函数論レポート No.3 解答と講評

問題 1　1) 定義通りに計算して

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(x^2-y^2+2xyi)=(2x+2yi)+i(-2y+2xi)=0$$

よって正則. ほとんどの人が連立方程式の形の Cauchy-Riemann を使っていました. それでもいいですが, 複素形の Cauchy-Riemann にも慣れてください.

2) 同じく

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(x^2-y^2-2xyi)=(2x-2yi)+i(-2y-2xi)=4x-4yi\neq 0$$

よって正則でない. なお, “方程式の右辺が原点で 0 になるので, 原点だけでは正則” と答えた人がいますが, 原点で正則とは, 原点のある開近傍で正則という意味で, Cauchy-Riemann が一点だけで満たされていても全く有難味はありません, (実は, 全く意味が無いというのは言いすぎで, ものすごく高度な解析学ではそういう概念も使います.)

3) 同じく

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\{e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)\}\\&\qquad=(2x-2iy)e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)\\&\qquad\quad+e^{x^2-y^2}(-2y\sin 2xy+2iy\cos 2xy-2xi\sin 2xy-2x\cos 2xy)=0\end{aligned}$$

よって正則. これは

$$e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)=e^{x^2-y^2+2xyi}=e^{z^2}$$

と変形してみれば, 二つの正則函数 z^2 と e^z の合成函数として正則性が容易に確かめられる.

4) これは定義通りにやるのはさすがに手では面倒なので, z と $\overline{z}$ で表す方法をとることにする. 有理函数の場合は理論的にも問題は無い.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xyi}{(x^2+y^2)^2}&=\frac{1}{|z|^4}\Big\{\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)^2-\Big(\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)^2-2i\frac{z+\overline{z}}{2}\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big\}\\&=\frac{1}{|z|^4}\frac{1}{2}(z^2+\overline{z}^2-z^2+\overline{z}^2)=\frac{\overline{z}^2}{|z|^4}=\frac{1}{z^2}\end{aligned}$$

よって z だけの函数になったから, 分母が消える原点以外では正則と知られる. なお, Mathematica で定義通りに計算させた結果は次の通り:

```
In[1]:= F=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2 - 2*x*y*I/(x^2+y^2)^2
                          2    2
          -2 I x y      x  - y
Out[1]= ---------- + ----------
           2    2 2      2    2 2
         (x  + y )    (x  + y )
In[2]:= G=D[F,x]+I*D[F,y]
               2            2    2
          8 I x  y    4 x (x  - y )      2 x         2 I y
Out[2]= ---------- - ------------- + ---------- - ---------- +
           2    2 3      2    2 3       2    2 2     2    2 2
         (x  + y )    (x  + y )      (x  + y )    (x  + y )
                 2          2    2
          8 I x y     4 y (x  - y )     2 I x         2 y
>    I (---------- - ------------- - ---------- - ----------)
           2    2 3      2    2 3       2    2 2     2    2 2
         (x  + y )    (x  + y )      (x  + y )    (x  + y )
In[3]:= Simplify[G]
Out[3]= 0
```

> は Mathematica で出力行の継続を表す.

問題 **2** Green の定理の複素形により

$$\oint_{\partial D} \overline{z}^n dz = \iint_D \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{z}^n d\overline{z} \wedge dz = \iint_D n\overline{z}^{n-1} d\overline{z} \wedge dz = \iint_D n(x-iy)^{n-1} 2i dx dy$$

ここで, $d\overline{z} \wedge dz = d(x-iy) \wedge d(x+iy) = 2i dx \wedge dy$ を用いた. さて, n が偶数, すなわち $n-1$ が奇数のときは, $(x-iy)^{n-1}$ を二項定理で展開したときに出て来るどの項も x または y のどちらかについて奇数次となる. よってその変数に関する対称性により, 反復積分に直したときその変数に関する $[-1,1]$ 上の定積分は消える. つまり, n が偶数のときは上の値は 0. n が奇数, 従って $n-1$ が偶数のときも, 上と全く同様の理由で, 展開したときに x, y がともに偶数冪, 従って y が偶数冪の項だけが残る. ということは, 上で $x-iy$ を $x+iy$ に置き換えても値は変わらないということだから,

$$= 2ni \iint_D (x+iy)^{n-1} dx dy$$

ここで x と y を入れ換えるという重積分の変数変換を施すと

$$= 2ni \iint_D (y+ix)^{n-1} dx dy = 2ni \cdot i^{n-1} \iint_D (x-iy)^{n-1} dx dy = 2(-1)^{(n-1)/2} ni \iint_D (x-iy)^{n-1} dx dy$$

