函数論期末試験 ・解答と講評 — 2000 年 2 月

問題 1 $f(x,y) := x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$ に対し $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$ とおけば, 実の連立方程式の形の Cauchy-Riemann の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

で満たされている. また複素形の Cauchy-Riemann の方程式は

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}\Big[3x^2 - 3y^2 + 6xyi + i\big\{-6xy + (3x^2 - 3y^2)i\big\}\Big] = \frac{1}{2}\big[3x^2 - 3y^2 + 6xyi - 6xyi - (3x^2 - 3y^2)\big] = 0$$

で満たされている. 係数の $1/2$ は正則かどうかの判定には省略してもよい. ちなみに $f(x,y) = z^3$ である.

講評 予想された問題で, ほとんどの人はできていたが, 偏微分の計算を間違えた人, 実の連立方程式の形で一方の式しか書いてない人などは厳重注意.

問題 2 複素数 $-1 + \sqrt{-3}$ の絶対値は $\sqrt{1+3} = 2$, また偏角は $\cos\theta = -1/2$, $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ より, 第二象限の角で $2\pi i/3$. よって複素数に対する対数の定義により

$$\log(-1 + \sqrt{-3}) = \log 2 + \frac{2\pi}{3}i + 2n\pi i \qquad (n \in \boldsymbol{Z})$$

講評 第 2 回レポートの範囲だったせいか, 定義を忘れてしまった人が多かった. log の定義は忘れても指数函数の逆函数であることさえ認識していれば, Euler の関係式 $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ から $z = \log w = x + iy$ を $e^x = |w|$, $y = \arg w$ と復元できるはず. log は arg のせいで多価函数になっていることに注意. なお, この問題に限っては $\log(-1 + \sqrt{-3}) = 2\omega$, ω は 1 の原始 3 乗根, と書けるので, 計算しなくても答が出せる.

問題 3 第 2 回レポートの 1 番で $n = 1$ としたものと同じ. Green の定理の複素形を使うと

$$\oint_{\partial D} \overline{z}dz = \iint_D \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = \iint_D 1 d\overline{z} \wedge dz = 2i \iint_D 1 dxdy = 2i \times 8 = 8i$$

ここで $d\overline{z} \wedge dz = d(x - iy) \wedge d(x + iy) = 2i dx \wedge dy$ を用いた. 最後の積分は D の面積なので計算しなくても値は分かる.

微積の通常の教科書に有る実形の Green の定理を使った計算は

$$\oint_{\partial D} \overline{z}dz = \iint_D \{(x - iy)dx + i(x - iy)dy\} = \iint_D \Big(\frac{\partial\{i(x - iy)\}}{\partial x} - \frac{\partial\{x - iy\}}{\partial y}\Big)dxdy = \iint_D 2i dxdy = 8i$$

となる.

講評 Green の定理を実形でしかも微積の教科書にあるような形で覚えていた人は尊敬に値するが, いつまで覚え続けられるでしょうか ? 現に覚え損なって間違った答を出した人も少なからずありました. 忘れてもその場で復元できるような覚え方をしましょう.

Green の定理を使って 2 次元の積分に直せという問題なので, 線積分で直接計算した人は正解に達しても半分しか点はありません.

問題 4 第 3 回レポートの問題 5 の 1) と同じです.

一次変換なので, 円円対応だが, この問題では原領域の境界上の点 $z = -1$ が無限遠点に行くので, ここを通る円 $|z| = 1$ は直線に写る. 境界線の方程式の出し方はいろいろあるが, 例えば $z = e^{i\theta}$ の与えられた写像による像を見ると

$$w = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{(e^{i\theta} - 1)(e^{-i\theta} + 1)}{2(1 + \cos\theta)} = \frac{2\sin\theta}{2(1 + \cos\theta)}i$$

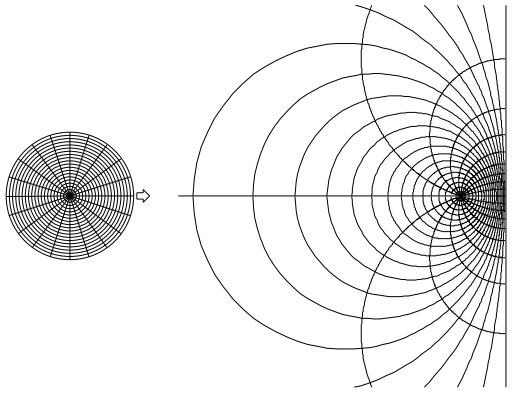
で虚軸に含まれるので, $\mathrm{Re}\, z = 0$ に写っていることが分かる. もとの領域に含まれる原点の像が -1 なので, 求める像の全体は左半平面 $\mathrm{Re}\, z < 0$ と結論される.

