函数論レポート No.3 — 解答と講評 (2000.2.2. 13:30版)

(最終版です)

問題 1 解答 $|z|^2 = z\overline{z}$ に注意すると

$$\oint_{\partial D} |z|^2 dz = \iint_D \frac{\partial |z|^2}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = \iint_D z d\overline{z} \wedge dz = 2i \iint_D (x+iy) dx dy$$
$$= 2i \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} (x+iy) dx = 0$$

ここで最後の結論は計算しなくても対称性から分かる. $d\overline{z} \wedge dz = d(x-iy) \wedge d(x+iy) = 2i dx \wedge dy$ にも注意.

もちろん, 実変数の Green の定理を使ってもよい. 易しい問題なので実質的な計算量はそう変わらない.

問題 2 解答 1) $|z| = R$ 上 $\overline{z} = R^2/z$ に注意すれば

$$\oint_{|z|=R} \overline{z}^n dz = \oint_{|z|=R} \frac{R^{2n}}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i R^2, & n = 1 \text{ のとき} \\ 0, & n \neq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

2) 全く同様に

$$\oint_{|z|=R} x^n dz = \oint_{|z|=R} \Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)^n dz = \oint_{|z|=R} \Big(\frac{z^2+R^2}{2z}\Big)^n dz$$

ここで $1/z$ の項の係数を見る. 2 項展開により

$$\Big(\frac{z^2+R^2}{2z}\Big)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k z^{n-2k} R^{2k}$$

なので, $1/z$ の項は n が奇数のときだけ現れる. よって

$$= \begin{cases} \dfrac{{}_nC_{(n+1)/2}}{2^{n-1}} \pi i R^{n+1}, & n \text{ 奇数のとき} \\ 0, & n \text{ 偶数のとき} \end{cases}$$

今度は $n < 0$ だと積分路上に分母の零点が生ずるので $n \geq 0$ でなければならない.

もちろん $n = 2m-1$ と置いて

$$\frac{{}_nC_{(n+1)/2}}{2^{n-1}} = \frac{n!}{2^{n-1}(\frac{n+1}{2})!(\frac{n-1}{2})!} = \frac{(2m-1)!}{2^{2m} m!(m-1)!} = \frac{(2m-1)!}{2(2m)!!(2m-2)!!} = \frac{(2m-1)!!}{2(2m)!!}$$

と書き直してもよい. すると複素積分を使えずに

$$\oint_{|z|=R} x^n dz = i R^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta (\cos\theta + i \sin\theta) d\theta$$

と書いて微積風に計算した人の答と一致する.

問題 3 解答 1) 特異点は $z = 0$ (3 次の極), $z = 1$ (2 次の極), $z = \pm i$ (それぞれ 1 次の極) である. $z = 0$ における Laurent 展開は

$$\frac{1}{z^3(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^3}\Big(\frac{1}{1-z}\Big)' \frac{1}{1+z^2}$$
$$= \frac{1}{z^3}\Big(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + \cdots\Big)'\Big(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\Big)$$
$$= \frac{1}{z^3}\Big(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 6z^5 + 7z^6 + \cdots\Big)\Big(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots\Big)$$
$$= \frac{1}{z^3}\Big(1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 4z^6 + \cdots\Big)$$
$$= \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + 4z^3 + \cdots$$

次に $z=1$ では, $z=1+(z-1)$, $z^2+1=2+2(z-1)+(z-1)^2$ と変形して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^3(z-1)^2(z^2+1)} &= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{\{1+(z-1)\}^3}\frac{1}{2\{1+(z-1)+(1/2)(z-1)^2\}}\\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{1+(z-1)}\Bigr)''\frac{1}{2}\frac{1}{\{1+(z-1)+(1/2)(z-1)^2\}}\\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}\Bigl(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+(z-1)^4-(z-1)^5+(z-1)^6-(z-1)^7+\cdots\Bigr)''\\
&\quad\times\Bigl(1-\{(z-1)+(1/2)(z-1)^2\}+\{(z-1)+(1/2)(z-1)^2\}^2-\{(z-1)+(1/2)(z-1)^2\}^3\\
&\qquad+\{(z-1)+(1/2)(z-1)^2\}^4-\{(z-1)+(1/2)(z-1)^2\}^5+\cdots\Bigr)\\
&= \frac{1}{4(z-1)^2}\Bigl(2-6(z-1)+12(z-1)^2-20(z-1)^3+30(z-1)^4-42(z-1)^5+\cdots\Bigr)\\
&\quad\times\Bigl(1-(z-1)+(1/2)(z-1)^2-(1/4)(z-1)^4+(1/4)(z-1)^5+\cdots\Bigr)\\
&= \frac{1}{2(z-1)^2}-\frac{2}{z-1}+\frac{19}{4}-\frac{35}{4}(z-1)+\frac{111}{8}(z-1)^2-20(z-1)^3+\cdots
\end{aligned}
$$

