函数論期末試験 ·解答と講評 — 1999 年 2 月

問題 1 Cauchy-Riemann を覚え間違えた人は論外だが, それぞれの問題は問題文に書かれたような知識を問うのが目的なので, 指示された以外の方法で正しく答えても点はあげられない.

1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xyi$ は

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = f_x + if_y = (2x - 2yi) + i(2y - 2xi) = 4x$$

なので正則でない. (左辺は厳密には Cauchy-Riemann 作用素の 2 倍だが, $= 0$ をつけた方程式にしてしまえば同じことである.) なお, $x = 0$ だけで正則という答え方は誤りである. 他の判定法でもそのような結論は出せない. 函数が正則な集合は普通の定義に従えば開集合であることに注意. この問題の場合は実の連立の形の方が

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

だけで判定できるので, 簡単ですね. Cauchy-Riemann の符号を間違えてしまった人がかなり居たが, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ が正則なことに注意し, これが方程式を満たすように符号を合わせればよい. こんな記憶法, 大学生になったら先生に云われなくても工夫しな !

2) $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, $|z|^2 = z\overline{z}$, $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, $\overline{z}^2 = (x^2 - y^2) - 2xyi$ くらいは覚えておいても損はないくらいに良く出て来るものである. これを使うと

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = i\frac{x^2-y^2-2xyi}{|z|^4} = i\frac{\overline{z}^2}{|z|^4} = i\frac{\overline{z}^2}{z^2\overline{z}^2} = \frac{i}{z^2}$$

と z だけで表されるので, 分母が消える $z = 0$ を除き正則である. “$z = 0$ で分母が消えるので正則函数ではない” という答は問題文を良く読んだとは云えない.

3) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\{\cos 2xy + i\sin 2xy\}$ は $|f(x,y)| = e^{-(x^2+y^2)} \leq 1$ を満たし, かつこの絶対値は原点で最大値に到達するので, 最大値原理により原点を含む領域では正則函数となり得ない. 原点を含まない領域で正則となるかもしれないという心配をする人もあろうが, この函数は 2 変数 x, y の函数としては解析函数となる (即ち x, y の収束冪級数に書ける) ので, そういう中途半端なことは絶対に起こらない. (例えば, Cauchy-Riemann 方程式を当てはめたものが, ある領域で消えていたとすると, 一致の定理と同様のこと (一変数ずつ適用できる) が成立ち, それは到る所で成立してしまう.)

問題 2 正解は, 順に e, b, f, c, d, a である. 理由を書かせたのは気の毒な勘違いを救うためであったが, 正しい理由を書けた人は間違わない (当り前か ^^;) ので, あまり意味が無かったようです. 理由が無くても正解なら満点をあげましたが, 参考までに簡単に説明すれば, 1) は一次函数による円板の像なので円板. 2) もそうだが, 周上の点 $z = -2$ が無限遠に写るので, 像は半平面となる. 3) は更にそれより広い円板の像なので, 無限遠点が像の内点に取り込まれてしまい, 像領域は元の境界の円の像である円の外側となる. 4) は $z = 0$ で等角性がくずれて直角が平角に写り, その他の頂点は直角のままなので, 像は曲線弧で囲まれた三角形状の領域となる. 5), 6) はレポートに書いた通り. (1), 2) もレポートに有ったが, 3) の説明のために再録した.)

問題 3 1) 有理函数 $\dfrac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}$ の極は $z = -1$ が 2 位, $z = \pm i$ が 1 位である. 前者における Laurent 展開の負冪の部分は正直に漸近計算をして

$$= \frac{1}{(z+1)^2}\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+1)^2}\frac{1}{(z+1-1)^2+1} = \frac{1}{(z+1)^2}\frac{1}{2-2(z+1)+(z+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^2}\{1+(z+1)+\cdots\} = \frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} + \cdots$$

これは一応ちょっといやな計算だが, これくらいできなきゃね !次の $z = i$ は 1 位の極なので $1/(z-i)$ の係数を求めるだけでよい.

$$= \frac{1}{z-i}\frac{1}{(z+1)^2(z+i)} = \frac{1}{z-i}\Big[\frac{1}{(z+1)^2(z+i)}\Big]_{z=i} + \cdots = \frac{1}{z-i}\frac{1}{(i+1)^2 2i} + \cdots$$
$$= \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i\cdot 2i} + \cdots = -\frac{1}{4}\frac{1}{z-i} + \cdots$$

$z=-i$ での展開はこの i を $-i$ に変えた $-\frac{1}{4}\frac{1}{z+i}+\cdots$ でよい.

