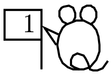
幾何入門　第１回

情報科学科　金子　晃
Алексей　КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://atom.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/KOUGI/Geo
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/Geo

計算機にかかわる幾何の基礎知識：

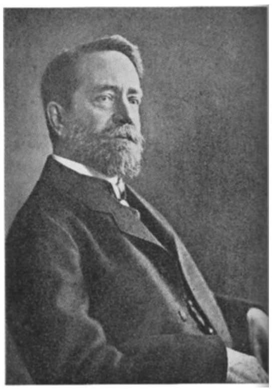


- ☆ アフィン幾何・ユークリッド幾何・射影幾何
  線型代数で記述される幾何
- ☆ 非ユークリッド幾何
  平行線の公理がユークリッド幾何と異なるもの
  (平行線が一本も引けない楕円幾何と無数に引ける双曲幾何)
- ☆ 微分幾何
  微分を使って曲面の性質を調べる
- ☆ 積分幾何
  積分論に特に関係する性質を調べる
- ☆ 位相幾何
  連続的に曲げても変わらない図形の性質を調べる
- ☆ 代数幾何
  代数方程式で定義された図形の性質を代数的に調べる
- ☆ 解析幾何
  函数論を使う幾何学
- ☆ 計算幾何
  図形の計算機での取り扱い方とアルゴリズム・計算量の研究

クラインによる幾何の定義

幾何学とは, ある群によって不変な性質を研究する学問である.
(Felix Klein 1849–1925)

例



☆アフィン幾何:
アフィン変換群 i.e.
一般線形群と平行移動

☆ ユークリッド幾何:
ユークリッドの運動群 i.e.
回転・鏡映と平行移動

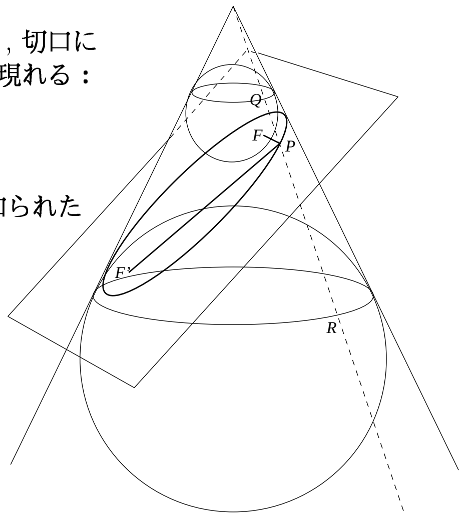
☆ 射影幾何:
射影変換群 i.e.
アフィン変換と反転

オブジェクトの例 — 円錐曲線

円錐を平面で切ると, 切り方により, 切口に
楕円, 放物線, 双曲線のいずれかが現れる：

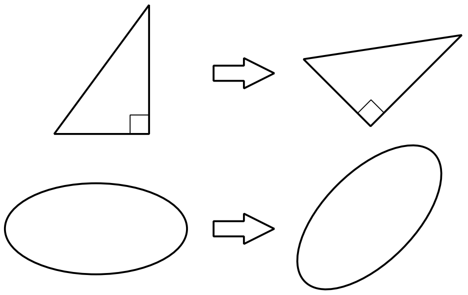
☆アポロニウスの円錐曲線論
BC 200 頃
証明法は座標計算で, 現在よく知られた
二次曲線の方程式を導いている.
現代的！

☆初等幾何による説明：
ベルギーの Pierre Dandelin
(1794–1847) による.
この方が古典的に見える！



三つの幾何の違い — 1

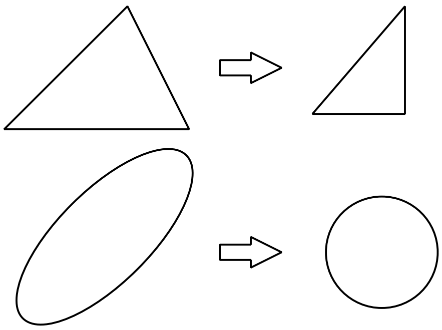
☆ユークリッド幾何の座標変換は, 長さと角度を変えない.
　三角形は合同な三角形に写る.
　二次曲線の主軸は保たれる：
　　楕円の長径・単径の比は不変 $\Longrightarrow$ 形が変わらない
　　長径・単径の長さも不変 $\Longrightarrow$ 大きさも変わらない



ユークリッド幾何でも相似変換を使うことがある.
　その場合は形は不変で大きさだけが変わる.