ここで使った微分は等比級数の冪乗を簡単に計算するための有名な技法です. 次に $z=i$ では $z=i+(z-i)=i\{1-i(z-i)\}$, 従って $z-1=(i-1)+(z-i)$, $z+i=2i+(z-i)$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^3(z-1)^2(z^2+1)} &= \frac{1}{z-i}\frac{1}{i^3\{1-i(z-i)\}^3(i-1)^2(1+\frac{z-i}{i-1})^2 2i\{1+\frac{1}{2i}(z-i)\}}\\
&= \frac{1}{z-i}\frac{1}{2i^5}\Bigl(\frac{1}{1-i(z-i)}\Bigr)''\frac{-(i-1)}{(i-1)^2}\Bigl(\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}(z-i)}\Bigr)'\frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)}\\
&= \frac{1}{z-i}\frac{-i}{2}\{1+i(z-i)-(z-i)^2-i(z-i)^3+(z-i)^4+i(z-i)^5-(z-i)^6+\cdots\}''\\
&\quad\times\frac{1+i}{2}\Bigl\{1+\frac{1+i}{2}(z-i)+\frac{i}{2}(z-i)^2-\frac{1-i}{4}(z-i)^3-\frac{1}{4}(z-i)^4-\frac{1+i}{8}(z-i)^5+\cdots\Bigr\}'\\
&\quad\times\frac{-i}{2}\Bigl\{1+\frac{i}{2}(z-i)-\frac{1}{4}(z-i)^2-\frac{i}{8}(z-i)^3+\frac{1}{16}(z-i)^4+\cdots\Bigr\}\\
&= \frac{(-i)^2(1+i)}{8(z-i)}\{-2-6i(z-i)+12(z-i)^2+20i(z-i)^3-30(z-i)^4+\cdots\}\\
&\quad\times\Bigl\{\frac{1+i}{2}+i(z-i)-\frac{3(1-i)}{4}(z-i)^2-(z-i)^3-\frac{5(1+i)}{8}(z-i)^4+\cdots\Bigr\}\\
&\quad\times\Bigl\{1+\frac{i}{2}(z-i)-\frac{1}{4}(z-i)^2-\frac{i}{8}(z-i)^3+\frac{1}{16}(z-i)^4+\cdots\Bigr\}\\
&= \frac{i}{4(z-i)}-\Bigl(\frac{9}{8}-\frac{i}{4}\Bigr)-\Bigl(\frac{5}{4}+\frac{45i}{16}\Bigr)(z-i)+\Bigl(\frac{165}{32}-\frac{7i}{2}\Bigr)(z-i)^2+\Bigl(\frac{29}{4}+\frac{497i}{64}\Bigr)(z-i)^3+\cdots
\end{aligned}
$$

$z=-i$ における展開は, もう一度計算しなくても, この結果において i を $-i$ に変えれば得られることが, 元の函数が実係数であることから分かる. (両辺の複素共役をとり, 展開の一意性を使えばよい.)

2 次までじゃ簡単すぎるかと思ってうっかり 3 次にしちゃってひどい目に会いました. もう配った直後に気づいたので, 計算機でやるだけでいいよと云ったのですが, 模範解答は手で計算して見せなきゃならないので, 死ぬ思いでした. ときどきこういう計算をやれば呆けなくていいかもね. (^^;)

それにしても $z=\pm i$ での結果が複素共役になっていない人, しかも全く同じ間違いのがぞろぞろ居たのはどうして？細矢先生の真似して調べる暇が無いのが残念だけど. 相談したら名前を書くって, 一年生のときからの約束でしょ！

なお Mathematica などにやらせるときは, 分母にでて来る分を掛けたものの Taylor 展開を計算し後で割ればよい. 展開の中心が原点からずれている場合は人間がずらして原点を中心とする展開にしてやらないと計算してくれないようです.

