函数論講義メモ No.2

金子　晃

【複素数値 2 変数函数に対する微積分】

$$z = x + iy, \overline{z} = x - iy \quad \text{より} \quad x = \frac{z+\overline{z}}{2}, y = \frac{z-\overline{z}}{2i} \tag{1}$$

複素変数 z の複素数値函数 $F(z) \Leftrightarrow x, y$ の 2 変数函数 $f(x,y) + ig(x,y)$

微分・積分の演算は線型：実部・虚部それぞれに作用

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) + ig(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

積分の方は重積分が自然：

$$\iint_D (f(x,y) + ig(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + i\iint_D g(x,y)dxdy$$

平面内の曲線に沿う微積分：$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $0 \le t \le T$ を平面曲線 C のパラメータ表示とするとき

$$\text{曲線に沿う微分} \qquad \frac{d}{dt}F(\varphi(t),\psi(t)) = F_x\frac{d\varphi}{dt} + F_y\frac{d\psi}{dt}$$

特に $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, a, b 単位ベクトルのとき

$$\text{方向微分} \qquad \frac{d}{dt}F(\varphi(t),\psi(t)) = aF_x + bF_y$$

偏微分 $\Leftrightarrow$ x-軸, y-軸に沿う方向微分

$Fdx + Gdy$ を 1 次微分形式として

$$\text{曲線に沿う線積分} \qquad \int_C Fdx + Gdy = \int_0^T \{F(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + G(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\}\,dt$$

パラメータの取り換えで値は不変. 曲線の向きを変えると符号が変わる. 特に, $C : y = f(x)$, $a \le x \le b$, あるいは $C : x = g(y)$, $a \le y \le b$ のとき、それぞれ

$$\int_C ydx = \int_a^b f(x)dx, \qquad \int_C xdy = \int_a^b g(y)dy$$

複素微分形式

$$dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy$$

で表すこともできる: $F = f + ig$ なら,

$$\begin{aligned}\int_C Fdz &= \int_C (f+ig)(dx+idy) = \int_C \{(fdx - gdy) + i(gdx + fdy)\},\\ \int_C Fd\overline{z} &= \int_C (f+ig)(dx-idy) = \int_C \{(fdx + gdy) + i(gdx - fdy)\}\end{aligned}$$

C が閉曲線のときは線積分に $\oint$ の記号を使うのが慣例.

例 原点を中心とする半径 R の円周に正の向きをつけたもののパラメータ表示を普通に $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$, あるいはまとめて $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ として

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta}d\theta}{R^n e^{ni\theta}} = iR^{1-n}\int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}d\theta = iR^{1-n}\Big[\frac{e^{(1-n)i\theta}}{1-n}\Big]_0^{2\pi} = 0 \quad (n \ne 1)$$

$n=1$ のときだけ特別で,

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i$$

線積分の根源的定義 (数値積分でも使える) : $C : z = \Phi(t), 0 \le t \le T$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, をパラメータの分割として, $z_j = \Phi(t_j)$ と置くとき

$$\int_C F dz = \lim \sum_{j=1}^{N} F(z_j)(z_j - z_{j-1})$$

極限は分割を細かくする操作に対するもの.

これは, $\Phi = \varphi + i\psi$ のとき

$$\begin{aligned} z_j - z_{j-1} &= \Phi(t_j) - \Phi(t_{j-1}) = (\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})) + i(\psi(t_j) - \psi(t_{j-1})) \\ &\div \varphi'(t_j)(t_j - t_{j-1}) + i\psi'(t_j)(t_j - t_{j-1}) \end{aligned}$$

よりわかる. (代表点の取り方はいろいろ.)

問題 C を単位円周に正の向きを与えたものとするとき，次の線積分を定義に従って計算せよ．
1) $\oint_C \frac{1}{z^n} dz$ 2) $\oint_C \frac{1}{\overline{z}^n} dz$
これでおしまいなら函数論は不要．

【正則函数】 e^z は複素 1 変数 z の函数だから有り難い．すべての複素函数はそうではない．どこが違うかは多項式で見ると明らか：2 変数の勝手な多項式 $F(x,y)$ は z で表そうとすると $\overline{z}$ も必要になる．例：

$$x^2 + y^2 = z\overline{z}, \quad \text{しかし} \quad x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$$

実 1 変数の多項式を複素化したものはもちろん z だけで書ける．

$F(z)$ が $\overline{z}$ を含まない $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \overline{z}} F = 0$.

(1) より形式的に

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0$ を Cauchy-Riemann の条件あるいは Cauchy-Riemann の偏微分方程式という．

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0$$

より，実で表した条件は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

という実部・虚部に対する連立偏微分方程式となる．こちらの表現の方が元.

問題 $\log z = \log \sqrt{x^2+y^2} + i\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x}$ が Cauchy-Riemann の偏微分方程式を満たすことを確かめよ．同じ計算を Mathematica にやらせてみよ.

```
F=Log[Sqrt[x^2+y^2]]+I* ArcTan[y/x]
G=D[F,x]+I*D[F,y]
Simplify[G]
```

Mathematica は 6 階の演習室では, ターミナルウインドウ dtterm から math という指令で起動するので, その後で上を (改行もそのままに) 打ち込んでみよ．1 行毎に何かレスポンスがあるはずである．ちなみに Mathematica の終了指令は Exit である．