# 函数論期末試験　—　2000 年 2 月 3 日

| 学生証番号 | 氏名 | 点数 |
|---|---|---|

No.1

**問題 1**　次の $x, y$ の二変数函数 $f(x,y) := x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$ が $z = x + iy$ の正則函数とみなせるかどうかを Cauchy-Riemann の方程式を用いて確認せよ.

**問題 2**　$\log(-1 + \sqrt{-3})$ の値を示せ.

**問題 3**　$D$ を正方形 $\{(x,y); -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ とし, $\partial D$ をその周に正の向きを与えたものとする. 線積分 $\oint_{\partial D} \overline{z} dz$ を Green の定理を用いて 2 次元定積分に直し, その後で値を計算せよ.

**問題 4**　正則函数 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ による円板 $|z| < 1$ の像の像の概略を記述せよ.

**問題 5**　有理函数 $f(z) := \dfrac{1}{z^3(z-1)(z^2+1)}$ の極とその位数を示し, それぞれにおける Laurent 展開の負冪の部分を計算せよ.

| 学生証番号 | 氏名 | |
|---|---|---|



問題 6　前問の結果を用いて前問の函数の直線 $L := \{z = x + i/2;\ -\infty < x < \infty\}$ に沿う線積分の値を求めよ.

問題 7　定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+x+1}dx$ の値を留数を用いて計算せよ.　[ヒント :$\sqrt[4]{x}$ を原点の回りに一周させると, 正の実軸に戻ったときどうなるか調べよ. ]

問題 8　5 次の代数方程式 $x^5 + x + 1 = 0$ の実根および象限毎の複素根の数を明らかにせよ.　[ヒント :道具無しで線積分の近似計算は不可能なので, 適当な曲線に沿う $f(z)$ の偏角の変化量を直接調べよ. ]