2) $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ であり, この分母は $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}$ で単純零点を持つ. よってこれらが極であり, 位数は 1. Laurent 展開は

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin z}{\cos z} &= \frac{\sin\{(n+1/2)\pi + (z-(n+1/2)\pi)\}}{\cos\{(n+1/2)\pi + (z-(n+1/2)\pi)\}} = \frac{(-1)^n \cos(z-(n+1/2)\pi)}{(-1)^{n-1}\sin(z-(n+1/2)\pi)} \\
&= -\frac{1 - \frac{(z-(n+1/2)\pi)^2}{2} + \frac{(z-(n+1/2)\pi)^4}{4!} + O((z-(n+1/2)\pi)^6)}{(z-(n+1/2)\pi) - \frac{(z-(n+1/2)\pi)^3}{3!} + \frac{(z-(n+1/2)\pi)^5}{5!} + O((z-(n+1/2)\pi)^7)} \\
&= -\frac{1}{z-(n+1/2)\pi} \frac{1 - \frac{(z-(n+1/2)\pi)^2}{2} + \frac{(z-(n+1/2)\pi)^4}{24} + O((z-(n+1/2)\pi)^6)}{1 - \frac{(z-(n+1/2)\pi)^2}{6} + \frac{(z-(n+1/2)\pi)^4}{120} + O((z-(n+1/2)\pi)^6)} \\
&= -\frac{1}{z-(n+1/2)\pi} \Big\{1 - \frac{(z-(n+1/2)\pi)^2}{2} + \frac{(z-(n+1/2)\pi)^4}{24} + O((z-(n+1/2)\pi)^6)\Big\} \\
&\qquad \times \Big\{1 + \frac{(z-(n+1/2)\pi)^2}{6} - \frac{(z-(n+1/2)\pi)^4}{120} + \frac{(z-(n+1/2)\pi)^4}{36} + O((z-(n+1/2)\pi)^6)\Big\} \\
&= -\frac{1}{z-(n+1/2)\pi} \Big\{1 - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\Big)(z-(n+1/2)\pi)^2 + \Big(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{7}{360}\Big)(z-(n+1/2)\pi)^4 \\
&\qquad\qquad + O((z-(n+1/2)\pi)^6)\Big\} \\
&= -\frac{1}{z-(n+1/2)\pi} + \frac{1}{3}(z-(n+1/2)\pi) + \frac{1}{45}(z-(n+1/2)\pi)^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

こちらの方ができていなかったが, 計算はずっと簡単です. これくらいはできなきゃね. ただし, Mathematica にやらせるときは, 多項式と違って分母の零点を掛けても $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形が残るので, 必ずしもうまく計算してくれるとは限らない.

なお, どちらの場合も分母の因子を掛けて微分して, 展開の中心の値を代入して,..., あるいは Laurent 展開の定義式の線積分を計算して,... というやり方は手では大変です. まず不可能でしょう. (特に後者は, それでできるのなら, 留数の理論は不要でしょう！)

問題 4　1) まず

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$$

と見直し, 積分路を上の方にずらしてゆく方法で計算する. $z^4+z^2+1 = (z^2+1)^2 - z^2 = (z^2+z+1)(z^2-z+1) = 0$ より, 根は, $\omega = e^{2\pi i/3}$ を一の原始 3 乗根として,

$$z_1 = \omega := \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad z_2 = \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, \quad z_3 = -\omega^2 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad z_4 = -\omega = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

の 4 個で, このうち上半平面にあるものは z_1, z_3. これらを通過するときに留数が残り, その後の積分は 0 に収束する：

$$
\begin{aligned}
&= \oint_{C_1} \frac{1}{z^4+z^2+1}dz + \oint_{C_3} \frac{1}{z^4+z^2+1}dz + \int_{-\infty+Ri}^{\infty+Ri} \frac{1}{z^4+z^2+1}dz \quad (R >> 1) && (1)\\
&\to \oint_{C_1} \frac{1}{z^4+z^2+1}dz + \oint_{C_3} \frac{1}{z^4+z^2+1}dz. && (2)
\end{aligned}
$$