2) 上の結果を不定積分すれば

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx &= \int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+i}-\frac{1}{4}\frac{1}{x-i}\right)dx\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{4}\log(x+i)-\frac{1}{4}\log(x-i)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{4}\log(x^2+1)\end{aligned}$$

ちょっと引っかけで Arctan が出てこなかったので悩んだ人が居たようですが, この通りひどく易しい問題です. そんなに易しいはずがないという先入観を持った人が多かったようで, わざわざ z^2+1 を $(z^2+1)^2$ にしてしまって計算した人もかなり居ました. 実は, ひっかけのつもりで無く, 最初は $(z+1)^2$ も $z+1$ にしていたので, ちゃんと Arctan が必要だったのですが, それでは 1 位の極ばかりで漸近展開の練習にならないと思い, 最後に出来心で出題のように変えたところ, log だけになってしまったという訳でした. しかし, 極が 1 位のときは簡単に計算できることをほとんどの人が利用していなかったので, もとのままの方が良かったのかもしれません.

解答欄のスペースは正しい答え方をすればちょうど足りるように取られていることをお忘れなく！

問題 4 留数計算は必ず出すと予告したのに, あまりできていませんでした. この問題はポイントが 3 箇所あります. 1) 対称性を利用して $\int_{-\infty}^{\infty}$ に直せるか ?2) $\cos z=\mathrm{Re}\,e^{iz}$ と変形できるか ?3) 留数をきちんと $z=i$ だけとらえられるか ?

1) はもとのままの 0 を起点とする積分のままでは, 積分路変形が利きません. 2) は $\cos z$ のままでは積分路を上にずらしても下にずらしても指数的に増大するので, ずらした積分が 0 に収束してくれません. ここは大切な点ですからよく味わって下さい. 3) は上にずらすときに引っかかる極は $z=i$ だけです. 下にずらせば逆に $z=-i$ だけが引っかかるが, その場合は $\cos z=\mathrm{Re}\,e^{-iz}$ と解釈しておかねばならない (何故か ?) 計算自身は講義でやったものなのでここでは省略します.

問題 5 これはあまり A の数が多すぎてもと思って最後に追加した, 言わばおまけの問題ですが, 何故か 4 番までの問題がちゃんとできて居ない人に限って正しく答えていたようで, さぼった人の救済のようになってしまいました. 正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が $f'(z)=0$ を恒等的に満たせば, この方程式と Cauchy-Riemann 方程式を合わせて, 実部・虚部がそれぞれ $u_x=u_y=0$, $v_x=v_y=0$ を恒等的に満たすことが示せるので, 微積の知識により (u,v に対しては平均値定理が使える) u,v が定数となる. 従って $f(z)$ も定数となる. 別解としては, $f(z)$ の Taylor 展開を項別微分したものが $f'(z)$ の Taylor 展開となることが分かっているので, これから f の Taylor 展開の定数項以外の係数がすべて 0 となることが云える.

$f(z)$ に直接平均値の定理を使ってはいけません! あたかも f が実数値函数のように論じていた人は論外です.

第 3 回レポートの講評として書き忘れたのですが, 数学科の人の中に $|z+1|<1\Rightarrow -1<z+1<1\Rightarrow |z|<2$ という変形をしていた人が少なからずいました. 複素数に対しては (四則演算と両立するような) 大小関係は存在しません. $i>0$ と仮定しても $i<0$ と仮定しても矛盾が出るということを高校で習いませんでしたか ?上の不等式は

$$|z+1|<1\Rightarrow |z|-1\le|z+1|<1\Rightarrow |z|<2$$

と, 三角不等式で正しく導けます. ただしこれは必要条件を導いただけなので, もとの領域を完全に記述するものではありません.

まだまだ云い足りないことが沢山ありそうですが, 特に数学を一生やろうという人は, 函数論は常識のようなものですから, 是非買った教科書を自分で読み終えてください！

なお, 試験はそのうち第三回のレポートと一緒に返却しますが, 試験の採点は 130 点満点 (苦労の名残りです) の点数が書かれています. 最終成績は結局, 次の公式で計算しました：

$$\sum_{j=1}^{3}\text{第 } j \text{ 回レポートの点数}+\text{出席点}+\text{試験の点数}\times\frac{100}{130}$$

出席点は一回につき 1 点で, 皆勤賞は少し (ほんの気持程度) ボーナスが上積みされています.