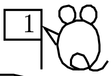
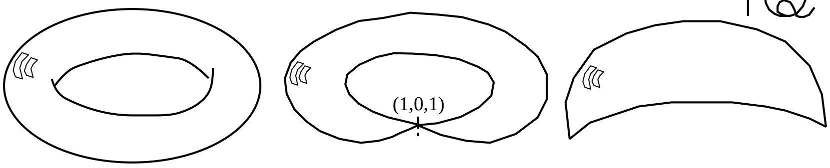
幾何入門　第４回

情報科学科　金子　晃
Алексей　КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://atom.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/KOUGI/Geo
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/Geo

多様体の滑らかさによる違い





左と右は位相多様体だが, 真中は位相多様体ではない.
(点 $(1,0,1)$ の近傍がユークリッド平面と同相にならない.)

位相多様体としては右のものは球面と同じとみなせるが,
C^∞ 多様体ではない.

“ ない ” の意味はけっこう難しい.
$\boldsymbol{R}^3$ で角を持つ曲面として実現されているものを,
回りとの関係を変えずに滑らかにすることはできないが,
これと球面との一対一対応は付くので, それから局所座標を導入すれば
球面と同じになってしまう!

$$\left.\begin{array}{l}\text{図形それ自身を抽象的に考えるか,}\\ \text{回りとの関係 (埋め込み) を一緒に考えるか,}\end{array}\right\}\text{は幾何学で常に問題となる.}$$

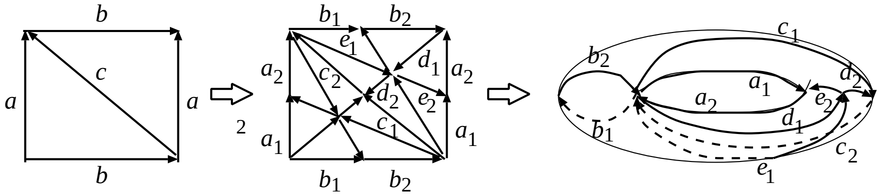
位相幾何入門

まず位相多様体から勉強する.
しかし, 一般の連続写像なんて例も無いし, 扱いにくいので,
できるだけ区分的一次写像で間に合わせる (Poincaré の位相多様体).

三角形分割 (triangulation)

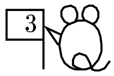
任意の 2 次元多様体は, 平面の三角形を継ぎ合わせることにより作れる
$\Longrightarrow$ 三角形分割

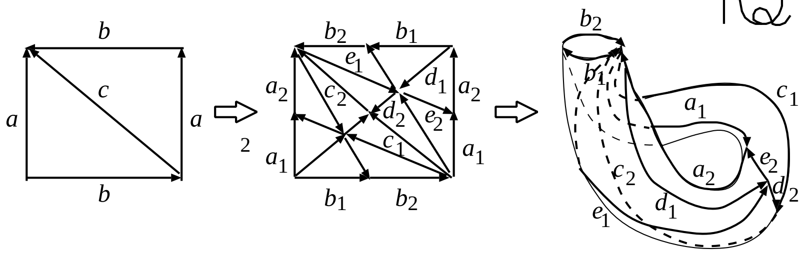
例 1 **トーラス :**



左はトーラスを作るときの紙の合わせ方の図に対角線を入れたもの.
辺の始点と終点が一致するのはいやだという場合は, 細分して三角形を
増やせばよい (図は重心細分).

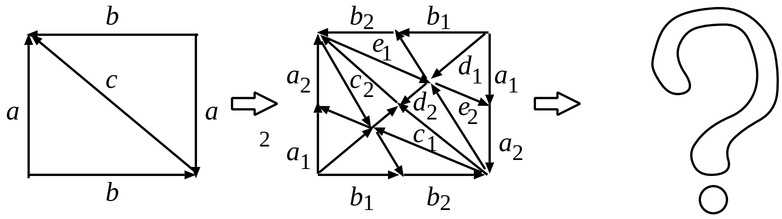
例 2 Klein の壷：





注意して図を描かないと, c_2, d_1, d_2 を三辺に持つ三角形のように,
実際には有り得ないものを描いてしまう！

例 3 射影平面：



二次元の閉じた位相多様体にはどんなものが有るか？
(分類問題)

向き付け可能とすると, 穴の数 g 個の浮き袋で尽くされる.