ここに C_1, C_3 はそれぞれ z_1, z_3 を正の向きに一周する小円周である. z_k はすべて一位の極なので, これらの点における留数は

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{z^4+z^2+1} &= \Big[\frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}\Big]\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-3}\cdot(-1)\cdot\{-1+\sqrt{-3}\}} = \frac{1}{12}(3-\sqrt{-3}),
\end{aligned}
$$

$$\lim_{z\to z_3}(z-z_3)\frac{1}{z^4+z^2+1}=\Big[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)}\Big]\Big|_{z=z_3}=\frac{1}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)}$$
$$=\frac{1}{1\cdot\{1+\sqrt{-3}\}\cdot\sqrt{-3}}=-\frac{1}{12}(3+\sqrt{-3})$$

と簡単に計算できる. よって答は

$$\frac{1}{2}\times 2\pi i\times\frac{3-\sqrt{-3}-3-\sqrt{-3}}{12}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

2) 多価性を利用して積分路を回す方法で計算する.

$$I=\int_0^\infty\frac{(\log x)^2}{x^3+1}dx$$

において積分路の半直線を原点の周りに一周させてみると, log の多価性により

$$\int_0^\infty\frac{(\log x+2\pi i)^2}{x^3+1}dx=I+4\pi i\int_0^\infty\frac{\log x}{x^3+1}dx-4\pi^2\int_0^\infty\frac{1}{x^3+1}dx$$

に戻るが, その間に $z_1=-\omega^2=e^{\pi i/3}$, $z_2=-1=e^{\pi i}$, $z_3=-\omega=e^{5\pi i/3}$ で特異点に引っかかって留数を残すので

$$I=I+4\pi i\int_0^\infty\frac{\log x}{x^3+1}dx+2\pi i\sum_{k=1}^{3}\mathrm{Res}_{\,z_k}\frac{(\log z)^2}{z^3+1}-4\pi^2\int_0^\infty\frac{1}{x^3+1}dx$$

従って一番面倒な I は両辺から消える. 両辺を $4\pi i$ で割ってから実部を取れば, 最後の積分項も消えて

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{x^3+1}dx=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\mathrm{Re}\,\mathrm{Res}_{\,z_k}\frac{(\log z)^2}{z^3+1}$$

留数の計算は

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{(\log z)^2}{z^3+1}=\Big[\frac{(\log z)^2}{(z-z_2)(z-z_3)}\Big]\Big|_{z=z_1}=\frac{(\log z_1)^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$$
$$=\Big(\frac{\pi i}{3}\Big)^2\frac{2}{3+\sqrt{-3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-3}}=-\frac{2}{27(\sqrt{-3}-1)}\pi^2=\frac{1+\sqrt{-3}}{54}\pi^2,$$
$$\lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{(\log z)^2}{z^3+1}=\Big[\frac{(\log z)^2}{(z-z_1)(z-z_3)}\Big]\Big|_{z=z_2}=\frac{(\pi i)^2}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}$$
$$=-\pi^2\frac{2}{-3-\sqrt{-3}}\cdot\frac{2}{-3+\sqrt{-3}}=-\frac{1}{3}\pi^2,$$
$$\lim_{z\to z_3}(z-z_3)\frac{(\log z)^2}{z^3+1}=\Big[\frac{(\log z)^2}{(z-z_1)(z-z_2)}\Big]\Big|_{z=z_3}=\Big(\frac{5\pi i}{3}\Big)^2\frac{1}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}$$
$$=-\frac{25}{9}\pi^2\frac{1}{-\sqrt{-3}}\cdot\frac{2}{3-\sqrt{-3}}=\frac{25\cdot 2}{27(\sqrt{-3}+1)}\pi^2=\frac{25(1-\sqrt{-3})}{54}\pi^2$$

よって求める値は

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{x^3+1}dx=-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{54}-\frac{1}{3}+\frac{25}{54}\Big)\pi^2=-\frac{8}{2\cdot 54}\pi^2=-\frac{2}{27}\pi^2$$

ちなみに, 虚部の比較から副産物として

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^3+1}=-\frac{1}{2\pi i}\Big(\frac{\sqrt{-3}}{54}-\frac{25}{54}\sqrt{-3}\Big)\pi^2=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$$

も得られる.

