6 月2 3 日の問題9 (2) の真島先生のヒントによる別解

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$ を計算するのに，$R>0$ を十分大きく選んで，図のような閉曲線 C_R に沿って $\dfrac{1}{z^4+1}$ を周回積分することを考える：

$$\oint_{C_R}\frac{1}{z^4+1}dz = \int_0^R \frac{1}{x^4+1}dx + \int_0^{\pi/2}\frac{1}{R^4e^{4i\theta}+1}Re^{i\theta}id\theta + \int_R^0 \frac{1}{y^4+1}idy$$

ここで，右辺の第1 項の積分が $R\to\infty$ のとき求める積分に収束する．第2 項の積分は, 被積分関数の絶対値が積分路上で $\le \dfrac{R}{R^4-1}$ なることから，

$$\left|\int_0^{\pi/2}\frac{1}{R^4e^{4i\theta}+1}Re^{i\theta}id\theta\right| \le \int_0^{\pi/2}\frac{R}{R^4-1}d\theta = \frac{R}{R^4-1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

と評価されるので，$R\to\infty$ のとき 0 に収束する．また最後の積分は純虚数となる．よって，周回積分 $\displaystyle\oint_{C_R}\frac{1}{z^4+1}dz$ を留数で計算したものの実部が求める値となる．分母 $z^4+1=(z^2+i)(z^2-i)$ の零点で, この積分路の中にあるのは，$z^2-i=0$ の根のうちで実部が正のもの $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ただ一つである．故に留数定理により (この点では $z^2=i$ となることに注意して)

$$\mathrm{Re}\oint_{C_R}\frac{1}{z^4+1}dz = \mathrm{Re}\left(2\pi i\Big[\frac{1}{(z^2+i)(z+\frac{1+i}{\sqrt{2}})}\Big]_{z\mapsto\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i\frac{1}{2i\cdot 2\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

が求める答となる．