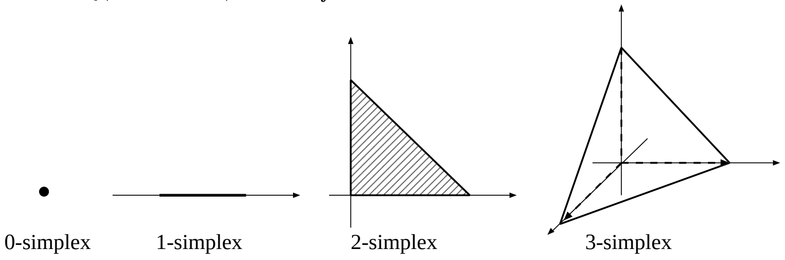
分類の手がかりは？ $\Longrightarrow$ 位相不変量 (同相写像で変わらない量)

二大位相不変量であるホモロジー群とホモトピー群について学ぼう！

三角形分割された多様体の一般化 $\Longrightarrow$ 単体的複体 (simplicial complex)

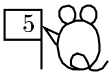
高次元への一般化：ユークリッド空間の n-単体を継ぎ合わせて得られる図形

n-単体： $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \le x_j \le 1, j = 1, \ldots, n, x_1 + \cdots + x_n \le 1\}$

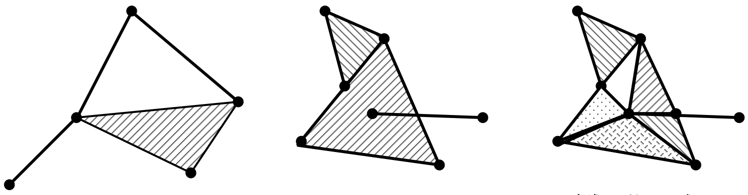


以下, 簡単のため主に２次元の図形について説明する.

単体的複体 $C = C_2 \cup C_1 \cup C_0$ とは,
$C_2 = \{\alpha_j, j = 1, \ldots, J\}$ 2-単体 (三角形) の集合,
$C_1 = \{\boldsymbol{a}_k, k = 1, \ldots, K\}$ 1-単体 (辺) の集合,
$C_0 = \{\mathrm{P}_l, l = 1, \ldots, L\}$ 0-単体 (点) の集合
が有り, 次の両立条件を満たすこと：

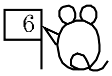


1) C_2 の元である三角形の辺は必ず C_1 に含まれる.
2) C_1 の元である辺の両端点は必ず C_0 に含まれる.
3) C の二つの元が交わりを持ては, 共通部分はまた
C の要素でなければならない.



良い例　　悪い例　　悪い例を作り変えて良くしたもの

ホモロジー群



鎖の群 (chain group)

$C_2 = \{\sum_j c_j \alpha_j \mid c_j \in \boldsymbol{Z}\}$ 2-単体 α_j 達が生成する自由加群

$C_1 = \{\sum_k c_k \boldsymbol{a}_k \mid c_k \in \boldsymbol{Z}\}$ 1-単体 $\boldsymbol{a}_k$ 達が生成する自由加群

$C_0 = \{\sum_l c_l \mathrm{P}_l \mid c_l \in \boldsymbol{Z}\}$ 0-単体 P_l 達が生成する自由加群

境界作用素 (boundary operator) ∂
0-単体の境界は 0 とする. $\partial \mathrm{P} = 0$
1-単体 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の境界は $Q - P$ とする. $\partial \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \mathrm{Q} - \mathrm{P}$
2-単体 $\triangle \mathrm{PQR}$ の境界は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}} + \overrightarrow{\mathrm{RP}}$ とする.