複素数に対する log の定義を忘れないように！なお, この問題は $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^3+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\log x}{x^3+1}dx$ としちゃいけません. $x=-1$ で分母が 0 になり, 広義積分としても収束していません. また, 偶函数では無いので, たとい収束したとしても $-\infty < x < \infty$ 上の積分に帰着させることはできません.

3) 1) の記号を流用する.

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{Re}\, e^{ix}}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^4+x^2+1}dx$$

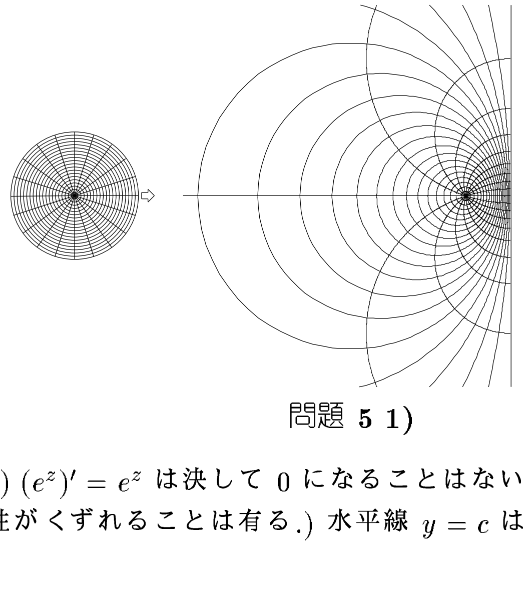
と見て積分路を上方にずらしてゆくと, 留数が残り

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{2\pi i \mathrm{Res}_{z_1}\frac{e^{iz}}{z^4+z^2+1} + 2\pi i \mathrm{Res}_{z_3}\frac{e^{iz}}{z^4+z^2+1} + \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix-R}}{(x+iR)^4+(x+iR)^2+1}dx\Big\} \\
&\to \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{2\pi i \mathrm{Res}_{z_1}\frac{e^{iz}}{z^4+z^2+1} + 2\pi i \mathrm{Res}_{z_3}\frac{e^{iz}}{z^4+z^2+1}\Big\} \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{2\pi i\Big(\frac{e^{iz_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} + \frac{e^{iz_3}}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)}\Big)\Big\} \\
&\quad = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{2\pi i\Big(\frac{e^{-\sqrt{3}/2}\{\cos(1/2)-i\sin(1/2)\}}{\sqrt{-3}(-1)(-1+\sqrt{-3})} + \frac{e^{-\sqrt{3}/2}\{\cos(1/2)+i\sin(1/2)\}}{1\cdot(1+\sqrt{-3})\sqrt{-3}}\Big)\Big\} \\
&\quad = \frac{\pi e^{-\sqrt{3}/2}}{4\sqrt{3}}\mathrm{Re}\Big\{(1+\sqrt{-3})\{\cos(1/2)-i\sin(1/2)\} + (1-\sqrt{-3})\{\cos(1/2)+i\sin(1/2)\}\Big\} \\
&\quad = \frac{\pi e^{-\sqrt{3}/2}}{2\sqrt{3}}\Big\{\cos\frac{1}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\Big\}
\end{aligned}$$

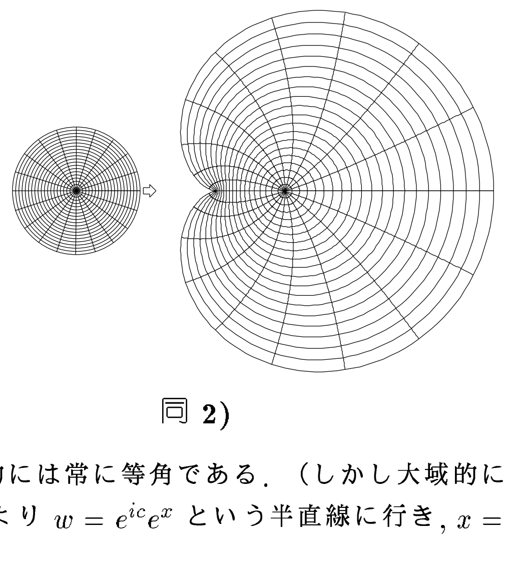
最終結果に i が入った答を平気で書いている人が (特に小問 2) に沢山) 居ましたが, 問題はすべて実数値函数の積分です！

