函数論レポート No.2 — 解答と講評

問題 1　解答　1) ヒントにあるように

$$z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

と因数分解して, $z^5 = 1$ のすべての根を求め, その中から $e^{2\pi i/5}$ を表すものを見出す. 第二因子は相反方程式だから,

$$0 = \frac{1}{z^2}(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = w^2 + w - 1$$

となる. ここに $w = z + \dfrac{1}{z}$. よってまず $w = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 従って $z^2 - wz + 1 = 0$ より

$$z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2} = \frac{w \pm \sqrt{-w - 3}}{2} = \frac{w}{2} \pm \frac{\sqrt{w+3}\,i}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \pm \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4} i$$

$\sqrt{5}$ に付いている複号は同順なので, 複号の組合わせは全部で 4 通り有り, それらすべてで $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ の解を与える. $e^{2\pi i/5}$ は実部・虚部がともに正のものとしてただ一つに定まる：

$$e^{2\pi i/5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i$$

ちなみに他の 3 個は

$$e^{4\pi i/5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i, \quad e^{6\pi i/5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i, \quad e^{8\pi i/5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} - \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i$$

2) $2\pi i/5 = 72°$ だから, Euler の等式より

$$e^{2\pi i/5} = \cos 72° + i \sin 72°$$

従って

$$\cos 72° = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \qquad \sin 72° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

3) 下図の通り：

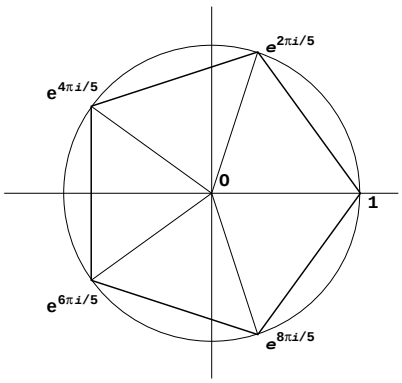

図 1

講評　この問題は殆んどの人ができていました. やり方も同じです. なお, 上で求めた値が有理数と平方根の組み合わせだけで表されていることから, $72°$ の角, 従って正五角形が定規とコンパスだけで作図できることが従う. (円と直線の交点として次々に平方根を作れるので. これに対し $\sqrt[3]{2}$ などは作図でき

ない.) Gauss は 18 歳のときに上と同様の方法で $z^{17}-1=0$ の根が平方根だけで表されることを見出し, 正 17 角形の作図法を発見して数学の研究者になる決心をしたのでした. 君たちも自分で挑戦してごらんなさい.

ちなみに上の値は複素数を使わないで初等幾何学的な計算でも出せます. 下図は今年の情報科学科推薦入試の口頭試問で出題されました. みなさんは出来ますか ?

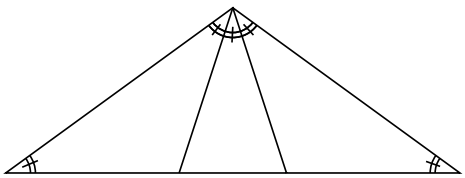

図 2

問題 2 解答 $\dfrac{1}{z}$ の方は $z\neq 0$ で微分可能で

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z}=-\frac{1}{z^2}$$

微分の計算は実数の場合と同じ公式になる. もちろん

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{2}\frac{-1}{(x+iy)^2}-\frac{i}{2}\frac{-i}{(x+iy)^2}=-\frac{1}{(x+iy)^2}$$

で計算してもよい. 同様に

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{1}{z}=0$$

次に, $e^{x^2+y^2}=e^{z\overline{z}}$ なので

$$\frac{\partial}{\partial z}e^{z\overline{z}}=\overline{z}e^{z\overline{z}},\qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}e^{z\overline{z}}=ze^{z\overline{z}}$$

これじゃずるいという人は正直に計算して

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)e^{x^2+y^2}=\frac{2x}{2}e^{x^2+y^2}-\frac{2iy}{2}e^{x^2+y^2}=(x-iy)e^{x^2+y^2}$$

二つ目も同様. 実は $e^{x^2+y^2}$ が実数値函数なので, 一つ目の答の複素共役をとったものが二つ目の答になっている.

講評 この問題も殆んど正解でした. やり方によって結果の表現が少し変わるが, 最終結果はなるべく見易い形に変形しましょう. (それによってより良い方法に気づくことも有ります.)