だから, もし $(n-1)/2$ が奇数, すなわち $n = 4m+3$ の形だと, これは元の積分の符号を変えたものとなってしまい, 従ってその値は 0. 最後に, 残る $n = 4m+1$ の場合は前回レポートのように直接もとの線積分で計算するのが実は簡単なのだが, 重積分で計算して見る. (ここの計算が第一象限の値の 4 倍でよいことは今までに述べた対称性からわかる. このことはそれほど自明ではないので, 心配な人はもちろん下端を -1 のままで正直に計算すれば良い. 計算の手間はほとんど変わらない.)

$$\begin{aligned}
&= 2ni \times 4 \int_0^1 dy \int_0^1 (x+iy)^{n-1} dx = 8ni \int_0^1 \Big[\frac{1}{n}(x+iy)^n\Big]_0^1 dy = 8i \int_0^1 \Big\{(1+iy)^n - (iy)^n\Big\} dy \\
&= \frac{8i}{(n+1)i}\Big[(1+iy)^{n+1} - (iy)^{n+1}\Big]_0^1 = \frac{8}{n+1}\Big\{(1+i)^{n+1} - 1 - i^{n+1}\Big\} \\
&= \frac{8}{n+1}\Big\{(2i)^{(n+1)/2} - 1 - (-1)^{(n+1)/2}\Big\} = \frac{8}{n+1} 2^{(n+1)/2} (-1)^{(n-1)/4} i = \frac{2^{(n+7)/2}(-1)^{(n-1)/4}}{n+1} i
\end{aligned}$$

問題 **3** 1) $\dfrac{e^t}{z-t}$ は $z \neq t$ なるところでは明らかに z につき正則と云っても良いであろう. t は定数なので, この判定の計算をやるとすれば, 第 2 回くらいの講義でやった Cauchy-Riemann の方程式でもよいし, 第 4 回くらいの講義でやった "複素微分可能" というのでやってもよい.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{e^t}{z+h-t} - \frac{e^t}{z-t} \right\} = -\frac{e^t}{(z-t)^2} \tag{1}$$

問題の函数については, 更にそれが積分記号の中に入っているので, これらの計算と積分が順序交換できることを使わなければならない. これも形式的な計算は積分路が閉曲線のときに Cauchy の積分公式に関連して同じ回の講義で説明したのと同じことてある :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{e^t}{z+h-t} dt - \int_{-1}^1 \frac{e^t}{z-t} dt \right\} = \lim_{h\to 0} \int_{-1}^1 \frac{1}{h} \left\{ \frac{e^t}{z+h-t} - \frac{e^t}{z-t} \right\} dt \\
&= \int_{-1}^1 \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{e^t}{z+h-t} - \frac{e^t}{z-t} \right\} dt = \int_{-1}^1 \frac{-e^t}{(z-t)^2} dt
\end{aligned} \tag{2}$$

t は $[-1,1]$ の上を動くので, これから形式的には $F(z)$ が $z \in C \setminus [-1,1]$ で正則なことが分かる. 残っているのはこの極限と積分の順序交換可能性の正当化だけであるが, それもそのときの講義で "一様収束"

というキーワードを用いて概略の説明がしてある. すなわち, z を実軸上の線分 $[-1,1]$ と交わらない有界閉集合 K の中だけで動かしたとき, パラメータ h を含んだ t の函数族として $h \to 0$ のときの (1) の収束が $t \in [-1,1]$ について一様であれば, 積分と極限は順序交換できる. その理由は実変数のときと同じである :$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を適当にとり, $|h| < \delta$ なる限り $\forall t \in [-1,1], \forall z \in K$ に対して

$$\left| \frac{1}{h} \left\{ \frac{e^t}{z+h-t} - \frac{e^t}{z-t} \right\} - \left(-\frac{e^t}{(z-t)^2} \right) \right| < \varepsilon \tag{3}$$

が成り立つようにできたとすると, これを $[-1,1]$ 上で t につき積分しても

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{h} \left\{ \frac{e^t}{z+h-t} - \frac{e^t}{z-t} \right\} dt - \int_{-1}^{1} \frac{-e^t}{(z-t)^2} dt \right| < 2\varepsilon$$

が成り立つからである. (3) の検証は, K と線分 $[-1,1]$ との距離を $A > 0$ とするとき, $t \in [-1,1]$, $z \in K$ なら $|z-t| \geq A$, $|z+h-t| \geq A - \delta$ であることから

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{h} \left\{ \frac{e^t}{z+h-t} - \frac{e^t}{z-t} \right\} - \left(-\frac{e^t}{(z-t)^2} \right) \right| \\ &\quad \leq e^t \left| -\frac{1}{(z+h-t)(z-t)} + \frac{1}{(z-t)^2} \right| \leq e^t \left| \frac{h}{(z+h-t)(z-t)^2} \right| \leq \frac{e\delta}{(A-\delta)A^2} \\ &\quad \leq \frac{e\delta}{(A/2)A^2} \quad (\delta < 1/2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

よって, この最後の量が ε より小さくなるように δ を決めればよい. 具体的には

$$\delta < \min\left\{ \frac{1}{2}, \frac{A^3}{2e}\varepsilon \right\}$$

で十分である.