一般の鎖に対しては, この演算を加法と $\boldsymbol{Z}$ 倍で自然に拡張する.

$\partial : C_k \to C_{k-1}$ は加群の準同型となる.
i.e. $\partial(m\alpha + n\beta) = m\partial\alpha + n\partial\beta$

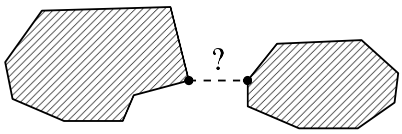
輪体 (cycle) の成す部分群
$\mathrm{Ker}\,\partial$ の元を輪体と呼ぶ:
$Z_k := \mathrm{Ker}\,\{\partial : C_k \to C_{k-1}\} = \{\alpha \in C_k \mid \partial\alpha = 0\}$

境界輪体 (boundary) の成す部分群
$\mathrm{Image}\,\partial$ の元を境界輪体と呼ぶ:
$B_k := \mathrm{Image}\,\{\partial : C_{k+1} \to C_k\} = \{\partial\alpha \mid \alpha \in C_{k+1}\}$

☆ ∂ を二回続けて施すと 0 になる！　$\Longrightarrow$ $B_k \subset Z_k$
この事実は, 単体 (simplex) については確かに成り立つので,
一般にも大丈夫だろう.

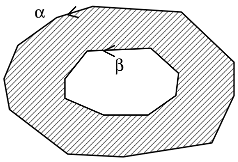
$\boxed{k \text{ 次ホモロジー群 } H_k := Z_k/B_k}$　最も重要な位相不変量の一つ

$k = 0$ に対するホモロジー群 H_0 は連結成分の個数を表す：



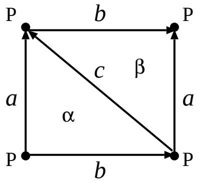
離れた成分に属する 2 点は
1 単体で橋を掛けられない！
$H_0 \cong \boldsymbol{Z}^r$　r は連結成分の個数

$k = 1$ のときのホモロジー群 H_1 の意義の説明：
多様体上に存在する閉曲線の中で, 多様体の内部で膜を張ることの
できるものの割合はどのくらいか？



α だけだと張れない.
$\alpha - \beta$ なら張れる.

トーラスのホモロジー群の計算



左図より

$C_2 = \boldsymbol{Z}\alpha + \boldsymbol{Z}\beta \cong \boldsymbol{Z}^2$, $C_1 = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{c} \cong \boldsymbol{Z}^3$, $C_0 = \boldsymbol{Z}\mathrm{P} \cong \boldsymbol{Z}$

$\partial\alpha = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$, $\quad \partial\beta = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$
よって $Z_2 = \boldsymbol{Z}(\alpha + \beta) \cong \boldsymbol{Z}$, $B_2 = 0$

$\partial\boldsymbol{a} = \mathrm{P} - \mathrm{P} = 0$, $\quad \partial\boldsymbol{b} = \mathrm{P} - \mathrm{P} = 0$, $\quad \partial\boldsymbol{c} = \mathrm{P} - \mathrm{P} = 0$
よって $Z_1 = C_1 = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{c}$, $B_1 = Z(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cong \boldsymbol{Z}$

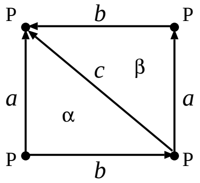
$\partial\mathrm{P} = 0$, よって $Z_0 = C_0 = \boldsymbol{Z}\mathrm{P}$, $B_0 = 0$

以上より, トーラスのホモロジー群は

$$H_2 = \boldsymbol{Z},\quad H_1 = \boldsymbol{Z}^3/\boldsymbol{Z} \sim \boldsymbol{Z}^2,\quad H_0 = \boldsymbol{Z}$$

勇気の有る人は重心細分した方の図で計算し, 一致することを確かめよ.