なお, 不等式で厳密に論ずることもできる :$w=(z-1)/(z+1) \Longleftrightarrow z=(1+w)/(1-w)$ より

$$|z|=\left|\frac{1+w}{1-w}\right|<1 \iff |w-(-1)|<|w-1|$$

最後の不等式は複素平面で点 1 よりも点 -1 に近いという条件であるから, これを満たす点の集合は確かに半平面 $\mathrm{Re}\, w<0$ と一致する.

ここではレポートの解答の図を流用しますが, 計算機が使えるレポートの場合ならともかく, 試験の解答では, 円弧をたくさん書くのは意味のないことで, むしろ境界がしっかり特定されていることの方がずっと重要です. 従って図としては $\mathrm{Re}\, w<0$ の部分に斜線を入れておけば十分です.



問題 **4** の図

講評　パターンだけを記憶して書いても正しければ満点にしてありますが, 円周ばかり沢山書かれていて, 肝心の像領域が半平面かどうかはっきりしないものは大減点. また境界の方程式が明記してないものもどういう半平面か特定できていないので減点です.

問題 **5**　$z=0$ が 3 位の極, $z=1, \pm i$ がそれぞれ 1 位の極である. $z=0$ での Laurent 展開は漸近計算で求める.

$$\frac{1}{z^3(z-1)(z^2+1)}=-\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z}\frac{1}{1+z^2}=-\frac{1}{z^3}\{1+z+z^2+O(z^3)\}\{1-z^2+O(z^3)\}=-\frac{1}{z^3}\{1+z+O(z^3)\}=-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\cdots$$

他の点での Laurent 展開は 1 位の極なので留数さえ計算すればよい. $z=1$ では留数は

$$\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^3(z^2+1)}=\frac{1}{2}$$

よって Laurent 展開は

$$\frac{1}{2(z-1)}+\cdots$$

同様に $z=i$ では

$$\lim_{z\to i}\frac{1}{z^3(z-1)(z+i)}=\frac{1}{i^3(i-1)\cdot 2i}=-\frac{i+1}{4}$$

だから Laurent 展開は

$$-\frac{i+1}{4(z-i)}+\cdots$$

よって $z=-i$ における Laurent 展開は, 複素共役をとって

$$\frac{i-1}{4(z+i)}+\cdots$$

以上において, $\cdots$ はいずれも非負冪の部分を表す.

講評　Laurent 展開は $z=0$ 以外は留数の計算と同等で非常に簡単なのに, わざわざ $(z-1)$ を $(z-1)^2$ と取り違えて苦労している人が沢山いました. 試験中に“レポートとは問題が違うよ”って言わなきゃだめなの ?

問題 **6**　積分路 L を上方に移動してゆくと, $z=i$ で極にひっかかって留数を残し, その後は 0 に収束してゆくことは明らかなので, 積分値は, 前問で計算された留数の値を用いて

$$2\pi i \mathrm{Res}_{z=i} f(z)=2\pi i\cdot\left(-\frac{i+1}{4}\right)=\frac{1-i}{2}\pi$$

講評 “ 前問の結果を利用して” というヒントを, “ 部分分数分解として使って” という風に誤解した人が沢山いました (過去問のせい ?;_;) が, これは“ 上で計算された留数を使って留数計算で求めなさい” という意味だったのです. 部分分数分解を使っても実軸上の積分ではないので, 原始函数で出て来る $\log$ の値を分枝も込めてきちんと決めるのが結構めんどうです. そこから π が出て来るのですから.

しかし, なお悲惨なことに, 問題文の意味が全くわからずに $x+i/2$ を積分していた人が沢山居たのはどういうことでしょうか ? いくらなんでもひどすぎると思わない ?