なお, 情報の学生は最後の ε-δ 論法のところは無くてよい.

2) 12 月 10 日の講義で $-e^t$ にあたるところを $f(t)$ と一般にしたもので説明済みである. z が上から実軸に近付いたときの値と下から実軸に近付いたときの値の差は, 上からの場合が図 1a のように積分路を変更して計算されるのに対し, 下からの場合が図 1b のように積分路を変更して計算されるので, 両者の差は図 1c のような積分路上での積分となり, Cauchy の積分公式により

$$\oint_C \frac{e^t}{z-t} dt = -2\pi i e^z$$

が得られる.

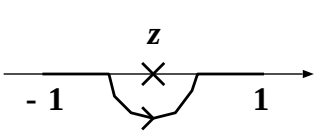


Fig 1a

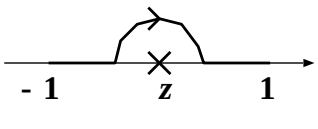


Fig 1b

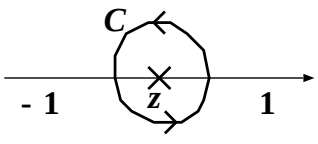


Fig 1c

3) 上の図 1a または 1b のような積分路変形をどんどん続けて行けば, -1 または 1 のまわりを何回でもまわって函数の値を解析接続してゆける. 故に, (これらの点を回って戻って来たときの値が元の値と一致しないので多価函数にはなるが) $F(z)$ は -1, 1 を除き解析接続できる. これも講義で Cousin 積分による解析接続のところで説明済みです.

なお, 質問に来た人と話をしていて, 多価という言葉と極の位数とをごっちゃにしている人がいましたが, 両者は全く異なります. 例えば, $1/z^2$ は原点に 2 位の極を持ちますが, その外では一価な函数です.

4)

$$G(z) = F(z) - e^z \log \frac{z+1}{z-1} = \int_{-1}^{1} \frac{e^t}{z-t} dt - \int_{-1}^{1} \frac{e^z}{z-t} dt = -\int_{-1}^{1} \frac{e^z - e^t}{z-t} dt$$

ここで $\dfrac{e^z - e^t}{z-t}$ は z につき全平面で一価正則であり, 1) と同様の議論でそれを積分して得られる函数 $G(z)$ は全複素平面で一価正則となることが分かる.

なお, $G(z)$ が一価となることは, その定義式の右辺の二つの函数が $-1, 1$ を回ったときに同じ値のずれを生ずることから, 多価性が打ち消し合っていると説明することもできる. ただしこれだと $-1, 1$ が特異点になっているかもしれないという恐れが残る. それを除去するには, Riemann の除去可能孤立特異点に関する定理を用いて, z がこれらの点に近付いたとき $G(z)$ が有界, あるいはもう少し弱く $o(1/|z \pm 1|)$ 程度の無限大となっていることを見ればよい. この場合は簡単な計算で $O \log |z \pm 1|)$ が示せるのでそれで十分である.

5) 最後の表現を更に変形すれば,

$$\begin{aligned}
G(z) &= e^z \int_{-1}^{1} \frac{1 - e^{t-z}}{t-z} dt = -e^z \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-z)^{k-1}}{k!} dt = -e^z \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{(t-z)^k}{k!k} \Big]_{-1}^{1} \\
&= -e^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-z)^k - (-1-z)^k}{k!k} \\
&= -e^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!k} \sum_{j=0}^{k} \{(-1)^j - (-1)^k\} {}_kC_j z^j = -e^z \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{k!k} \{(-1)^j - (-1)^k\} \frac{k!}{j!(k-j)!} \\
&= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{j!(2\ell+1)!(2\ell+j+1)} \qquad (k-j = 2\ell+1) \\
&= -2 \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!(2\ell+j+1)} \qquad (m = n+j)
\end{aligned}$$

従って z^m の係数は

$$-2 \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!(2\ell+j+1)}$$

問題 4　1) $f(z) = (z-1)/(z+2)$ は一次変換なので, 円板 $|z| < 1$ の像は (この上で周も込めて $f(z)$ の分母が消えていないので) 円板となる (円円対応). 境界の方程式を見出すため $z = \pm 1$ の像を見れば, $f(1) = 0$, $f(-1) = -2$. また z が実のとき $f(z)$ も実なので, 実軸が実軸に写されることがわかるが, 元の円は実軸上に直径を持つから, 求める像の円も実軸と直交していなければならない (等角写像). よって新しい円も実軸上直径を持つ. これから像の境界は点 -1 を中心とする半径 1 の円であることがわかる. ただし元の円の中心 $z = 0$ は $w = -1/2$ に写り, 新しい円の中心よりも右にずれている. このことから, 元の円内の同心円の族もそれに対応して右にずれることがわかり, 半径の像もそれらの円に直交するような円弧の族に写ることが推測できる. ここまで考えて計算機に図を描かせると 2a のようになり考察が裏付けられる.