問題 3 解答 与えられた曲線弧は, それぞれ次のようにパラメータ付けられた三つの部分に分られる :

$$C_1^{(1)}: z=t-i,\ \ 0\le t\le 1,\quad C_1^{(2)}: z=1+it,\ \ -1\le t\le 1,\quad C_1^{(3)}: z=1-t+i,\ \ 0\le t\le 1$$
$$C_2^{(1)}: z=-t-i,\ \ 0\le t\le 1,\ C_2^{(2)}: z=-1+it,\ \ -1\le t\le 1,\ C_2^{(3)}: z=-1+t+i,\ \ 0\le t\le 1$$

よって線積分の定義により 1) は

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\frac{1}{z}dz&=\int_0^1\frac{1}{t-i}dt+\int_{-1}^1\frac{1}{1+it}idt+\int_0^1\frac{1}{1-t+i}(-dt)\\&=\int_0^1\frac{t+i}{t^2+1}dt+\int_{-1}^1\frac{t+i}{t^2+1}dt-\int_0^1\frac{1-t-i}{(1-t)^2+1}dt\\&=i\left(\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt+\int_{-1}^1\frac{1}{t^2+1}dt+\int_0^1\frac{1}{(1-t)^2+1}dt\right)\\&=4i\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt=4i\times\frac{\pi}{4}=\pi i.\end{aligned}$$

と計算出来る. ここで $C_1^{(3)}$ 上の積分は $1-t \mapsto t$ と変数変換して, 前二つのものと合わせた. 実部の方は計算しなくても打ち消していることが対称性等から分かることに注意.

同様の計算で 2) は

$$\int_{C_2} \frac{1}{z} dz = -\pi i$$

これらの差を取ると

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z} dz = \oint_{C_1 - C_2} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

で検算できる. 積分値は両端の点にしか依存しない (ただし原点を越えて積分路変形はできない) ことに注意すれば, 上の値は C_1, C_2 をそれぞれ単位半円周 $z = e^{i\theta}$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, および $z = -e^{i\theta}$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ で置き換えても変わらないことが Cauchy の積分定理から分かり, 値だけを知るのならその方が計算は簡単.

3) 上に示したパラメータを用いて

$$\begin{aligned}\int_{C_1} z d\overline{z} &= \int_0^1 (t-i)dt + \int_{-1}^1 (1+it)(-i)dt + \int_0^1 (1-t+i)(-dt) \\ &= -i\int_0^1 dt - i\int_{-1}^1 dt - i\int_0^1 dt = -4i\end{aligned}$$

ここでも実部が消えることは計算しなくても分かる. 4) の方も同様に

$$\int_{C_2} z d\overline{z} = 4i$$

これは Green の公式を用いて

$$\begin{aligned}\int_{C_1} z d\overline{z} - \int_{C_2} z d\overline{z} &= \oint_{C_1 - C_2} z d\overline{z} = \iint_D d(z d\overline{z}) \\ &= \iint_D dz \wedge d\overline{z} = (-2i) \iint_D dx dy = (-2i) \times 4 = -8i.\end{aligned}$$

と検算できる. ここに D は C_1 と C_2 で囲まれた正方形で, 最後の 4 はその面積の値.

5) 同様に線積分の定義により

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{1}{z^2} dz &= \int_0^1 \frac{1}{(t-i)^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+it)^2} i dt + \int_0^1 \frac{1}{(1-t+i)^2} (-dt) \\ &= \int_0^1 \frac{(t+i)^2}{(t^2+1)^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{i(1-it)^2}{(t^2+1)^2} dt - \int_0^1 \frac{(1-t-i)^2}{\{(1-t)^2+1\}^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^2-1+2it}{(t^2+1)^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{2t+(1-t^2)i}{(t^2+1)^2} dt - \int_0^1 \frac{(1-t)^2-1-2i(1-t)}{\{(1-t)^2+1\}^2} dt \\ &= i\left(2\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} dt\right) \\ &= i\left(2\Big[-\frac{1}{t^2+1}\Big]_0^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+1} dt + 2\int_{-1}^1 \frac{1}{(t^2+1)^2} dt\right) \\ &= 2i \times \Big\{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\Big(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\Big)\Big\} = 2i.\end{aligned}$$

