt{3}i)}{2}+\frac{(2-i)(-1-\sqrt{3}i)}{2}\\
&= \frac{-2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)i-(2\sqrt{3}-1)i}{2}=-2-\sqrt{3},\\
z_3 &= (2+i)\omega^2+(2-i)\omega=\frac{(2+i)(-1-\sqrt{3}i)}{2}+\frac{(2-i)(-1+\sqrt{3}i)}{2}\\
&= \frac{-2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}-(2\sqrt{3}+1)i+(2\sqrt{3}+1)i}{2}=-2+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$\sqrt[3]{2\pm 11i}$ をどうやって知ったのか云わなきゃずるいという人も居るだろう. ここは論理的には説明し難いが, 最悪の場合は近似計算でもいいというのなら, de Moivre の公式に持ち込むことができる. $\sqrt[3]{2\pm 11i}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と置くと, $r=\sqrt[6]{2^2+11^2}=\sqrt[6]{125}=\sqrt{5}$ は容易にわかる. よって

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\frac{11}{5\sqrt{5}}$$

$\sin\theta$ に関するこの方程式の実根を追跡すると $\sin\theta=1/\sqrt{5}$ が求まる. よって $\cos\theta=2/\sqrt{5}$ となり, 上記の 3 乗根が求まる. 電卓を持っている人は, 3θ の近似値を求め, それから $\sqrt{5}\cos\theta$, $\sqrt{5}\sin\theta$ を近似計算しても, それぞれ $1, 2$ じゃなかろうかと予想できるだろう. なお, 一般には θ で書いておくしかない.

問題 2 解答 双曲線函数の定義は

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

であり, 指数函数で表されるので高校の教科書にも書いてあるものがある. 主な公式として

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x-\sin^2 x=1,\\
&\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y, \quad \sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y,\\
&(\sinh x)'=\cosh x, \quad (\cosh x)'=\sinh x
\end{aligned}$$

などが微積の教科書に載っているであろう. 三角函数に対する公式に良く似ているが, 周期性に関する公式が無いことに注意されたい.

さて, 三角函数の複素版

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

を習うと, 双曲線函数は

$$\sinh x=i\sin(-ix), \qquad \cosh x=\cos(-ix)$$

であることがわかる. 三角函数の諸公式は独立変数が複素数になっても成り立つ (Taylor 展開を用いて証明できる) から, 上に挙げた双曲線函数の諸公式はすべて三角函数の対応する公式から導かれることがわかる. レポートとしてはこれらをていねいに書いてもらった方がいいが, ここではすべてやるのは省略して, 次の二つだけ紹介します.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \cos^2(-ix) - i^2\sin^2(-ix) = \cos^2(-ix) + \sin^2(-ix) = 1,$$
$$(\cosh x)' = (\cos(-ix))' = (-i)(-\sin(-ix)) = i\sin(-ix) = \sinh x$$

問題 3 解答 $\mathrm{Arctan}\, x$ は複素数 $1+xi$ の偏角に等しいから,

$$\log(1+xi) = \log|1+xi| + i\mathrm{Arctan}\, x = \log\sqrt{1+x^2} + i\mathrm{Arctan}\, x$$

従って

$$\mathrm{Arctan}\, x = \frac{1}{i}\log\frac{1+xi}{\sqrt{1+x^2}}$$

これは,

$$= \frac{1}{2i}\log\frac{(1+ix)^2}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}$$

と書き直せる. やり方によってはこちらの表現が先に得られる. この他にもいろいろ表現がある.

問題 4 解答 $a>0$ として

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{d(\sqrt{a}x)}{\sqrt{ax^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log(\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+1})$$

講義の説明法とは少し変えて, ここで, a を負の数 $-a$ に変えると,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-ax^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\log(\sqrt{-a}x + \sqrt{-ax^2+1}) = \frac{1}{\sqrt{a}i}\log(\sqrt{a}xi + \sqrt{1-ax^2})$$

$\log$ の中の複素数は絶対値が $(\sqrt{a}x)^2 + (\sqrt{1-ax^2})^2 = 1$ に等しいから, 上は

$$= \frac{1}{\sqrt{a}i}i\mathrm{Arcsin}\,(\sqrt{a}x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{Arcsin}\,(\sqrt{a}x)$$

となる. $a=1$ とすれば, 第二の公式が第一の公式に変形できた.

もちろん, 逆の方から変形してもいいが, $\mathrm{Arcsin}\, x$ の x を ix にしたときの定義をしなければならない.

$$\mathrm{Arcsin}\, x = \frac{1}{i}\log\{\sqrt{1-x^2} + ix\}$$

という表現において x を ix に変えればよいのだが, 正当化まで考えるのは面倒ですね. (形式的にやればよい, という定理をそのうちやりますが.)