なお, 一次変換の像の研究は教科書に書かれているように

$$w = 1 - \frac{3}{z+2}$$

と変形し,

$$z \mapsto z_1 = z+2; \quad z_1 \mapsto z_2 = \frac{1}{z_1}; \quad z_2 \mapsto z_3 = 3z_2; \quad z_3 \mapsto z_4 = -z_3; \quad z_4 \mapsto w = 1 + z_4$$

と更に基本的な一次変換の合成に分解して調べることもできる.

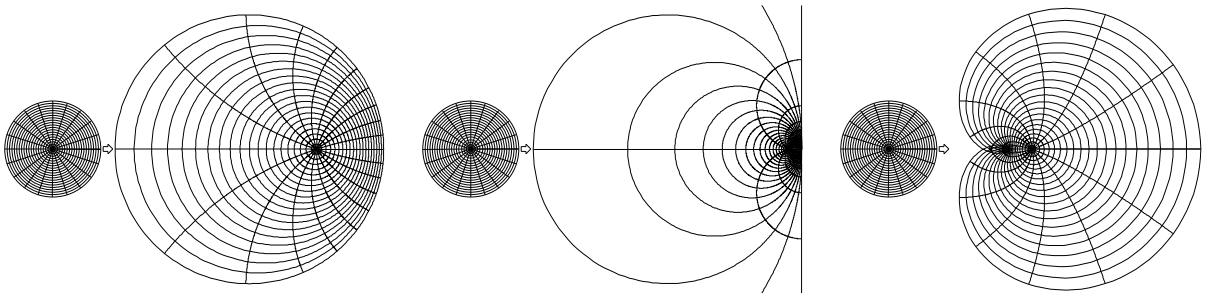
なお, 一次変換は到る所等角です.

2) これも一次変換であるが, 今度は元の円板の周上の点 $z=-2$ で $f(z)=\infty$ となるので, 円円対応の例外としてこの円の像は直線となり, 従ってその内部はその直線のどちらかの側の半平面となるはずである. 今度も実軸は実軸に写るので, 像の直線はそれに直交しなければならないから, 像直線と実軸との交点は, 元の円の実軸上の直径の他の端点 $z=0$ の像, すなわち $w=-1/2$ であることに注意すると, $\mathrm{Re}\, w=-1/2$ と決定される. 最後に, 元の円の中心 -1 の像を見ると $w=-2$ なので, 円板の像は直線の左半平面 $\mathrm{Re}\, w<-1/2$ と分かる.

ここまで調べて計算機に図を描かせると, あまりきれいではなくてもまあそんなもんだと納得できるであろう. この問題では先に計算機に図を描かせると, プログラムが悪い場合は何が何だかわからなくなる恐れがある.

3) -1 は全体を左に 1 ずらすだけなので, 本質的に z^3 による像が分かればよい. 後者は単位円を 3 重に単位円に写すことは計算しなくても明らかである. 等角でなくなる点は $3z^2=0$ すなわち原点で, その回りで写像が多価となっている. 計算機に図を描かせたらどうなりましたか ?この問題ではあまり精密な図を描かせるとかえって 3 重になっていることが見にくくなります. この像は描いても仕方が無いので略します.

4) 今度は等角性が崩れる点 $z=0$ が元の領域の境界に有るので, そこの部分が 180° から $180^\circ\times 3=540^\circ$ に折れ曲がる. よってそのあたりでこの点の上下から来る元の領域の像が重なり合うと予想される. ここまで考えて計算機に図を描かせると納得できる図を得ることができる. 手で追跡する場合もだいたいの図しか描けないが概念図は得られるでしょう.

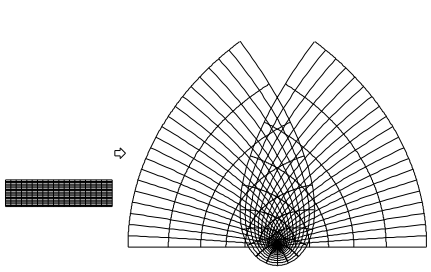


1) の図　　**2)** の図　　4) の図

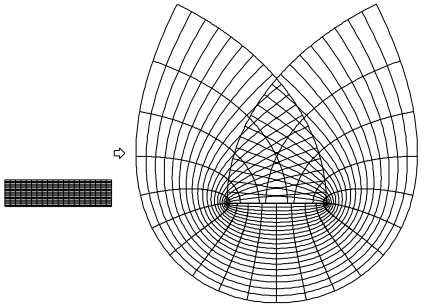
5) $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ だから, x の増加は w の絶対値の増加を, y の増加は w の偏角の増加をもたらす. よって求める像は, 内半径 1, 外半径 e の円環の偏角 0 から 3π までの部分である. つまり一周して更に, 上半平面に当たるもう半円分が二重に重なって写像される. この函数は到るところ等角であるが, このように大域的には一対一がくずれることがあるのである. この像は簡単なので略す.

