函数論レポート No.3

提出期限 ：1999 年 1 月 22 日 (金) 午後 7 時
提出場所 ：研究室 (理 III-301) 前の北キツネのレポートボックス

注意 情 は情報科学科の人向け, 数 は数学科の人向けの ⊙ マークのつもりですが, 逆に解いてもよい. もちろん, 全部解けばなお良い.

問題 1 ⊙ 次の函数が正則かどうかを判定せよ. Cauchy-Riemann の方程式による計算には Mathematica を使っても良いが, 試験会場では Mathematica は使えないことに留意せよ.)

1) x^2-y^2+2xyi 2) x^2-y^2-2xyi 3) $e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$

4) $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\dfrac{2xyi}{(x^2+y^2)^2}$

問題 2 ⊙ $D=\{(x,y);|x|\le 1,|y|\le 1\}$ を正方形, n を非負の整数とする.

1) D の境界上の線積分 $\displaystyle\oint_{\partial D}\overline{z}^n dz$ を Green の定理を用いて D 上の 2 重積分に変形したものを与えよ.

2) 上で得た 2 重積分が, $n=4m+1$ の形のとき以外は 0 となることを, 対称性等を利用してなるべく横着に示せ.

3) 前回のレポートでは線積分の計算問題に Green の定理を誤って使った人が沢山いた. 今回はこれを用いても誤りではないが, $n=4m+1$ のときの値の計算は元の線積分で直接やるよりも少しは簡単になっているか ?最も簡単だと思われる方法でこの値を計算してみよ.

問題 3 ⊙ 実軸上の線分 $[-1,1]$ に対する定積分

$$F(z)=\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{z-t}dt$$

で定まる函数 $F(z)$ を考える.

1) $F(z)$ は, $\boldsymbol{C}\setminus[-1,1]$ で正則な函数となることを説明せよ (数 厳密に示せ).

2) 線分 $(-1,1)$ 上での函数 $F(z)$ の値の飛びを計算せよ.

3) $F(z)$ は ± 1 に分岐点を持つ多価正則函数に解析接続されることを示せ.

4) $G(z)=F(z)-e^z\log\dfrac{z+1}{z-1}$ は全複素平面で一価な正則函数となることを示せ.

5) $G(z)$ の原点を中心とする Taylor 展開の一般項の係数を表す式を与えよ (積分表現でも級数でも何でもよい).

問題 4 ⊙ 次の正則函数による, 指定された領域の像を記述せよ. 等角性が崩れているのはどの点か ? (レポートには計算機の出力画像を用いても良いが, 自分の頭で像の特徴が判別できるようにせよ.)

1) $w=(z-1)/(z+2)$, 円板 $|z|<1$ の像.
2) $w=(z-1)/(z+2)$, 円板 $|z+1|<1$ の像.
3) z^3-1, 単位円 $|z|<1$ の像.
4) z^3-1, 単位円 $|z-1|<1$ の像.
5) $w=e^z$, 長方形 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 3\pi$ の像.
6) $w=z^3-3$, 長方形 $|x|\le 2$, $0\le y\le 1$ の像.
7) $w=z^3-3z$, 長方形 $|x|\le 2$, $0\le y\le 1$ の像.

問題 5 ⊙ 5 次方程式 $f(z)=z^5-z+2=0$ の複素根について, 次の各問に答えよ.

1) $|z|\ge 2$ には根が存在しないことを示せ.

2) 実根はいくつあるか追跡し, それらを整数で挟め (i.e. 半開区間 $[m,m+1)$ が根を含むような整数 m をすべて挙げよ.

3) 虚軸上には根が無いことを示せ ?

4) C を半円 $\{z\in\boldsymbol{C};\,|z|\le 2,\,\mathrm{Re}\,z\ge 0\}$ の周とするとき, $\displaystyle\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ の数値積分を近似計算せよ. この結果に偏角の原理を適用して, 与えられた方程式の虚根が第一象限にいくつあるか確定せよ. (計算には Mathematica を使うか `intdbl.f` を修正して利用せよ. 何も使えない人は電卓で計算せよ.)