クラインの壷のホモロジー群の計算



左図より

$C_2 = \boldsymbol{Z}\alpha + \boldsymbol{Z}\beta \cong \boldsymbol{Z}^2,\ C_1 = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{c} \cong \boldsymbol{Z}^3,\ C_0 = \boldsymbol{Z}\mathrm{P} \cong \boldsymbol{Z}$

$\partial\alpha = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}, \quad \partial\beta = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ よって $Z_2 = 0,\ B_2 = 0$

$\partial\boldsymbol{a} = \mathrm{P} - \mathrm{P} = 0, \quad \partial\boldsymbol{b} = \mathrm{P} - \mathrm{P} = 0, \quad \partial\boldsymbol{c} = \mathrm{P} - \mathrm{P} = 0$
よって $Z_1 = C_1 = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{c},\ B_1 = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) + 2\boldsymbol{Z}\boldsymbol{b} \cong \boldsymbol{Z} \oplus 2\boldsymbol{Z}$

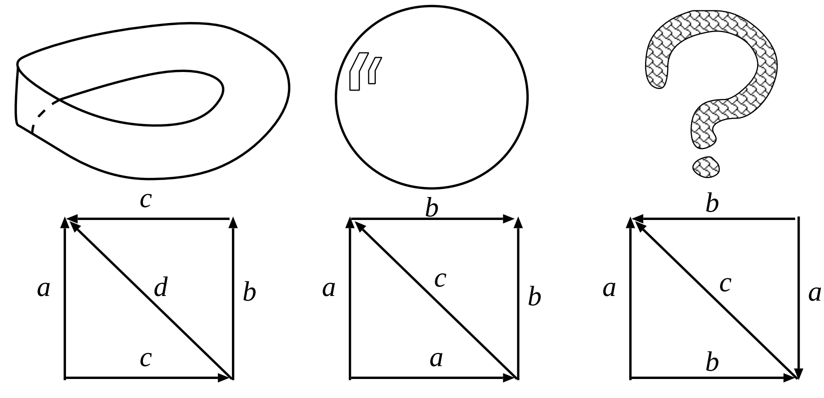
$\partial\mathrm{P} = 0,$ よって $Z_0 = C_0 = \boldsymbol{Z}\mathrm{P}, \quad B_0 = 0$

以上より, Klein bottle のホモロジー群は

$$H_2 = 0,\ H_1 = \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z_2},\ H_0 = \boldsymbol{Z}$$

Z_2 に属する元は, それ自身は膜を張れないが,
2 周したら膜を張れるようなもの.

問題 6 Möbius の帯 (左), 球面 (中), および射影平面 (右) のホモロジー群を計算せよ.



オイラーの多面体定理 (Euler 1752)

どんな凸多面体についても, 頂点の数を v, 辺の数を e, 面の数を s とすれば,
$\chi := v - e + s = 2$ が成り立つ　(位相幾何の最初の結果)

実は, 穴が g 個ある多面体については　$\chi = 2 - 2g$　となることが分かる.
χ を Euler 標数 (または特性数 characteristic) と呼ぶ.

証明は $v + e + s$ に関する帰納法で初等的にできるが,
ホモロジー群でより明快に説明できる：
定義　Betti 数 $b_j := \operatorname{rank} H_j$
　ここに, 有限生成アーベル群の階数とは, それに含まれる自由加群 $\boldsymbol{Z}$ の
　個数のこと.
cf. 有限生成アーベル群の構造定理： $G \cong \boldsymbol{Z}^r \oplus \bigoplus_j \boldsymbol{Z}_{n_j}$,　$r = \operatorname{rank} G$

鎖を考える際に, 係数を $\boldsymbol{Z}$ から $\boldsymbol{R}$ に“ 係数拡大 ”すると,
線型代数に帰着し, rank は単に次元と解釈できる.