6) これも本質的には z^3 の振舞であり, 3), 4) で説明したとおりである. 今度は等角性が崩れる点 $z=0$ がもとの領域の境界点にあり, ここで写像は領域の境界を $540^\circ=360^\circ+180^\circ$ 度にねじ曲げるので帯が一回ひねられて重なり合うような感じになる. そう思って計算機に描かせた図をみると事態が把握できるであろう.

7) この写像の像は言葉で説明するにはやや複雑ですが, $f(z)=z^3-3z$ の導函数 $f'(z)=3z^2-3$ が 0 となる点, すなわち等角性が崩れているのは $z=\pm 1$ であり, これらの点では $f(z)$ は z^2 のような振舞をする (これらの点で $f''(z)$ は消えないため). よってこれらの点を境界に持つ原領域は, これらの点で境界が 180° から倍の 360° に折れ曲がり, この点の左右の境界線が接するように写像される. その結果として大域的にも像が二重になるところが生ずる. 更に詳しく見るには境界線の像をパラメータ表示された平面曲線として追跡すればよい.



6) の図



7) の図

ここの図は confmap.c を修正したもので描きました. 図を提出した人は全員が Mathematica によるものでした. 比較してみてください. 特に, Mathematica は default で図がきれいに範囲内に収まるように縦横の縮尺を調節してしまうので, 一見等角でない図ができてしまうことがあり, 注意が必要です. (本当は主要な点の座標を書き込むべきですが, 面倒なので略しました.)

問題 **5** 1) この問題は三角不等式

$$|a+b| \le |a| + |b|, \qquad \text{あるいはその変形である} \qquad |a-b| \ge |a| - |b|$$

の簡単な応用問題です. $|z| \ge 2$ の仮定の下で上の三角不等式の二番目のものを 2 度使うことにより

$$|z^5 - z + 2| \ge |z|^5 - |z| - 2 \ge 2^5 - 2 - 2 = 28 > 0 \tag{4}$$

ですから, これは $|z| \ge 2$ で 0 になりません. ここで $|z^5| = |z|^5$ を使いました. なお, この部分を "Rouché の定理" を使って解いていた人がいたが, そんな高級なものは要りません. 第一 Rouché の定理を使うためには $|z| = 2$ の上で (4) と同様の評価をしなければなりませんが, その手間は (4) とほとんど変わりませんね. ^^;)

2) $f(x) = x^5 - x + 2$ を高校生のやり方で追跡すると, 開区間 $(-2, -1)$ で符号が変わり実根が有ること, またそれ以外では符号は変化しないことがわかる. これはみんなできたでしょうから詳細は略します.

3) $f(iy) = iy^5 - iy + 2$ は y が実数のとき決して 0 になりませんね.

4) Fortran プログラムは誰もやってくれなかったようなので, Mathematica の出力結果を下に示します.

```
In[1]:= NIntegrate[2*I*Exp[I*t]*(5*(2*Exp[I*t])^4-1)/((2*Exp[I*t])^5-(2*Exp[I*t])+2),
                   {t,-Pi/2,Pi/2}]
Out[1]= 0. + 15.5748 I
In[2]:= NIntegrate[I*(5*(I*y)^4-1)/((I*y)^5-(I*y)+2),{y,2,-2}]
Out[2]= 0. - 3.00846 I
In[3]:= (%1+%2)/(2*Pi*I)
Out[3]= 2. + 0. I
```

従ってこの半円内に複素根が 2 個存在する. 実根はここには無いことがわかっており, また方程式が実係数なので虚根は共役根とともに存在するので, 結局第一象限にある根は 1 個とわかる.

みんながができないよーと云ってたので調べてみたところ, Mathematica はどうも NIntegrate の計算のとき, 中身の函数に積分変数 t の分点での値を代入してから $D[z,t]$ などの計算をやろうとして挫折するようです. 従って, きたないが上のように被積分函数をべた書きすれば正しい答が得られます. 世間ではこういうのは "バグ" とは云わず "仕様" といっているようです.

