函数論レポート No.3

提出期限 ：1999 年 1 月 28 日 (金) 午後 6 時
提出場所 ：研究室 (理 III-301) 前のレポートボックス

注意 1) 一年生のレポート提出と重なりますので, 箱を間違えないように (今回は北きつねは一年生用になります).

2) 試験勉強のつもりで頑張ってください. 1 月 31 日 (月) までに解答をホームページに載せるように努力します. まだ講義で説明が終わっていない問題もありますが, できるものから始めてください.

3) ⊙· の意味は 1 年生のときと同じです. ◦◜ の方 (やや骨の有る問題) については, 情 が情報科学科の人向け, 数 が数学科の人向けの ◦◜ マークのつもりですが, 逆に解いてもよい. もちろん, 両方解けばなお良い. Mathematica と C の見本プログラムの使い方の説明は 1 月の計算機の補講で行う予定です.

問題 **1** ⊙· D を正方形 $\{(x,y);\, -1 \le x \le 1,\, -1 \le y \le 1\}$ とし, ∂D をその周に正の向きを与えたものとする. 次の線積分を Green の定理を用いて 2 次元定積分に直した後に値を計算せよ.

$$\oint_{\partial D} |z|^2 dz$$

問題 **2** ⊙· 次の線積分を適当な正則函数の線積分に変形し値を計算せよ. ただし積分路には正の向きが付けられているものとする.

1) $\displaystyle\oint_{|z|=R} \overline{z}^n dz \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ 2) $\displaystyle\oint_{|z|=R} x^n dz \quad (x = \operatorname{Re} z,\ n \in \boldsymbol{N})$

問題 **3** ⊙· 次の函数の特異点を示し, それぞれにおける Laurent 展開の 3 次以下の項を与えよ.

1) $\dfrac{1}{z^3(z-1)^2(z^2+1)}$ 2) $\tan z$

問題 **4** ⊙· 次の実 1 次元定積分を留数を用いて計算せよ.

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ 2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^3+1}dx$ 3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+x^2+1}dx$

問題 **5** ⊙· 次の正則函数による, 指定された領域の像を記述せよ. 境界まで込めて等角性が崩れているのはどの点か明らかにせよ. 数 理論的裏付けとともに概念図を示せ. 情 Mathematica あるいはプログラム confmap.c を適当に修正して計算機により像の図を出力したものを添付せよ.

1) $w = (z-1)/(z+1)$ による, 円板 $|z| < 1$ の像.
2) $z^2 - 1$ による, 円 $|z-1| < 1$ の像.
3) $w = e^z$ による, 帯 $-\infty \le x \le \infty, 0 \le y \le \pi i$ の像.
4) $w = z^3 - 3z$ による, 長方形 $-2 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$ の像.

問題 **6** ⊙· 次の実数値函数に適当な虚部を付けて正則函数にできるか ?できるものはその結果を示し, できないものはその理由を示せ.

1) $e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ 2) $e^x \cos 2y$

問題 **7** ⊙· 5 次方程式 $f(z) = z^5 + z^2 - 3z + 3 = 0$ の複素根を追跡せよ. 数 理論的考察と, 偏角の原理を適用して適当な複素線積分を計算することにより五つの根をそれらを一つずつ含む五つの領域に分離せよ. 情 Newton 法のプログラムを用いてそれぞれの近似値を倍精度の計算で与えよ. また $|\operatorname{Re} z| \le 2$, $|\operatorname{Im} z| \le 2$ の範囲の複素数を初期値とした Newton 法がどの根に収束するかを色分けした図を作り, 添付せよ. (カラー印刷は高価なので白黒に変換したものでよい.)

線積分の数値計算には Mathematica を使うか `integral.c` を修正して利用せよ. Newton 法の計算には Mathematica を使うか `cubic.c` を修正して利用せよ.

【参考１】 Mathematica による線積分の計算例 :C は $1-i$ から $1+i$ に到る線分とするとき, $\int_C \frac{1}{z}dz$ を計算するには,

```
z=1+I*y
S=Integrate[D[z,y]/z,{y,-1,1}]
N[S]
```

D[f,y] は f を y で微分する意, Integrate[f,{y,a,b}] は f を y で a からb まで積分する意であることは, (情報の人は) 一年のときに習ったが, 同じ演算は複素数値函数に対しても通用する. I は虚数単位を表す. N は結果を数値に変換する函数であった.

Mathematica による等角写像の描画例 :$w = z^2 - 1$ による正方形 $\max\{|x|, |y|\} < 1$ の像を等角に表示するには

```
z=x+I*y
points=Table[N[z^2-1],{x,-1,1,0.1},{y,-1,1,0.1}]
coords=Map[{Re[#],Im[#]}&,points,{2}]
lines=Map[Line,Join[coords,Transpose[coords]]]
Show[Graphics[lines],AspectRatio->Automatic,Axes->Automatic]
```

指令の意味は, 順に 0.1 刻みの格子点 (x, y) を実部, 虚部とする複素数 $z = x + iy$ の函数 $z^2 - 1$ による像の 2 次元テーブル points を作り, それに函数 Re, Im を適用してテーブルごと平面の点対の 2 次元テーブル coords に変換し, それとその行と列を入れ換えたものとを Join という函数で一つの表に結合して, 最後にその表の各行毎に点と点を結ぶ函数 Line を適用して線分のテーブル lines を作ってそれを描画する. AspectRatio->Automatic の指定を忘れると, 縦横比がデフォールトの黄金比になってしまうので, 得られた像が等角にみえなくなる.

【参考２】 コンパイル指令 ：実行可能ファイル integral は

```
gcc integral.c -lm -o integral
```

で作られる. confmap と cubic を作るにはグラフィックライブラリの準備が必要 ：

```
gcc -c xgrc.c   （既に xgrc.o が作ってあれば不要）
gcc confmap.c xgrc.o -lm -lX11 -o confmap
gcc cubic.c xgrc.o -lm -lX11 -o cubic
```

環境によっては -I/usr/X11R6/include や -L/usr/X11R6/lib などのコンパイルオプションが更に必要となる.

【参考３】 X のウインドウに表示された画面を印刷する方法は次の通り :,

1) 別ウインドウで xv を立ち上げ, マウスの右クリックでそのメニューを開いて grab ボタンを押し, カーソルを取り込みたいウインドウの上まで動かし, マウスの左ボタンをクリックする. これで画像が xv に取り込まれるので, xv の様々な機能を用いて適当に修正したあと, print ボタンを押して印刷する.

xv による取り込みがうまく動かないときは xwd というツールもある. これは別ウインドウで

```
xwd > foo.xwd
```

のように立ち上げる. このときマウスカーソルが + 印に変わるので, これを取り込みたいウインドウの上まで動かし, マウスの左ボタンをクリックする. これで, xwd フォーマットの画像ファイル foo.xwd が出来るので, xv foo.xwd を実行して xv により上と同様の操作をする.

以上で印刷できないとき, あるいはレポートの TeX ファイルに画像を取り込みたいときは, xv のメニューで save を選び, 現れたオプションウインドウで, postscript フォーマットを選んでセーヴする. ファイル名は自動的に foo.ps のように拡張子が変わる. これを TeX ファイルのソースに取り込む方法はレジュメの func2.tex などを真似よ. (基本的には情報の微積１年の冬レポートで曲面のグラフを印刷したときと同じである.)