問題 **5** 1) 一次変換なので, 円円対応を実現していることに注意. 到るところ等角. ただし原領域の境界上の点 $z=-1$ が無限遠点に行くので, ここを通る円 $|z|=1$ は直線 $\mathrm{Re}\, z = 0$ に写っている. 像の全体は半平面 $\mathrm{Re}\, z < 0$ と一致する. 従って無限領域なので適当にちぎって描くしかない. この問題は理論的にはやさしいが, きれいな図を作るのに苦労する.

2) $w = z^2-1$ は $w' = 2z = 0$ すなわち原点で等角性がくずれており, この点は原領域の境界上に有る. 像はここで平角 $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ を全周角 $-\pi \le \theta \le \pi$ に写すように回転し境界はこの点で尖点状に像領域に入り込むように写される. 原点の像はレベルラインが集中しているだけで特異点ではない.



問題 **5 1)**



同 **2)**

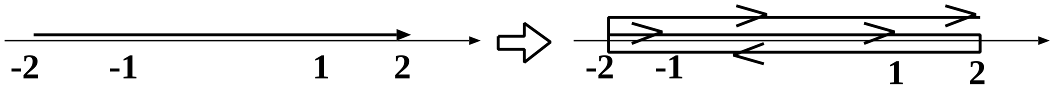
3) $(e^z)' = e^z$ は決して 0 になることはないので, 局所的には常に等角である. (しかし大域的には一意性がくずれることは有る.) 水平線 $y=c$ は $w=e^z$ により $w=e^{ic}e^x$ という半直線に行き, $x=-\infty$

が原点に $x=\infty$ が e^{ic} 方向の無限遠点に対応する. 従って x 軸に平行な帯は原点を中心とする無限に延びた扇形に写像され, 帯の幅が中心角となる. この例は中心角 π なので, 像は上半平面である. 無限領域は描けないので, 図は $-2 \leq x \leq 2$ の部分を描いており, 従って原点の近くに穴が有り, また外側にも有限となっている.

4) $w = z^3 - 3z$ は $w' = 3z^2 - 3 = 0$ すなわち $z = \pm 1$ において等角性がくずれる. この点は原領域の境界辺の途中に有り, 像はここで平角の π が 2π になって巻き付いたようになる. 結果として大域的な一意性もくずれ, 重なり合う部分が生じている. $z = \pm 1$ における様子は Taylor 展開で

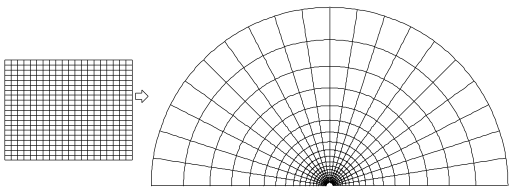
$$w = (z \mp 1 \pm 1)^3 - 3(z \mp 1) \mp 3 = \mp 2 \pm 3(z \mp 1)^2 + (z \mp 1)^3$$

と書いてみれば, 点 ± 1 を中心とする小さな上半円が近似的に点 ∓ 2 を中心とする小さな全円に写され, 平角を成していた境界線が中心から片方だけに出てゆく半直線に重なっていることがわかる. 以上の様子は原領域の境界線の一部を成す実軸上の線分 $-2 < x < 2$ 上を動く点の像の挙動を見るとよくわかる:

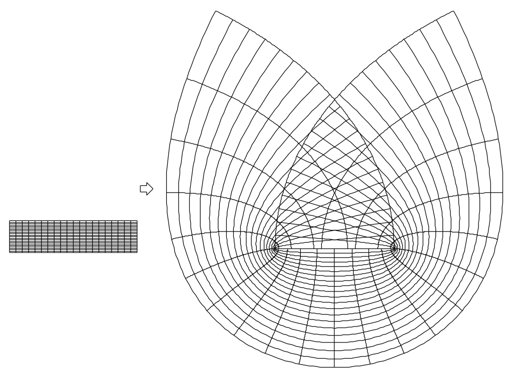


ちなみに, この $-2 \leq c \leq 2$ は三次方程式 $x^3 - 3x = c$ が 3 実根を持つ範囲と一致している.

