函数論講義メモ No.5

金子　晃

【Taylor 展開の系】

零点の孤立性 :正則函数の零点は孤立する. i.e. もし $f(a)=0$ なら, $\exists\varepsilon>0$ such that $0<|z-a|<\epsilon$ で $f(z)\neq 0$.

何者, $z=a$ が重複度 m の零点なら,

$$f(z)=a_m(z-a)^m+a_{m+1}z^{m+1}+\cdots=a_m(z-a)^m\Big\{1+\frac{a_{m+1}}{a_m}(z-a)+\cdots\Big\}$$

において, ε が十分小さければ, 右辺の第二因子 $\neq 0$.

一致の定理 :正則函数が領域内の点に収束するような点列の上で 0 になれば, 領域全体で 0 となる.

【解析接続】　一致の定理により, 正則函数は定義域が増やせるとき, 函数の延長の仕方が一意に定まる. この延長操作を解析接続と呼ぶ.

解析接続の方法

1) 冪級数による方法 (Weierstrass) Taylor 展開が収束するところまでは解析接続できる. 展開の中心を収束円の境界付近に取り直すことにより少しずつ延ばしてゆく.

2) 函数等式による方法　例 :ガンマ函数

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

は $\Re s>0$ で広義一様に絶対収束し, 正則函数を定める. 函数等式

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$$

が成り立つことが部分積分で容易に確かめられる. よって

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

により $\Re s>-1, s\neq 0$ まで定義が拡張できる. これを繰り返すと $s=0,-1,-2,\ldots$ を除き全複素平面に解析接続される.

問題 $1/\Gamma(s)$ は $s=0,-1,-2,\ldots$ も込めて全複素平面で正則となり, $s=0,-1,-2,\ldots$ は一位の零点となることを示せ.

3) Cousin 積分による方法　$f(z)$ が実軸上の線分 $[a,b]$ の近傍で正則函数なら, 積分

$$\int_a^b\frac{f(t)}{t-z}dt$$

で定義された函数は, Cauchy の積分定理による積分路変形で, $]a,b[$ を越えて解析接続される. どこまで解析接続できるかは $f(z)$ が正則な範囲に依存する.

【特異点】　正則函数がどうしても解析接続されない点を特異点と呼ぶ.

孤立特異点　一点の周りでは一価正則で, その点には解析接続されないとき, この点を孤立特異点と呼ぶ. 以下この点を原点とする.

極　$\exists n\in\boldsymbol{N}$ such that $z^nf(z)$ は原点まで解析接続できるとき, $f(0)\neq 0$ なら原点は n 位の極と呼ばれる. つまり, $f(z)$ の値は $z\to 0$ のとき $O(z^{-n})$ 程度で無限大に発散すること.

真性特異点　極でないもの. このとき高々一つの除外値 α が存在して, $f(z)$ は $\forall\varepsilon > 0$ に対して $0 < |z| < \varepsilon$ で α を除くすべての値を必ず (従って無限回) 取る (Picard の定理; α を Picard の除外値という).

これ以外の場合は有り得ない. すなわち次が成り立つ :

Riemann の除去可能特異点定理　$f(z)$ が原点の近傍において原点を除き正則で, かつ原点において値が有界なら, $f(z)$ は実は原点でも正則となる.

実際, $g(z) = z^2 f(z)$ は原点も込めて C^1 級の 2 変数函数となるから, Cauchy-Riemann 作用素が意味をもち, 作用の結果は原点以外で 0 の連続函数となり, 従って原点でも 0 となる. $f(z) = g(z)/z^2$ は仮定により原点で値が有界だから, $g(z)$ の Taylor 展開は 2 次の項から始まる.

多価性

単連結でない領域では, 解析接続は一般に多価となる. 孤立点の周りで多価正則のとき, この点は分岐点と呼ばれる. 分岐点の周りを有限回まわると元の値に戻るとき, この分岐点は有限多価と呼ばれ, そうでないとき無限多価あるいは対数分岐と呼ばれる. 元に戻る最少の回数 p を分岐点の分岐次数と呼ぶ. 特に, $\exists n \text{ such that } z^n f(z)$ の値が p 次の分岐点 $z = 0$ の近傍で有界なとき, $g(z) = f(z^p)$ は原点に高々極を持つ一価函数となる. この場合を代数的特異点と呼ぶ.

例 : $\sqrt{z}$ に対する $z = 0$ (二価, 代数的分岐). $\log z$ に対する $z = 0$ (無限多価).

z の多項式を係数とする代数方程式

$$w^n + a_1(z)w^{n-1} + a_2(z)w^{n-2} + \cdots + a_n(z) = 0$$

は多価函数を定める. これを代数函数と呼ぶ. これは判別式の零点で代数的分岐する.

例 :楕円函数

$$w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$$

右辺の 3 次式の零点 α, β, γ で分岐する.