三つの幾何の違い — 2

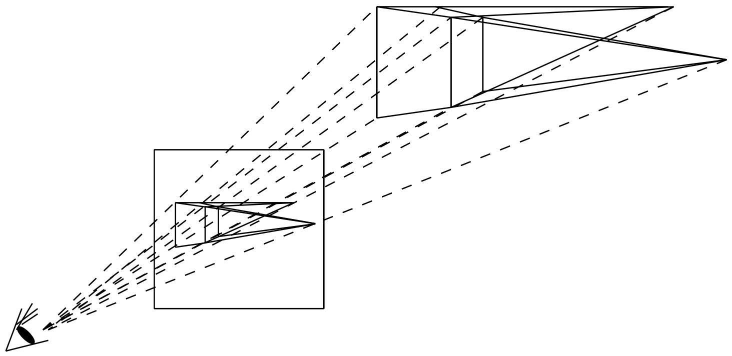
☆アフィン変換は一般の線形変換を使うので,
長さも角度も自由に変えられる.
三角形は他のどんな三角形にでも変えられる.
しかし三角形が四角形になることはない.
楕円は長径・単径が自由に変えられるので, みんな円に変換できる.
しかし楕円が放物線や双曲線になることはない.
($\Longrightarrow$ 二次形式の符号数の不変性 = シルベスターの慣性律)



射影幾何と透視図法

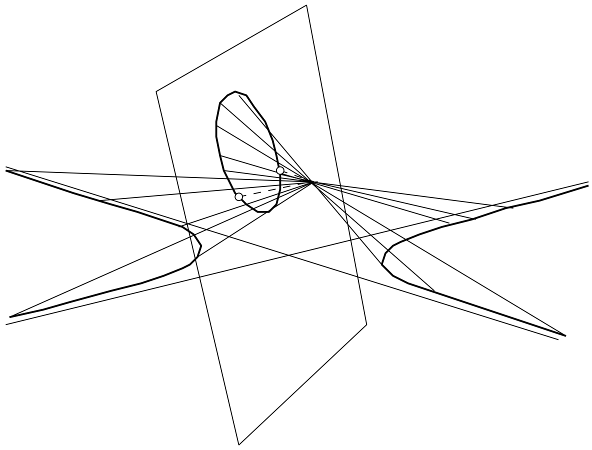
射影幾何はルネサンス時代に生まれた透視図法の
数学的正当化として生まれた.

透視図法：
風景を立体的に見えるように平面に描くには,
眼で見える通りにキャンバスにプロットしてゆけばよい.
これは, 射影変換の典型例：配景変換 (perspective transform) となる.



三つの幾何の違い — 3

☆射影幾何では楕円と双曲線が互いに移り変わり得る.
配景変換による楕円と双曲線の対応：

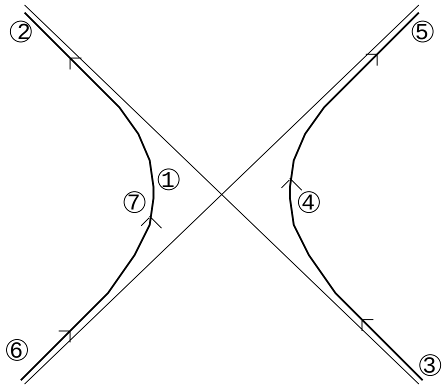


射影幾何における直線 − 1

ある直線の一方の側にどこまでもゆくと, 無限遠点に達し,
他の側から戻って来る.

射影幾何では, 直線はすべて円周のように閉じている.

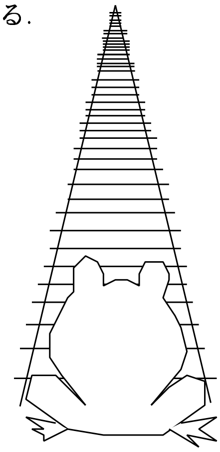
例 1 双曲線が実は楕円であることの説明図 **:**



射影幾何における直線 − 2

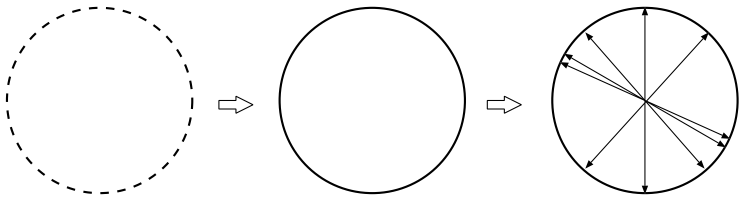
射影幾何では, 任意の二直線は必ずただ一点で交わる.
アフィン幾何における平行線は無限遠点で交わっているとみなされる.
無限遠の点は有限の点と同等に扱われる.

