函数論期末試験　—　1999 年 2 月 4 日

学生証番号	氏名	点数

問題 1　次の x, y の二変数函数が, ある領域で $z = x + iy$ の正則函数とみなせるかどうかを指示された方法で判定せよ.

1) $x^2 + y^2 - 2xyi$ (Cauchy-Riemann の方程式を満たすかどうか確かめよ)

2) $\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + i\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ (z と $\overline{z}$ で書き直して見よ)

3) $e^{-x^2-y^2}\{\cos 2xy + i \sin 2xy\}$ (最大値原理を用いよ)

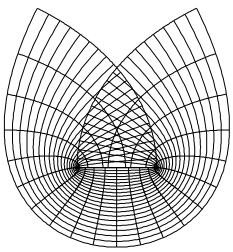
問題 2　次の正則函数による指定された領域の像を下の図の中から選び出せ. 判断の理由も簡単に記せ. ただし, 図に示されている曲線族は, 原領域における極座標, あるいは直角座標に関する等間隔格子のそれぞれの写像による像である.

1) $w = (z-1)/(z+2)$; 円板 $|z| < 1$ _____　　2) $w = (z-1)/(z+2)$; 円板 $|z+1| < 1$ _____

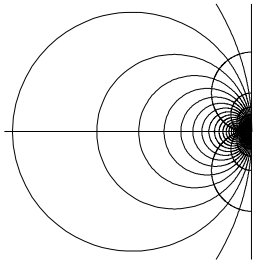
3) $w = (z-1)/(z+2)$; 円板 $|z+1| < 2$ _____　　4) $w = z^2$; 長方形 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ _____

5) $w = z^3 - 3$; 長方形 $|x| \le 2, 0 \le y \le 1$ _____　　6) $w = z^3 - 3z$; 長方形 $|x| \le 2, 0 \le y \le 1$ _____

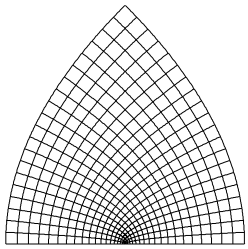
a)



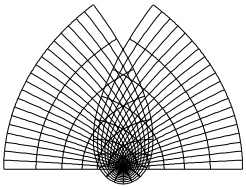
b)



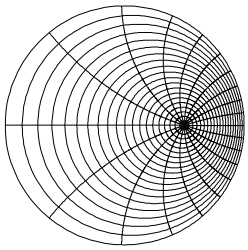
c)



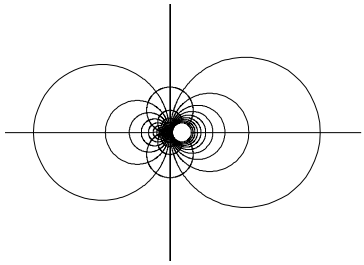
d)



e)



f)



問題 **3**　1) 有理函数 $\dfrac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}$ の極を示し, それぞれにおける Laurent 展開の負冪の部分を計算せよ.

2) 上の結果を利用して不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$ を計算せよ.(計算を簡単にするためやさしくしてあるので, この場合は実の微積分の計算法の方が早いかもしれないが, 複素変数の対数函数の知識を見るための問題であるから, 複素数の $\log$ を使って積分し, 後で実数の表現に変換せよ.)

問題 **4**　定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ の値を留数を用いて計算せよ.

問題 **5**　正則函数 $f(z)$ が $f'(z)=0$ を恒等的に満たせば $f(z)$ は定数となることを, 下の余白に入る程度の詳しさで証明, または説明せよ.