問 1) と 3) はグラフを完全に書くことはできないのだから, 像領域を一言言葉で説明して欲しい. 等角性の吟味が無い人も居たが, 計算機にグラフを描かせっぱなしでは試験のときにひどい目に会うよ！(^^; 1) についてはドーナツ状のグラフィックを提出した一団が居ましたけど, 原領域の取り方を間違えたんじゃないの？



同 3)



同 4)

問題 **6** 正則函数の実部となり得るためには調和函数でなければならない. よって各函数に対してラプラシアン Δf を計算すればよい.

1)

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)(e^{x^2-y^2}\cos 2xy) \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial x}\{2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy\} + \frac{\partial}{\partial y}\{-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy\} \\
&\quad = \{(2 + 4x^2 - 4y^2)e^{x^2-y^2}\cos 2xy\} + \{(-2 + 4y^2 - 4x^2)e^{x^2-y^2}\cos 2xy\} = 0
\end{aligned}$$

よって正則函数にできる. これは目の子で $\mathrm{Re}\, e^{z^2}$ であることを見つけるのもそう難しくないだろう.

♉ 求める正則函数の一般解は虚部に任意定数を加えた $e^{z^2}+ic$ である．目の子で求まらない場合は，Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

を解いて求める．解は線積分で求まる：

$$\begin{aligned}
v(x,y)&=v(0,0)+\int_0^{x+iy}dv(x,y)=v(0,0)+\int_0^x\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}dx+\int_0^y\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}dy\\
&=v(0,0)+\int_0^x 0dx+\int_0^y\{2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy\}dy\\
&=v(0,0)+\Big[e^{x^2-y^2}\sin 2xy\Big]_0^y-\int_0^y 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xydy+\int_0^y 2xe^{x^2-y^2}\cos 2xydy\\
&=v(0,0)+e^{x^2-y^2}\sin 2xy
\end{aligned}$$

2 行目から 3 行目の変形は 2 項目を部分積分したのだが，これも目の子に近い洞察力が必要か？なお，答の正則函数は $e^{x^2-y^2}\cos 2xy+ie^{x^2-y^2}\sin 2xy+ic$ と書くよりは $e^{z^2}+ic$ と書いて欲しい．

2)

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)e^x\cos 2y=\frac{\partial}{\partial x}e^x\cos 2y+\frac{\partial}{\partial y}(-2e^x\sin 2y)=e^x\cos 2y-4e^x\cos 2y=-3e^x\cos 2y$$

だから調和函数ではない．従って正則函数の実部とならない．

問題 **7** 1) 与方程式にまず実根があるかどうかを見る．判別式を考えて $x^2-3x+3>0$ より $x\geq 0$ では $x^5+x^2-3x+3>0$．よって $x\geq 0$ には実根が無い．$-1\leq x\leq 0$ では $x^5+x^2-3x+3\geq x^2(1+x^3)+3(1-x)>0$ より，ここにも実根は無い．最後に $x<-2$ では，最高次の一部の x を 2 で置き換えては明らかに

$$x^5+x^2-3x+3\leq -8|x|^2+|x|^2+3|x|+3=-|x|^2-3|x|(|x|-1)-3(|x|^2-1)<0. \tag{3}$$

よって区間 $(-2,-1)$ の間で符号変化をしており，ここに (一つ以上の) 実根が存在する．

次に $z=iy$ と置いて虚軸上の根を調べると

$$z^5+z^2-3z+3=iy^5-y^2-3iy+3=-y^2+3+(y^5-3y)i$$

で，この実部・虚部が同時に 0 となることは無い．

最後に複素根の限界を求める．(3) と同様の計算で $|z|\geq 2$ のとき

$$|z^5+z^2-3z+3|\geq|z|^5-|z|^2-3|z|-3\geq 8|z|^2-|z|^2-3|z|-3=|z|^2+3|z|(|z|-1)+3(|z|^2-1)>0$$