Laurent 展開　$f(z)$ が円環 $r < |z| < R$ で一価正則なら, $f(z)$ はここで正冪と負冪を持つ z の級数, いわゆる Laurent 級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

に展開される. 特に $r = 0$, すなわち, 円板から一点だけを抜いた領域のとき, $f(z)$ が原点で高々極を持つための必要十分条件は, Laurent 展開の負冪の部分が有限項で切れること.

有理函数の不定積分への応用 :分子の次数が分母の次数よりも小さいような有理函数の部分分数分解は分母が 0 となる点での Laurent 展開の負冪の部分を集めたもの.

例 : $\dfrac{1}{z^2(z^2+1)^2}$ の分母の零点は $z = 0, \pm i$, これらの点での Laurent 展開は漸近解析で

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(z^2+1)^2} &= \frac{1}{z^2}\{1 - z^2 + \cdots\} = \frac{1}{z^2} + \cdots, \\
\frac{1}{z^2(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z \mp i)^2}\frac{1}{z^2}\frac{1}{(z \pm i)^2} = \frac{1}{(z \mp i)^2}\frac{1}{(z \mp i \pm i)^2}\frac{1}{(z \mp i \pm 2i)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z \mp i)^2}\frac{1}{\{1 \mp i(z \mp i)\}^2}\frac{1}{\{1 \mp i(z \mp i)/2\}^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z \mp i)^2}\{1 \pm 2i(z \mp i) + \cdots\}\{1 \pm i(z \mp i) + \cdots\} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z \mp i)^2}\{1 \pm 3i(z \mp i) + \cdots\} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z \mp i)^2} \pm \frac{3}{4}\frac{i}{z \mp i} + \cdots
\end{aligned}$$

従って

$$\frac{1}{z^2(z^2+1)^2} = \frac{1}{z^2} + \Big(\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2} + \frac{3}{4}\frac{i}{z-i}\Big) + \Big(\frac{1}{4}\frac{1}{(z+i)^2} - \frac{3}{4}\frac{i}{z+i}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z^2+1)^2} - \frac{1}{z^2+1}
\end{aligned}
$$

不定積分の計算は実数形に直す前の方が簡単 ：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{z^2(z^2+1)^2}dz &= \int \frac{1}{z^2}dz + \int \Big(\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2} + \int \frac{3}{4}\frac{i}{z-i}\Big)dz + \int \Big(\frac{1}{4}\frac{1}{(z+i)^2} - \frac{3}{4}\frac{i}{z+i}\Big)dz \\
&= -\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-i} + \frac{3i}{4}\log(z-i) - \frac{1}{4}\frac{1}{z+i} - \frac{3i}{4}\log(z+i) \\
&= -\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} + \frac{3i}{4}\log\frac{z-i}{z+i} \\
&= -\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} - \frac{3}{2}\mathrm{Arctan}\, z + C
\end{aligned}
$$

Puiseux 展開　Laurent 展開の独立変数 z に $z^{1/p}$ を代入したもの. $f(z)$ が $z=0$ で p 次の代数的分岐をするときは,

$$f(z^p) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n z^n$$

従って

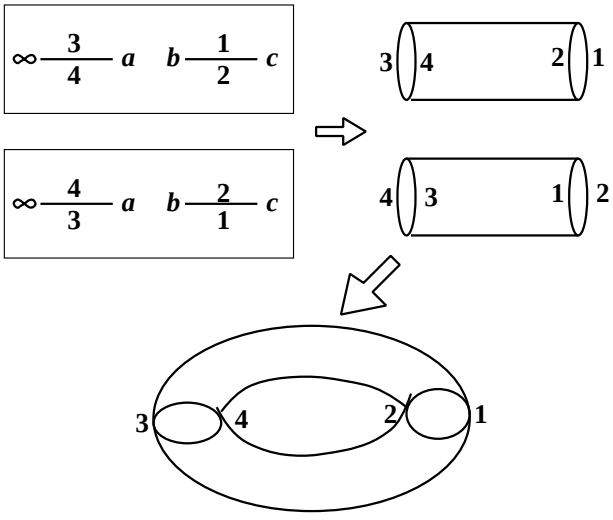
$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n z^{n/p}$$

と書ける.

Riemann 面　多価函数を一価にするため, 分岐の枚数だけ別のシートを用意して貼り合わせたもの. 1 次元複素多様体.

例 **1** :Riemann 球面. 複素平面に無限遠点を追加したもの. 球面と同相. $z=\infty$ の近傍は, $w=1/z$ なる変換で $w=0$ の近傍に持って来れば普通に考察できる. w を無限遠点における局所座標という. 有理函数は Riemann 球面からそれ自身への正則写像とみなせる. より一般に, ある領域で特異点として極しか持たない函数は, その領域から Riemann 球面への正則写像とみなせる (極は恐くない). これを有理型函数 (meromorphic function) と呼ぶ.

例 **2** :楕円曲線. $w^2=(z-a)(z-b)(z-c)$ で定まる代数函数 w を一意化するもの.



問題　函数 $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ および, $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$ のそれぞれについて, 一意化する Riemann 面を上図の方法で構成し, 何になるか説明せよ.