実部が消えること, および最後のものにまとめられる理由は 1) の計算と同じ. 最後の実の定積分の値は微積でやった部分積分を用いて $\int \frac{1}{t^2+1} dt$ に帰着させる方法で計算できる :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \Big[\frac{t}{t^2+1}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^2}{(t^2+1)^2} dt = \Big[\frac{t}{t^2+1}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt - 2\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2} dt \\ &\therefore \quad \int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{t}{t^2+1}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

この問題では函数 $\frac{1}{z^2}$ の原始函数が $-\frac{1}{z}$ であることを用いると

$$\int_{C_1} \frac{1}{z^2} dz = \Big[-\frac{1}{z} \Big]_{-i}^{i} = -\frac{1}{i} + \frac{1}{-i} = 2i.$$

全く同様に

$$\int_{C_2} \frac{1}{z^2} dz = 2i$$

これは

$$\int_{C_1} \frac{1}{z^2} dz - \int_{C_2} \frac{1}{z^2} dz = \oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$$

を, 講義の中で $C =$ 単位円周として計算したことを思い出せば納得できる. この問題では正則函数としての原始函数が一価になったので, 原点のどちら側を回っても積分の値は同じになる.

$1)$ と $2)$, $3)$ と $4)$, が一致しない理由, および $5)$ と $6)$ が一致する理由は以上の説明 (検算の仕方に関連して述べたもの) から明らかであろう.

講評　本問は Green の公式や Cauchy の積分定理が分かっているかどうかだけではなく, 線積分の定義による計算練習もしてもらうためのものでした. $1), 2)$ についても, 線積分の定義でやるよりも原始函数の $\log z$ を使った方が計算は簡単ですが, $5), 6)$ と違い, $\log$ は多価なので, 分枝の取り方に注意しないと間違った結論を出してしまいます. これは実の定積分でも $\arctan$ のような多価函数を用いたときは同様で, 積分変数の両端の値での主値を機械的に取るのではなく, 積分変数が積分区間を動くときに値が連続的に繋がっているように分枝を選ぶ必要があります. この場合は

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} = \Big[\log z \Big]_{-i}^{i} = \log i - \log(-i)$$

において, $\log i = \frac{\pi}{2} i$ は良いとして, $\log(-i) = -\frac{\pi}{2} i$ ととらねばなりません. この取り方で, z が C_1 の上を $-i$ から i まで動いてゆくときに $\log z$ が $-\frac{\pi}{2} i$ から $\frac{\pi}{2} i$ まで連続的に変化することを確かめてください. 全く同じ理由で, $\int_{C_1} \frac{1}{z}$ を計算するときは $\log i = \frac{\pi}{2} i$ と取るのなら $\log(-i) = \frac{3\pi}{2} i$ でなければなりません.

情報科学科の学生で $1), 2)$ の計算に $1/(t+i)$ の不定積分を $\log|t+i|$ のように絶対値を入れてしまった人が沢山いましたが, これは高校で習ったことを機械的に適用してしまった誤りで, もし $\log$ を使うなら絶対値を付けてはいけません. もし絶対値を付けたら結果はいつでも実数になってしまい, 明らかにおかしいでしょ ?この間違いをした人は, $1), 2)$ が等しい値になってしまい, その理由付けとして "$1/z$ が正則だから" と書いていましたが, $z = 0$ で正則でなく値は実際に異なります. 正しくは上に解説した通りです. しっかり復習しておいてください.

なお, 問題の式で $\int$ が $\oint$ になっていたのは単なるミスプリです. 問題の線積分は一周積分ではありません. (別に大場先生に対抗したわけではありません (^^;). 気づいた (指摘された) のがレポート提出締め切りの直前だったので, 訂正のお知らせは流しませんでした. ごめんなさい. m(__)m

総評　5 点満点で採点が記入されていますが, レポートなので点数自身にはあまり意味はありません (他人のを写してもわからないから). 問題 3 の $3), 4)$ で数学科の学生の殆んどが "z は正則なので $\oint_{C_1 - C_2} z dz = 0$ となる" という, この際全く必要がない事実を書いていたのが気になりました. 出典は誰だ ?まさか, 自分で解いたのは 3 人だけだったなんてことが無いことを祈る !