よって根はすべて $|z|<2$ の範囲にある．C_1 を中心 0 半径 2 の円が第一象限によって切り取られる四分円の周として複素線積分

$$\oint_{C_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\oint_{C_1}\frac{5z^4+2z-3}{z^5+z^2-3z+3}dz$$

を数値計算すると，各辺を 10 等分するくらいのメッシュで近似値 $0.8882649+6.4861217i$ を，また 1000 分割くらいで近似値 $00125132+6.2852802i$ を得る．前者の値でも十分に，これは $2\pi i$ と考えられるから，ここにちょうど一個の複素根がある．従って対称性により第四象限にこの複素共役根がある．同様に，第二象限の四分円の，例えば $\mathrm{Im}\,z\geq 2\sin 0.9\pi$ の部分の周 C_2 に対して上の積分を計算すると 10 等分で近似値 $0.4575772+6.3652220i$, 1000 等分で $0.0058899+6.2844930i$ を得るから，ここにも複素根が一

個, 従って共役な位置にもう一個. 以上により, 各象限に複素根が一個ずつと負の実軸上に実根が一個の計五個.

2) 倍精度で計算した根の近似値は

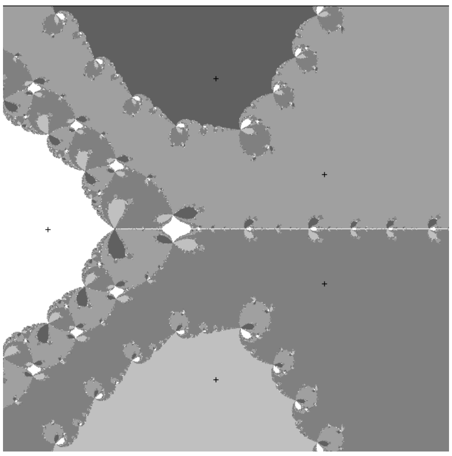
$$0.885830659372831 \pm 0.493313669740697i, \qquad -0.088214457927749 \pm 1.349630534826001i,$$
$$-1.595232402890163$$

Mathematica で多倍長で計算したものと比較すると,

```
In[1]:= f[z_]:=z^5+z^2-3*z+3;
In[2]:= g[z_]:=5*z^4+2*z-3;
In[3]:= F[z_]:={z1=0;z0=z;
            While[Abs[z1-z0]>10^(-50),{z1=z0;z0=N[z1-f[z1]/g[z1],54]}];z0}
In[4]:= F[-2]
Out[4]= {-1.595232402890162605294523596846310053239149357910389}
In[5]:= F[I]
Out[5]= {-0.08821445792774939129666502109220866059757881906 +
>     1.3496305348260013842144251177758311906277533285 3 I}
In[6]:= F[-1+I]
Out[7]= {0.88583065937283069394392681951536368721715350 +
>     0.49331366974069669033399872872258603247321716 I}
```

となり, 最初に計算したものの最後の桁は四捨五入されていたことがわかる. (上の `In[3]` のところのインプットは, 初期値を指定して Newton 法を実行する函数の定義文で, 実際には一行で書く.)

Newton 法による収束先を初期値に対して色分けした図は下の通り:



問題 7

Q 各象限における複素根の個数を電卓も無い状況で手で確認するときは, 数値積分も大変なので, むしろ扇形の半径 R を大きくして, 周に沿って

$$\oint \frac{f'(z)}{f(z)} = \oint d\log f(z) = \oint id(\arg f(z))$$

の増分を漸近計算する方がよい. 例えば第一象限なら, 実軸に沿って $[0, R]$ では偏角は変化せず, 弧 $Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi/2$ に沿っては $f(z) \sim z^5$ と見て偏角は 0 から $\frac{\pi}{2} \times 5$ だけ増え, 最後に虚軸に沿って戻ると $f(z)$ の値はほぼ $R^5 i + 3$ から 3 に変化するから偏角は $\pi/2$ から 0 に減る. すなわち, 全体で 2π だけ増えるから, 根の個数 1 と見積もられる.