例 2 線路は無限遠の一点で交わるように見える.
その先は振り向くと, 後ろから戻ってくる.

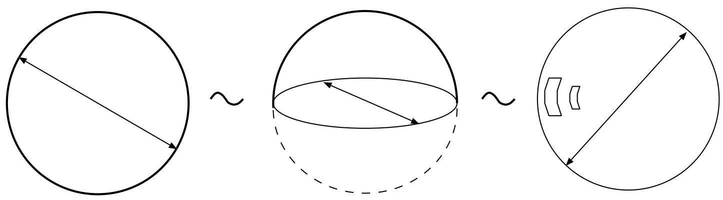


射影平面の直感的定義

アフィン平面は開円板と同一視できる.
これに無限遠点を付け加えると, 閉円板になる.
閉円板の各直径の両端を同一視すると射影平面ができる.



球面の各直径の両端を同一視しても同じものができる.



射影平面の解析的定義

射影平面の同次座標：三つ組 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ の同値類で
射影平面の点を表す.

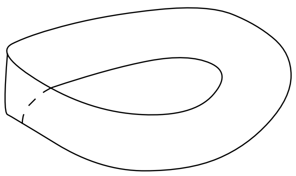
$\lambda \neq 0$ のとき　$(x,y,z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

ベクトルの長さが 1 のものだけを考えれば $\lambda = \pm 1$
従って単位球面において直径の両端を同一視するのと同等.

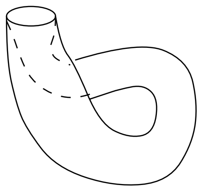
$$\boxed{\text{射影平面：} \ \boldsymbol{P}^2 = (\boldsymbol{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})/\boldsymbol{R}^\times}$$

向き付け不可能 (non-orientable) な不思議な曲面である.

cf. 向き付け不可能な曲面の他の例：



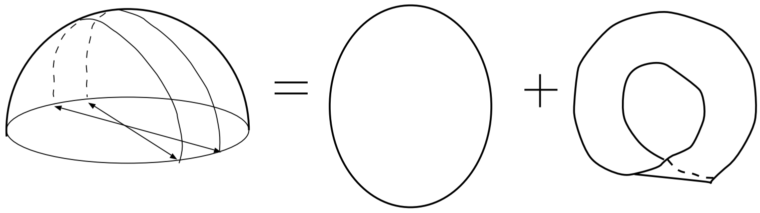
メビウス (Möbius) の帯



クライン (Klein) の壷

射影平面とメビウスの帯の怪しい関係

射影平面にはメビウスの帯が含まれている：



言い替えると, メビウスの帯の周に沿って
円板の周を貼り合わせると射影平面が出来上がる.

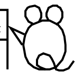
メビウスの帯の周は繋がった一本の閉曲線を成している！
c.f. 普通の輪の周は二本の円周に分かれてしまう.

☆点は $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ の $\boldsymbol{R}^\times$ 乗法に関する同値類
☆直線は $ax + by + cz = 0$ を満たす点の全体
$\iff (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ の $\boldsymbol{R}^\times$ 乗法に関する同値類

点と直線は全く区別が付かない！
$\Longrightarrow$ 平面射影幾何では点と直線の間に完全な双対関係が成立する.

例： 相異なる二点を通る直線が常にただ一つ存在する.
相異なる二直線の交点が常にただ一つ定まる.

$\because$ 線型代数：$a_1x + b_1y + c_1z = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z = 0$ が異なる直線
$\iff$ 二つの方程式は一次独立
$\iff$ 一次独立な解が一次元
$\iff$ 一点を定める



無限遠直線 $\Longleftrightarrow z=0$

有限アフィン平面 $z \neq 0$

このとき　$(x,y,z) \sim (x/z, y/z, 1)$.
よってアフィン平面の点 (x,y) を射影平面の点 $(x,y,1)$ とみなせば,
アフィン平面は射影平面に埋め込まれ, ちょうど
射影平面から無限遠直線を除いた部分と一致する.