Euler-Poincaré の公式　$\chi = b_0 - b_1 + b_2$ である.

この故に χ を Euler-Poincaré 標数ともいう
後で示されるようにホモロジー群は位相不変量なので, これから
χ が位相不変量なことが分かる.

v, e, s それぞれは不変量ではないことに注意！

ホモロジー群の抽象化 — ホモロジー代数 12

指数定理：加群の準同型の列

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{F_2} C_1 \xrightarrow{F_1} C_0 \longrightarrow 0$$

において, 連続する写像の合成がすべての箇所で 0 となっているとき,
鎖複体 (chain complex) と呼ぶ.
$\mathrm{rank}\, C_2 - \mathrm{rank}\, C_1 + \mathrm{rank}\, C_0$ を鎖複体の指数 (index) と呼ぶ.
鎖複体においては, 鎖ホモロジー群 $H_j(C.) := \mathrm{Ker}\, F_j/\mathrm{Image}\, F_{j+1}$
が定義される. このとき, 一般に

$$\mathrm{rank}\, C_2 - \mathrm{rank}\, C_1 + \mathrm{rank}\, C_0 = \mathrm{rank}\, H_2 - \mathrm{rank}\, H_1 + \mathrm{rank}\, H_0$$

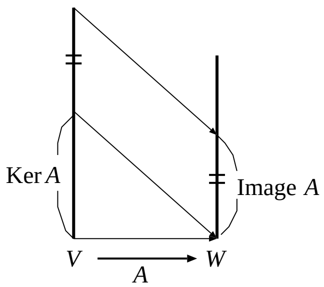
証明は準同型定理による： $C_j/Z_j \cong B_{j-1}$ より
$\mathrm{rank}\, C_j = \mathrm{rank}\, Z_j + \mathrm{rank}\, B_{j-1}$

$$\therefore \sum_{j=0}^{2}(-1)^j \mathrm{rank}\, C_j = \sum_{j=0}^{2}(-1)^j(\mathrm{rank}\, Z_j + \mathrm{rank}\, B_{j-1})$$

$$= \sum_{j=0}^{2}(-1)^j(\mathrm{rank}\, Z_j - \mathrm{rank}\, B_j) = \sum_{j=0}^{2}(-1)^j \mathrm{rank}\, Z_j/B_j$$

$$= \sum_{j=0}^{2}(-1)^j \mathrm{rank}\, H_j$$

線型代数なら, 次元の不変性定理： $A : V \to W$ を線型写像とすれば
$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, A + \dim \mathrm{Image}\, A$



Hauptvermutung (主仮説)

前回のホモロジー群の定義から分かるように, ホモロジー群は
位相多様体に対して直接は定義できない. 三角形分割が必要.

では, 一つの位相多様体に二種の三角形分割が有ったとき, それぞれで
計算したホモロジー群は一致するか？

一方が他方の細分なら一致することは容易に確かめられる.
全く独立に作られた二つの三角形分割は, 両者の細分を繰り返してゆけば,
いつかは一致する？ (Poincaré の Hauptvermutung)

1969 年 Kirby と Siebenmann により $n \geq 5$ で否定的に解決！
位相多様体と PL 多様体は分類が別. 後者の方が細かい.
($n = 4$ は未解決. $n = 2, 3$ はそれ以前に肯定的解決)

しかし, ホモロジー群が位相多様体の不変量であることは, 既に 1940 年代に
別の方法で示されていた.
$\Longrightarrow$ 特異ホモロジー理論：
三角形分割を使わず, 三角形から位相多様体への一対一連続写像の全体
を考え, その $\boldsymbol{Z}$ 係数有限和を特異鎖 (singular chain) として
ホモロジー群を定義すると, 三角形分割で定義したものと一致する.