問題 7 $\sqrt[4]{x}$ は原点のまわりを一周させると $i\sqrt[4]{x}$ になって戻って来る. これは直接, 原点を中心とする円周に沿って動いたときの $\sqrt[4]{x}$ の値の変化をみれば分かるが, $\sqrt[4]{x}=e^{(1/4)\log x}$ と考えると $\log x$ が $\log x+2\pi i$ に変わることから,

$$\sqrt[4]{x}=e^{(1/4)\log x}\mapsto e^{(1/4)(\log x+2\pi i)}=e^{2\pi i/4}\cdot\sqrt[4]{x}=e^{\pi i/2}\cdot\sqrt[4]{x}=i\sqrt[4]{x}$$

と理解することもできる. $z^2+z+1=0$ の根は ω と ω^2 の二つだから, $\omega=e^{2\pi i/3}$ に注意すると, 以上により

$$\begin{aligned} I&=\int_0^\infty\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+x+1}dx=iI+2\pi i\Big(\mathrm{Res}_{\,\omega}\frac{\sqrt[4]{z}}{z^2+z+1}+\mathrm{Res}_{\,\omega^2}\frac{\sqrt[4]{z}}{z^2+z+1}\Big)\\ \therefore\quad I&=\frac{2\pi i}{1-i}\Big(\frac{\sqrt[4]{\omega}}{\omega-\omega^2}+\frac{\sqrt[4]{\omega^2}}{\omega^2-\omega}\Big)=\frac{2\pi i}{1-i}\frac{e^{\pi i/6}-e^{\pi i/3}}{\sqrt{-3}}\\ &=\frac{2\pi}{(1-i)\sqrt{3}}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\pi\end{aligned}$$

講評

$$\int_0^\infty\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+x+1}dx$$

と変形して実軸上の積分に帰着し, 積分路を上方にずらした人がほとんどでしたが, この問題の被積分函数は偶函数ではないので全く誤りです. ヒントにも書いたように, 積分路は半直線のままで回転しなければいけません. また, せっかく原点の回りに廻しても, $\sqrt[4]{x}$ が $\sqrt[4]{x}+2\pi i$ に変化してしまった人がほとんどでしたが, 意味を考えない丸暗記はいけません.

問題 8 $f(x):=x^5+x+1$ は奇数次なので, 中間値の定理により実根は必ず存在する. x が実なら $f'(x)=5x^4+1>0$ なので, f は常に単調増加, 従って実根は一つであることも分かる. $x\geq 0$ で決して 0 にならないことは明らかなので, 負根が一個である. ちなみに $x\leq -1$ で $x^5+x+1\leq -1$ なので, 根は区間 $(-1,0)$ に存在する. また $f(iy)=i(y^5+y)+1$ なので虚軸上には根は無い. 複素根は共役根の対として存在するから, 以上により第一象限に根がいくつあるかがわかればすべての象限での根の個数がわかる. そこで原点を中心とする半径 R が十分に大きい第一象限の四半円 C を取り, 線積分

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz\Big)=\frac{1}{2\pi}\int_C d(\mathrm{Im}\log f(z))=\frac{1}{2\pi}\int_C d(\arg f(z))$$

の変化量を見る. まず実軸上の $[0,R]$ では, $f(z)$ は実数のままなので上の量は変化しない. 次に 四半円周上では, $R>>1$ なら $f(z)\doteqdot z^5$ とみなせて $f(z)$ はほぼ R^5 から $(Re^{\pi i/2})^5$ まで変わるから, $f(z)$ の偏角の増加分はほぼ $5\pi/2$. 最後に虚軸上の線分を下がって来るときは, y が R から 0 まで変化すると, $f(iy)=i(y^5+y)+1$ の偏角はほぼ $\pi/2$ から 0 まで変化する. 故に C に沿う偏角の総変化量は, ほぼ

$$\frac{5\pi}{2}+\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)=2\pi$$

だから, 上の公式より C 内の根は 1 個. よって複素根は各象限内に 1 個と結論される.

総評 今回は試験が 90 点満点でついています. これに二回分のレポートと出席点を合計したものが成績となります. ただし, これではあまりにみんなの成績が悪くなりそうなで, 各項に重み因子を掛けるか, げたやぽっくりをはかせるかもしれません.