問題 5 解答

$$\begin{aligned}\log(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+iy)^n}{n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{{}_nC_{2k}}{n}(-1)^k x^{n-2k}y^{2k} + i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}\frac{{}_nC_{2k-1}}{n}(-1)^{k-1}x^{n-2k+1}y^{2k-1}\end{aligned}$$

である. ここに $[x]$ はガウス記号 (x を越えない最大の整数) を表す. この実部・虚部がそれぞれ

$$\log(1+z) = \log\sqrt{(1+x)^2+y^2} + i\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{1+x} = \log(1+x) + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{(1+x)^2}\right) + i\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{1+x}$$

の実部 ・虚部と一致することを見る. まず実部は,

$$\log(1+x)+\frac{1}{2}\log\Big(1+\frac{y^2}{(1+x)^2}\Big)=\log(1+x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}\frac{y^{2k}}{(1+x)^{2k}}$$

この y^{2k} の係数が

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{{}_nC_{2k}}{n}(-1)^k x^{n-2k}y^{2k} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}y^{2k}\sum_{n=2k}^{\infty}(-1)^n\frac{{}_nC_{2k}}{n}x^{n-2k}\\ &= \log(1+x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}y^{2k}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m{}_{m+2k}C_{2k}\frac{2k}{m+2k}x^m\\ &= \log(1+x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}y^{2k}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(m+2k-1)!}{(2k-1)!m!}x^m\end{aligned}$$

の y^{2k} の係数と一致することを見なければならない. $k=0$ については既に明らかである. $k>0$ については $\dfrac{1}{(1+x)^{2k}}$ の展開係数を知る必要があるが, これは $1/(1+x)$ の展開を $2k$ 回微分してみるのが速い.

次に虚部を見ると

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}y^{2k-1}\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}{}_nC_{2k-1}(2k-1)x^{n-2k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}y^{2k-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m{}_{m+2k-1}C_{2k-1}\frac{2k-1}{m+2k-1}x^m\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}y^{2k-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(m+2k-2)!}{(2k-2)!m!}x^m=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\frac{y^{2k-1}}{(1+x)^{2k-1}}\end{aligned}$$

で, 展開係数が一致することが上と同様に確かめられる.

なお, この問題は

$$\log(1+z)=\log(1+x+iy)=\log(1+x)\Big\{1+\frac{iy}{1+x}\Big\}=\log(1+x)+\log\Big\{1+\frac{iy}{1+x}\Big\}$$

と変形し, 後者を

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{(iy)^n}{(1+x)^n}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m}\frac{y^{2m}}{(1+x)^{2m}}+i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\Big(\frac{y}{1+x}\Big)^{2m-1}\\ &= -\frac{1}{2}\log\frac{y^2}{(1+x)^2}+i\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{1+x}\end{aligned}$$

と Taylor 展開するとほとんど自明になってしまう. しかし, このような基本を問う問題で複素数に対する log の加法公式を使ってしまってよいのかどうかは明らかでない. 上ではそれを冪級数で定義する方の対数に用いているのだから, 加法公式も冪級数だけで証明しておけば完全な証明となるだろう. x, y を絶対値が 1 より小さい複素数として,

$$\begin{aligned}\log\{(1+x)(1+y)\} &= \log(1+x+y+xy)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+y+xy)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\{x+(1+x)y\}^n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k x^{n-k}(1+x)^k y^k=\sum_{k+m>0}\frac{(-1)^{k+m-1}}{k+m}{}_{k+m}C_k x^m(1+x)^k y^k\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}x^m+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+x)^k y^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}k}{k+m}\frac{(k+m)!}{m!k!}x^m\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \log(1+x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+x)^k y^k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!} x^m \\
&= \log(1+x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(1+x)^k y^k (1+x)^{-k} \\
&= \log(1+x) + \log(1+y)
\end{aligned}
$$

ここで, 最後の変形は $(1+x)^{-k}$ の展開を用いた (上の計算で既出).

問題 **6** 解答 与式の右辺を $F(x,y)$ と置けば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}, \\
&\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2} \\
&\therefore \quad \Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big) F(x,y) = \frac{x+iy}{x^2+y^2} - \frac{x+iy}{x^2+y^2} = 0
\end{aligned}
$$

となり, 示された. なお, この式はもちろん $(x,y) \neq (0,0)$ でしか意味がない.

実数形の連立方程式の方で計算してもよい.

Mathematica による出力は以下の通り :

```
In[1]:= F=Log[Sqrt[x^2+y^2]]+I* ArcTan[y/x]

                 y               2    2
Out[1]= I ArcTan[-] + Log[Sqrt[x  + y ]]
                 x

In[2]:= G=D[F,x]+I*D[F,y]

           x          I y             y          I
Out[2]= ------- - ----------- + I (------- + ----------)
         2    2            2        2    2           2
        x  + y     2      y        x  + y           y
                  x  (1 + --)                x (1 + --)
                           2                         2
                          x                         x

In[3]:= Simplify[G]

Out[3]= 0
```

こういうものをプリントアウトするには, mule かテキストエディターを開いておいて, マウスを用いて必要な出力だけをそこへコピーし, できた文書をプリントすればよい. PS ファイルしかプリントできないプリンターのときはa2ps というツールを用いてポストスクリプトファイルに変換する. このツールの使い方は man a2ps で調べよ.