5) 情 Newton 法ですべての根の近似値を十進法で小数点以下 10 桁まで正しく求めよ. (計算には Mathematica を使うか `cubic.f` を修正して利用せよ.)

6) 情 プログラム `cubic.f` を修正して, $|\mathrm{Re}\, z| \leq 2$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq 2$ の範囲の複素数を初期値とした Newton 法がどの根に収束するかを色分けした図を作り, 添付せよ. (カラー印刷は高価なので白黒に変換したものでよい. X のウインドウに表示された画面を印刷する方法については末尾の 【参考】を参照せよ.)

問題 6 ○̂　$C : z = z(t)$, $0 \leq t \leq T$ を C^2 級 の平面曲線弧とする. $t_2 = t_1 + h$ とし, z_1, z_2 を t_1. t_2 に対応する曲線上の点とする. また, $f(z)$ を C^2 級の函数とする. このとき

1) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt - \frac{f(z_1) + f(z_2)}{2}(z_2 - z_1)$ は $O(h^3)$ の量となることを示せ.

2) 複素線積分に対する台形公式

$$\int_C f(z)dz \fallingdotseq \sum_{j=1}^{N} \frac{f(z_{j-1}) + f(z_j)}{2}(z_j - z_{j-1})$$

は, メッシュサイズ $h = \max\limits_{1 \leq j \leq N} \{|z_j - z_{j-1}|\}$ について $O(h^2)$ の精度を持つ数値積分公式となることを示せ.

問題 7 ⊙　1) 有理函数

$$f(z) = \frac{1}{x^2(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

の部分分数分解を, 分母の各複素零点における Laurent 展開を計算することにより計算せよ. またそれを実の表現に直せ.

2) 上で得られた複素形の部分分数分解を用いて, 函数 $f(z)$ の原始函数を計算し, 最終結果を実の表現に直せ. この計算法は 1 年で習った実数の範囲だけを使う解法と比べて楽か ?

問題 8 ⊙　次の実 1 次元定積分を留数を用いて計算せよ.

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$　2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+1}dx$　3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+1}dx$　4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+cos\theta}d\theta$

問題 9 ⊙　1) 単位円を単位円に写し, 単位円の内部を単位円の内部に写し, かつ点 α を原点に写すような一次変換 $f(z)$ の一般形を書け.

2) 上の $f(z)$ に対して $|f(0) + f'(0)z| \leq 5/4$ が $|z| < 1$ に対して成り立つことを示せ.

3) $f(z)$ が単位円の内部で定義された正則函数で, 単位円の内部を単位円の内部に写し, かつ原点を原点に写すならば, $|f'(0)| \leq 1$ となることを示せ.

4) $f(z)$ が単位円の内部を単位円の内部に写すような一般の正則函数とするとき, 2) と同じ不等式が成立することを示せ. また限界の値 $5/4$ はこれ以上改良できないことを示せ.

【参考】 X のウインドウに表示された画面を印刷する方法は次の通り :,

1) 別ウインドウで `xwd > foo.xwd` を実行する. マウスカーソルが + 印に変わるので, これを取り込みたいウインドウの上まで動かし, マウスの左ボタンをクリックする. これで, xwd フォーマットの画像ファイル `foo.xwd` が出来る.

2) `xv foo.xwd` を実行すると, 取り込まれた画像が再現される. この上でマウスの右ボタンをクリックして xv のメニューウインドウを開き, そこから print を選ぶ.

以上で印刷できないとき, あるいはレポートの TeX ファイルに画像を取り込みたいときは, xv で save を選んで, 現れたオプションウインドウで, postscript フォーマットを選んでセーヴする. ファイル名は自動的に`foo.ps` のように拡張子が変わる. これを TeX ファイルのソースに取り込む方法は func2.tex を真似よ. 基本的には 1 年の冬レポートで曲面のグラフを印刷したときと同じである.