なお, `Integrate[]` の方はこの書き方でもやってくれるからと云って, その結果を後から `N[]` で数値化するとほんとに違った答が得られてしまいます. これは `Integrate[]` で得られた答が多価函数なの

で, その値をとると, 期待したのと別の分枝で計算してしまうからです. つまり前回レポートの最後の問題でみんなが犯したのと同じ間違いをする訳ですね. これも “仕様” です ^^;). 前回レポートの講評でも云ったように直接数値積分した方が安全です.

5) Fortran による計算結果は以下の通りです.

答 :$-1.2671683045,\ -0.2609638803 \pm 1.1772261533i,\ 0.8945480326 \pm 0.5341485461i$

これも Mathematica でできないことはない :

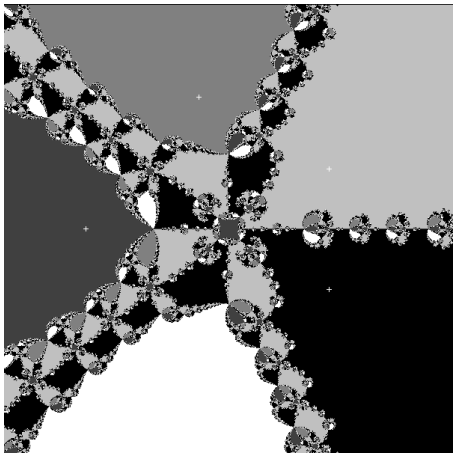
```
In[1]:= f[z_]:=z^5-z+2
In[2]:= z0=1;z1=0;
        While[Abs[z1-z0]>10^(-11),{z1=z0;z0=N[z1-f[z1]/f'[z1],12]};z0
Out[2]= -1.26716830454
```

となり実根が見つかった. 同様に z0=I, および z0=1+I で上を実行すると, それぞれ

```
Out[3]= -0.260963880386 + 1.17722615339 I
Out[4]= 0.894548032658 + 0.534148546175 I
```

が得られるので, 複素根は共役であることに注意すればこれで全部見つかったことになる. 問題の要求は “小数点以下 10 桁まで正しく求めよ” ということなので, 最後は四捨五入せずに切捨てて小数展開の正しい数字を残すこと.

6) 下図参照



問題 6 1) Taylor 展開より

$$f(z(t)) = f(z_0) + f'(z_0)(z(t) - z_0) + O((z(t) - z_0)^2) = f(z_0) + f'(z_0)(z(t) - z_0) + O(h^2)$$

これに $z'(t)$ を掛け, t につき t_0 から t_1 まで積分して

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt &= f(z_0)(z_1 - z_0) + f'(z_0)\int_{t_0}^{t_1}(z(t) - z_0)z'(t)dt + O(h^3)\\ &= f(z_0)(z_1 - z_0) + f'(z_0)\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{(z(t) - z_0)^2}{2}\right\}' dt + O(h^3)\\ &= f(z_0)(z_1 - z_0) + f'(z_0)\left[\frac{(z_1 - z_0)^2}{2}\right] + O(h^3)\end{aligned}$$

同様に

$$f(z(t)) = f(z_1) + f'(z_1)(z(t) - z_1) + O((z(t) - z_1)^2) = f(z_1) + f'(z_1)(z(t) - z_1) + O(h^2)$$

から

$$\int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt = f(z_1)(z_1 - z_0) - f'(z_1)\left[\frac{(z_1 - z_0)^2}{2}\right] + O(h^3)$$

二つの式の平均をとると

$$\int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt = \frac{f(z_0) + f(z_1)}{2}(z_1 - z_0) + \frac{f'(z_0) - f'(z_1)}{4}(z_1 - z_0)^2 + O(h^3)$$

この第 2 項も f が C^2 級なら $O(h^3)$ となる.

2) 1) より

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_0^T f(z(t))z'(t)dt = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(z(t))z'(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{\frac{f(z_{j-1}) + f(z_j)}{2}(z_j - z_{j-1}) + O(h^3)\right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{f(z_{j-1}) + f(z_j)}{2}(z_j - z_{j-1}) + N \times O(h^3) = \sum_{j=1}^N \frac{f(z_{j-1}) + f(z_j)}{2}(z_j - z_{j-1}) + O(h^2)\end{aligned}$$

ただし簡単のため等分割とし, $N = T/h = O(1/h)$ を用いました. 台形公式は普通は等分割で用いるのでこれでいいのですが, 偏った分割にも対応させるには, 上で $O(h^3)$ のところを $O((t_j - t_{j-1})^3)$ と書いておき, $N \times O(h^3) = O(h^2)$ のところを $\sum_{j=1}^N O((t_j - t_{j-1})^3) = O(h^2)\sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1}) = T \times O(h^2) = O(h^2)$ と書かねばなりません. 問題文が悪くて h の定義が途中で変わっており, わかりにくかったと思います. ごめんなさい.