問題 **7** 解答 1) 単位円周のパラメータ表示は $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ だから,

$$
\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\bar{z}^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{-ni\theta}} = \int_0^{2\pi} e^{(1+n)i\theta} d\theta = \Big[\frac{e^{(1+n)i\theta}}{(1+n)i}\Big]_0^{2\pi} = \frac{e^{(1+n)2\pi i} - 1}{(1+n)i} = 0
$$

となる ($n \geq 1$ に注意). なお, これは, 単位円周上で $1/\overline{z} = z$ であることに注意すると, Cauchy の積分定理により

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\overline{z}^n} = \oint z^n dz = 0$$

と, 計算せずとも出て来る.

2) まず $n > 1$ とする. $C_1 = \{(1, y); -1 \leq y \leq 1\}$ と置くと

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{1}{\overline{z}^n} dz &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-iy)^n} i dy = \left[\frac{1}{n-1}\frac{1}{(1-iy)^{n-1}}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(1-i)^{n-1}} - \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

全く同様にして, 正方形の他の辺についても

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \frac{1}{\overline{z}^n} dz &= \int_{1}^{-1} \frac{1}{(x-i)^n} dx = \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-i)^{n-1}}\right]_{1}^{-1} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(1-i)^{n-1}} - \frac{1}{(-1-i)^{n-1}}\right), \\ \int_{C_3} \frac{1}{\overline{z}^n} dz &= \int_{1}^{-1} \frac{1}{(-1-iy)^n} i dy = \left[\frac{1}{n-1}\frac{1}{(-1-iy)^{n-1}}\right]_{1}^{-1} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(-1+i)^{n-1}} - \frac{1}{(-1-i)^{n-1}}\right), \\ \int_{C_4} \frac{1}{\overline{z}^n} dz &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+i)^n} dx = \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x+i)^{n-1}}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(-1+i)^{n-1}} - \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

よって答はこれらの総和で

$$\frac{2}{n-1}\left(\frac{1}{(1-i)^{n-1}} - \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(-1+i)^{n-1}} - \frac{1}{(-1-i)^{n-1}}\right)$$

これは n が偶数, 従って $n-1$ が奇数のときは 0 となる. n が奇数のときは

$$= \frac{4}{n-1}\left(\frac{1}{(1-i)^{n-1}} - \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right) = \frac{4}{n-1}\left(\frac{1}{(-2i)^{(n-1)/2}} - \frac{1}{(2i)^{(n-1)/2}}\right)$$

よって $n-1$ が 4 の倍数ならやはり 0 となる. 残るのは $n = 4m+3$ の形のときで,

$$= -\frac{8}{n-1}\frac{1}{(2i)^{2m+1}} = (-1)^m \frac{i}{(n-1)2^{2m-2}} = (-1)^{(n-3)/4}\frac{i}{(n-1)2^{(n-7)/2}}$$

以上の計算では, 複素数値の有理函数に実数のときと同様の不定積分の公式を用いたが, これは逆に微分してみれば, その正当性が納得されよう. (微分も積分も, それぞれ実部・虚部に対して独立に作用するのであった.)

次に $n = 1$ のときは,

$$\int_{C_1} \frac{1}{\overline{z}} dz = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-iy} i dy = [-\log(1-iy)]_{-1}^{1} = \log\frac{1+i}{1-i} = \frac{\pi}{2}i \tag{1}$$

全く同様にして, 正方形の他の辺についても

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \frac{1}{\overline{z}} dz &= \int_{1}^{-1} \frac{1}{x-i} dx = [\log(x-i)]_{1}^{-1} = \log\frac{-1-i}{1-i} = -\frac{\pi}{2}i, \\ \int_{C_3} \frac{1}{\overline{z}^n} dz &= \int_{1}^{-1} \frac{1}{-1-iy} i dy = [-\log(-1-iy)]_{1}^{-1} = \log\frac{-1-i}{-1+i} = \frac{\pi}{2}i, \\ \int_{C_4} \frac{1}{\overline{z}^n} dz &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+i} dx = [\log(x+i)]_{-1}^{1} = \log\frac{1+i}{-1+i} = -\frac{\pi}{2}i\end{aligned}$$

よって答はこれらの総和で 0. 最後のところは log の分枝の選択に悩むところだが, 各積分を計算機で確認しながらやるとよい. プログラム intdbl.f は線積分を最も根源的な Riemann 近似和で計算しているので, その結果は log の分枝の取り方には無関係である.

なお,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-iy} i dy = \int_{-1}^{1} \Big(\frac{-y}{1+y^2} + i \frac{1}{1+y^2} \Big) dy$$

とすれば, 実部は対称性により 0 で, 虚部は Arctan で不定積分でき, log を使わずに計算することもできる.