アフィン直線 $ax+by+c=0$ の射影化：
$x \mapsto \dfrac{x}{z}$, $y \mapsto \dfrac{y}{z}$ を代入し, 分母を払うと $\Longrightarrow ax+by+cz=0$.

無限遠直線 $z=0$ 以外の直線 $ax+by+cz=0$ は,
その上にただ一つの無限遠点を含む.
$\because$ 無限遠点は $(x,y,0)$ の形をしている.
仮定により $(a,b) \neq (0,0)$ なので, $ax+by=0$ から
$x:y=b:-a$ が確定し, $(b,-a,0)$ が求める無限遠点.

アフィン平行 2 直線 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ は無限遠点で交わる：
$(a,b) \neq (0,0)$, $c \neq c'$ だから, 対応する射影二直線
$ax+by+cz=0$, $ax+by+c'z=0$ は無限遠点 $(b,-a,0)$ を共有.
この連立一次方程式の解は $z=0$ しか無いので, 有限点では交わらない.

射影代数曲線

一般の射影代数曲線は同次代数方程式 $f(x,y,z)=0$ で定義される.

例： 二次曲線 $ax^2+by^2-cz^2=0 \quad (a,b,c>0)$
(一般の二次曲線は射影座標変換で必ずこの形になる.
実は $a=b=c=1$ にできるが, 淋しいので係数を残しておく.)

双対曲線は, 接線の集合として定義する.
接線の定義は重根条件で与える：
直線 $\xi x+\eta y+\zeta z=0$ が上と接する
$\Longleftrightarrow$ $\zeta\neq 0$ なら,

$$ax^2+by^2-c(\frac{\xi}{\zeta}x+\frac{\eta}{\zeta}y)^2$$

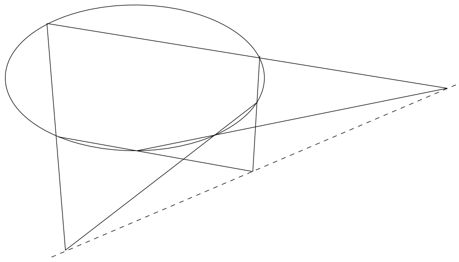
$$=(a-c\frac{\xi^2}{\zeta^2})x^2-2c\frac{\xi\eta}{\zeta^2}xy+(b-c\frac{\eta^2}{\zeta^2})y^2 \qquad \text{が完全平方式となる}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0=c^2\frac{\xi^2\eta^2}{\zeta^4}-(a-c\frac{\xi^2}{\zeta^2})(b-c\frac{\eta^2}{\zeta^2})=bc\frac{\xi^2}{\zeta^2}+ac\frac{\eta^2}{\zeta^2}-ab$$

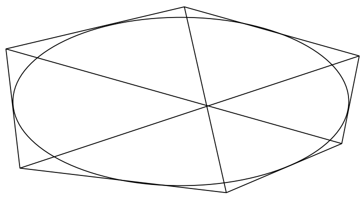
$$\text{i.e.} \quad \frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}-\frac{\zeta^2}{c}=0 \qquad (\xi\neq 0 \text{ または } \eta\neq 0 \text{ のときも同様})$$

◎二次曲線の双対は二次曲線になる.

双対関係にある美しい定理の代表例



パスカルの定理：
二次曲線の内接六角形の対辺の交点は共線である

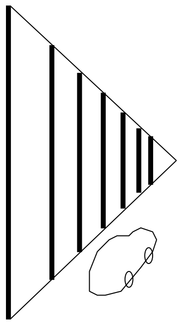


ブリアンションの定理：
二次曲線の外接六角形の対頂点を結ぶ直線は共点である

レポート問題

問題 1 Pascal の定理, Brianchon の定理の証明を自分で考えるか,
参考書を調べて提出せよ.

問題 2 等間隔に並んだ電柱などを一点透視図法で描くとき,
電柱の間隔をどう取ればよいか？
1) デジカメで適当な被写体を取ってきて実測して調べよ.
2) 射影幾何の考え方で理論的に導け.



成績はレポートで付けます.
学部生でＡを欲しい人は３問以上解いてください.
院生でＡを欲しい人は全問解くか, 何か専門芸を見せてください.