問題 7 講義でやった例が少し複雑になっただけで, やり方は同じです. $\dfrac{1}{z^2(z+1)^2(z^2+1)^2}$ の分母の零点は $z = 0, z = -1, \pm i$ で, いずれも 2 位の極. これらの点での Laurent 展開は漸近解析で求める. まず $z = 0$ では

$$\frac{1}{z^2(z+1)^2(z^2+1)^2} = \frac{1}{z^2}\{1 - z + \cdots\}^2\{1 - z^2 + \cdots\}^2 = \frac{1}{z^2}\{1 - 2z + \cdots\} = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + \cdots$$

同様に $z = -1$ では

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z+1)^2(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z+1)^2\{-1 + (z+1)\}^2\}\{(-1 + (z+1))^2 + 1\}^2} \\ &= \frac{1}{(z+1)^2}\{-1 - (z+1) + \cdots\}^2 \frac{1}{\{2 - 2(z+1) + \cdots\}^2} \\ &= \frac{1}{(z+1)^2}\{1 + 2(z+1) + \cdots\}\frac{1}{4}\{1 + (z+1) + \cdots\}^2 \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}\{1 + 2(z+1) + \cdots\}\{1 + 2(z+1) + \cdots\} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}\{1 + 4(z+1) + \cdots\} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} + \cdots\end{aligned}$$

次に $z = i$ においては

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z+1)^2(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z-i)^2(z-i+i)^2(z-i+i+1)^2(z-i+2i)^2} \\ &= \frac{1}{(z-i)^2}\frac{-1}{\{1 - i(z-i)\}^2}\frac{1}{(1+i)^2\{1 + (z-i)/(1+i)\}^2}\frac{-1}{4}\frac{1}{\{1 - (i/2)(z-i)\}^2} \\ &= \frac{1}{(z-i)^2}\{1 + 2i(z-i) + \cdots\}\frac{1}{2i}\{1 - \frac{z-i}{1+i} + \cdots\}^2\frac{1}{4}\{1 + \frac{i}{2}(z-i) + \cdots\}^2\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(z-i)^2}\{1+2i(z-i)+\cdots\}\frac{1}{2i}\{1-(1-i)(z-i)+\cdots\}\frac{1}{4}\{1+i(z-i)+\cdots\}$$
$$= -\frac{i}{8}\frac{1}{(z-i)^2}\{1+(4i-1)(z-i)+\cdots\} = -\frac{i}{8}\frac{1}{(z-i)^2}+\frac{4+i}{8}\frac{1}{z-i}+\cdots$$

$z=-i$ における展開は上の結果において i を $-i$ に変えれば得られる. 従って

$$\frac{1}{z^2(z+1)^2(z^2+1)^2} = \frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\Big(\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+1}\Big)$$
$$+\Big(-\frac{i}{8}\frac{1}{(z-i)^2}+\frac{4+i}{8}\frac{1}{z-i}\Big)+\Big(\frac{i}{8}\frac{1}{(z+i)^2}+\frac{4-i}{8}\frac{1}{z+i}\Big)$$
$$= \frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\Big(\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+1}\Big)+\frac{z}{4(z^2+1)^2}+\frac{4z-1}{z^2+1}$$

不定積分の計算は実数形に直す前の方が簡単 :

$$\int\frac{1}{z^2(z+1)^2(z^2+1)^2}dz = \int\frac{1}{z^2}dz-\int\frac{2}{z}dz+\int\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}dz+\int\frac{1}{z+1}dz$$
$$-\int\frac{i}{8}\frac{1}{(z-i)^2}dz+\int\frac{4+i}{8}\frac{1}{z-i}dz+\int\frac{i}{8}\frac{1}{(z+i)^2}dz+\int\frac{4-i}{8}\frac{1}{z+i}dz$$
$$= -\frac{1}{z}-2\log z-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\log(z+1)$$
$$+\frac{i}{8}\frac{1}{z-i}+\frac{4+i}{8}\log(z-i)-\frac{i}{8}\frac{1}{z+i}+\frac{4-i}{8}\log(z+i)$$
$$= -\frac{1}{z}-2\log z-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\log(z+1)-\frac{1}{4}\frac{1}{z^2+1}$$
$$+2\mathrm{Re}\Big[\frac{4+i}{8}\Big\{\frac{1}{2}\log(z^2+1)-i\Big(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,z\Big)\Big\}\Big]$$
$$= -\frac{1}{z}-2\log z-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\log(z+1)-\frac{1}{4}\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{2}\log(z^2+1)-\frac{1}{4}\mathrm{Arctan}\,z+C$$

問題文の $f(z)=$ の右辺が z でなく x で書かれていたのはミスプリです. 実際の計算は, x でも z でも変わりません. ここでは z でやりました.

問題 **8**　一週間後にアップロードします.

問題 **9**　1) $|\alpha|<1$ のとき, 一次函数

$$f(z)e^{\kappa i}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \tag{5}$$

は, 単位円を単位円に写す. 実際, $|z|=1$ なら, $z=1/\overline{z}$ であり,

$$\left|e^{\kappa i}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{\overline{z}-\overline{\alpha}}\right| = 1$$

また, α を原点に写すことは明らかなので, この函数は単位円の内部を単位円の内部に写さざるを得ない. これがこのような一次変換を尽くしていることは, 答がわかってしまえば上の写像で α を原点に持っていった後の自由度が, 原点を固定し単位円を動かさないような一次変換だけになり, そのようなものは絶対値 1 の定数による掛け算しか無いという事実に帰着される. このくらいまで書けば結構ですが, 数学科の学生のために厳密な証明を書いておきます.

$w=(az+b)/(cz+d)$ が一次変換の一般形ですが, 約分しても写像は変わらないので, 例えば a で分母分子を割り, 最初から

$$w=\frac{z+a}{bz+c} \tag{6}$$

の形だとしても差し支えない. (もとの $a=0$ だと困るが, $w=b/(cz+d)$ の形の写像は無限遠点が原点に来てしまうので, 決して題意を満たさない.) さて, (6) が $|z|=1$ のとき必ず $|w|=1$ となるとしよう. $|z|=1$ なら $\overline{z}=1/z$ なので,

$$w=\frac{z+a}{bz+c}=\frac{1}{z}\frac{z+a}{b+c\overline{z}}$$

従って $|z+a|=|b+c\overline{z}|$, つまり $z+a$ と $b+c\overline{z}$ は原点を中心とする同一円周上にあるから, $|\lambda|=1$ なるある定数により両者を回転させれば互いに複素共役な位置に来る :

$$\lambda(z+a)=\overline{\lambda(b+c\overline{z})}=\overline{\lambda c}z+\overline{\lambda b}$$

これは z に関する恒等式だから,

$$\overline{\lambda c}=\lambda,\quad \overline{\lambda b}=\lambda a$$

$\mu:=\lambda/\overline{\lambda}=\lambda^2$ も絶対値 1 の定数で, $b=\overline{a\mu}$, $c=\overline{\mu}$. 従って

$$w=\frac{1}{\overline{\mu}}\frac{z+a}{\overline{a}z+1}=\mu\frac{z+a}{\overline{a}z+1}$$

と決定される. 最後に $z=\alpha$ が $w=0$ に写ることから $a=-\alpha$ を代入すれば, 最初に述べた形となる.

2) (5) の $f(z)$ の Taylor 展開は微分しなくても

$$f(z)=e^{\kappa i}(z-\alpha)(1+\overline{\alpha}z+\cdots)=-e^{\kappa i}\alpha+e^{\kappa i}(1-\alpha\overline{\alpha})z+\cdots$$

から分かる. よって

$$|f(0)+f'(0)z|\le|\alpha+(1-|\alpha|^2)|\le 1+|\alpha|-|\alpha|^2=1+A-A^2$$

ここに $A=|\alpha|$ と置いた. $0\le A<1$ の範囲でこの上限を求めれば, $A=1/2$ のとき $5/4$ となることが容易にわかる.

3) Cauchy の積分定理より, $0<\forall r<1$ に対して

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}dz\qquad\therefore\quad |f'(0)|\le\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi r}{r^2}\max_{|z|=r}|f(z)|\le\frac{1}{r}$$

$r<1$ は任意だから結局 $|f'(0)|\le 1$. この問題を "Schwarz の補題" を使って解いていた人がいたけど, そんな高級なものは必要ありません.

4) $f(0)=\alpha$ とするとき,

$$g(z)=\frac{f(z)-\alpha}{1-\overline{\alpha}f(z)}$$

は再び単位円の内部を単位円の内部に写し $g(0)=0$. よって 3) より $|g'(0)|\le 1$. さて, 上を逆に解き, 原点において $g(z)=O(z)$ であることに注意すると,

$$f(z)=\frac{g(z)+\alpha}{1+\overline{\alpha}g(z)}=(g(z)+\alpha)\{1-\overline{\alpha}g(z)+O(z^2)\}=\alpha+(1-|\alpha|^2)g(z)+O(z^2)$$

よって $f'(0)=1-|\alpha|^2$ となるから, 2) でやった計算により

$$|f(0)+f'(0)z|\le|\alpha+(1-|\alpha|^2)|\le\frac{5}{4}$$

実際にこの値を達成する函数は, $g(z)=z$, $\alpha=A=1/2$ として

$$f(z)=\frac{z+1/2}{1+z/2}=\frac{2z+1}{2+z}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\cdots$$

という一次函数でよいことは以上の議論から明らかであろう.